INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

2º de Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

Cálculo de probabilidades: Distribución binomial

1. Variables aleatorias

Imagen de Kurtxio bajo licencia Creative Commons

Suponemos que ya estás un poco familiarizado con los sucesos y calcular probabilidades de ellos. En los dos temas que llevamos de esta unidad ya has visto muchos ejemplos, y en muchos de ellos, el suceso se puede expresar mediante números. Por ejemplo, probabilidad de sacar un 2 al tirar un dado, o que 7 personas lleguen tarde al trabajo el lunes, o que en un mes llueva más de 150 l/m^2 en Toledo, o ...

Los números rodean nuestra vida, y por tanto, muchos sucesos se pueden expresar mediante números. Cuando esto ocurre, usamos lo que se llama una **variable aleatoria**, es decir, definimos una variable X que vaya tomando como valores los posibles resultados que pueden ocurrir al realizar el experimento aleatorio. siguiendo con los ejemplos anteriores, podríamos definir la variable aleatoria X = Puntuación obtenida al lanzar un dado, o X = Número de personas que llegan tarde el lunes, o X = Precipitaciones caídas en un mes en Toledo, o ...

Esto te sonará un poco, ¿verdad? Y es que cuando empezamos los temas de estadística el curso pasado lo hicimos igual, definiendo lo que era una variable estadística.

Y si sigues recordando, te vendrá a la mente también que las variables estadísticas que se expresaban numéricamente (estaban también las cualitativas) se dividían en dos grupos, las discretas y las continuas, y que según como fueran se representaban de una forma, los parámetros se calculaban de distinta forma,...

Bueno, si no lo recuerdas no pasa nada, sigue este enlace y repasa los tipos de variables estadísticas que había.

Pues bien, las variables aleatorias se clasifican de la misma forma en discretas o continuas, según si cuando realicemos el experimento aleatorio, los resultados de éste puedan ser sólo algunos valores o cualquiera dentro de un intervalo.

Este video puede aclararte mejor el concepto de variables aleatorias discretas y continuas.

Importante

Una variable aleatoria es una función que asocia a cada elemento del espacio muestral de un experimento aleatorio un número real.

Las variables aleatorias pueden ser de dos tipos:

Variables discretas, aquellas que, aunque pudiendo tener infinitos valores, entre un valor y el siguiente no puede haber ninguno. Por ejemplo, el número de monedas en una mano de los chinos puede ser 2 ó 3, sin embargo, nunca tomará ningún valor entre 2 y 3.

Variables continuas, aquellas que necesariamente para pasar de un valor a otro pueden tomar los infinitos valores intermedios, como por ejemplo, el tiempo de espera de un autobús; un día puede tardar 10 minutos y otro 11, pero entre medias puede darse el caso que tome cualquier valor.

Imagen de otrarove bajo licencia Creative Commons

En este tema vamos a tratar las variables aleatorias discretas, y en particular, un modelo o patrón concreta de ellas, la que vamos a llamar distribución binomial. Puede que del curso pasado esto te suene, pero como ya te hemos comentado, esta unidad está prácticamente enfocada a repasar lo que vimos en las Matemáticas de 1º respecto a la probabilidad.

Lo mismo haremos con las continuas en el tema siguiente de la unidad.

1.1. Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Imagen de verino77 bajo licencia Creative Commons

Vamos a seguir con los paralelismos entre estadística y probabilidad. Ya hemos visto que el significado de variable aleatoria o estadística es más o menos similar y que los tipos de variables son los mismos.

Si piensas un poco, recordarás que lo siguiente que hacíamos en estadística era ordenar los datos, hacer un recuento de los valores obtenidos, agruparlos e indicar el número de repeticiones de cada valor con la llamada frecuencia absoluta. Todo esto se solía colocar en una tabla ordenando de menor a mayor los valores y colocando al lado una columna con las frecuencias absolutas, ¿lo recuerdas? Además, si queríamos ver la representatividad de cada valor en el conjunto, construíamos una columna llamada frecuencia relativa cuyos valores salían de dividir cada frecuencia entre el total de datos.

Pues bien, con una variable aleatoria vamos a hacer algo muy similar, vamos a construir una tabla en la que vamos a colocar los valores que puede tomar la variable aleatoria X y al lado, no la frecuencia de ese valor, sino la probabilidad de que X tome ese valor, es decir, vamos a ir indicando los valores y las probabilidades de esos valores. Así, vamos a construir lo que se llama la **Función de Probabilidad** de la variable X.

Ejercicio resuelto

Imagen de Daquellamanera bajo licencia Creative Commons

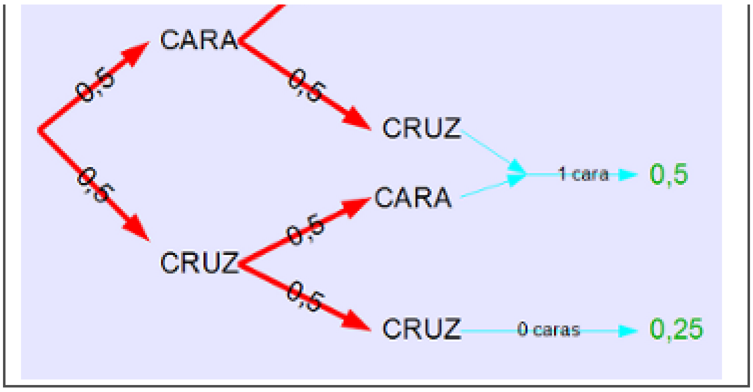
Blanca le propuso el siguiente juego a su amigo Gonzalo: Lanza 2 monedas y por cada cara que saques te doy 2€, ahora bien, si no sacas ninguna tú me darás 10 euros. Gonzalo por supuesto, aceptó el desafío.

¿Cuál es la función de probabilidad de este juego?

Mostrar retroalimentación

Para empezar, fíjate que estamos hablando sobre el dinero que ganará o perderá Gonzalo, así que, podemos definir como variable aleatoria X = Dinero ganado por Gonzalo.

¿Qué valores puede tener X? Pues sólo tres, ¿no? O gana 4 euros si salen las dos caras, o gana 2 si



dos caras, o gana 2 si sale una cara o pierde 8 si no sale ninguna. Es decir, la ganancia de Gonzalo es 4, 2 o -10 (perder 10 € es ganar -10)

Ya tenemos la primera parte, los valores de X. Ahora nos faltan las probabilidades de esos valores, pero esto no debe suponer ya mucho problema. Si hacemos un diagrama de árbol como el de la izquierda, vemos fácilmente que la probabilidad de obtener dos caras es 0,25; de una cara 0,5 y de ninguna cara 0,25.

Por tanto, la distribución de probabilidad del dinero ganado por Gonzalo es:

x_i	-10	2	4
p_i	0,25	0,5	0,25

Importante

La función o distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta es la función que a cada valor x_i de la variable le asocia su probabilidad p_i.

$$P(X=x_i) = p_i$$

- La probabilidad p_i es siempre no negativa y menor que 1: $0 \le p_i \le 1$.
- La suma de todas las probabilidades de los valores de la variable es 1.

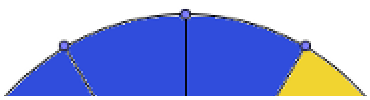
Comprueba lo aprendido

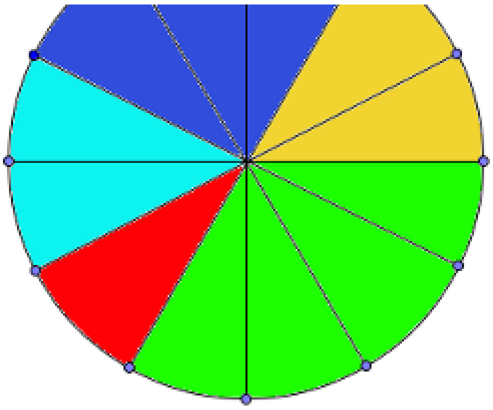
Blanco

Observa la ruleta que tienes a la izquierda. Lanzamos una bola y según donde caiga ganamos una cantidad u otra de dinero. Si cae en el verde ganamos 1 €, si cae en el azul 3 €, si cae en el celeste 10 €, 15 si lo hace en el amarillo y por último 30 € si cae en la casilla roja.

Definimos la variable aleatoria X = dinero ganado en la ruleta.

Completa en la siguiente tabla la función de probabilidad de esta variable aleatoria





x_i					
p_i					

Nota: Ordena los valores de X, que será el dinero ganado de menor a mayor, separa la parte entera de la decimal con "," y si es necesario, redondea a tres cifras decimales las probabilidades.

Enviar

Fíjate que los valores de X serán 1, 3, 10, 15 y 30 y que la probabilidad de cada valor es la probabilidad del color que representa. Por ejemplo, P(X=1) = P(verde) = 4/12

Y puestos a seguir recordando, seguro que te acordarás de la media, de la varianza, ... Estos eran los llamados parámetros estadísticos y servían para resumir toda la información que nos aportaba la muestra. Había muchos parámetros, y todos tienen su equivalente en una función de probabilidad, pero vamos a conformarnos con los tres más representativos, la **media**, la **varianza** y la **desviación típica**.

En el siguiente ejemplo vamos a ver cómo se calculan estas tres medidas a partir de los mismos datos del ejemplo anterior.

Ejercicio resuelto

Vamos a calcular la media, la varianza y la desviación típica de la variable X dinero ganado por Gonzalo. Por cierto, ¿corre muchos riesgos Gonzalo al aceptar este juego?

Mostrar retroalimentación

Media

Si te acuerdas del año pasado, la media se calculaba usando la fórmula $\overline{X} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n}$. Pero si te fijas, si dividimos cada frecuencia por el total de datos, estamos dando la probabilidad de que ocurra el valor x_i. Por tanto, lo que hemos de hacer es multiplicar cada valor por su probabilidad y sumar todos los productos:

$$\mu = -10\cdot 0{,}25 + 2\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0{,}25 = -0{,}5$$

Para distinguir entre media en estadística y media en probabilidad, suele usarse la letra griega μ (*"mu"*) para designar la media de una variable aleatoria, aunque también se usa a veces la notación E(X), Esperanza de X.

Por tanto, el dinero que **espera** ganar con este juego Gonzalo es -0,5 €, o sea, perder 50 céntimos. Así que, no, no es demasiado beneficioso este juego para Gonzalo, y es que, aunque la probabilidad de ganar algo es bastante alta (0,75) el dinero que se gana en comparación con el que se pierde si no ganas el juego es pequeño

Varianza

Si seguimos revisando fórmulas del año pasado, recordarás que la fórmula de la varianza era: $S^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{n} - \overline{X}^2$. Pues bien, igual que antes, si sustituimos esas frecuencias entre el número de datos por la probabilidad del valor, vemos que tenemos que multiplicar el cuadrado de cada valor de X por su probabilidad, sumar todos los productos y restarle la media al cuadrado.

Para la varianza y desviación típica se suele usar como símbolo la letra griega σ (*"sigma"*). Así:

$$\sigma^2 = [(-10)^2 \cdot 0{,}25 + 2^2 \cdot 0{,}5 + 4^2 \cdot 0{,}25] - (-0{,}5)^2 = 31 - 0{,}25 = 30{,}75$$

Desviación típica

La desviación típica se calculaba como la raíz cuadrada de la varianza, así que, $\sigma = \sqrt{30{,}75} = 5{,}545$ €

Importante

La **media** o esperanza matemática de una variable aleatoria, se expresa con la letra griega μ y se calcula sumando los productos de cada valor por su probabilidad:

$$\mu = \Sigma x_i \cdot p_i$$

La **varianza**, que se expresa por σ^2 se calcula sumando los productos del cuadrado de cada valor por su probabilidad y restarle a esta suma el cuadrado de la media:

$$\sigma^2 = \Sigma x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$$

Por último, la **desviación típica** σ , se calcula hallando la raíz cuadrada de la varianza.

Para saber más

Un juego de azar se considera justo cuando la ganancia media que se espera obtener es 0 €, o sea, cuando el dinero que arriesgas, el premio que recibes y las probabilidades de ganar o perder van equiparadas.

Puedes comprobar que la mayoría de los juegos de azar, loterías, quinielas, rifas, etc, no son justos.

Comprueba lo aprendido

Blanco

Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente función de probabilidad:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,4	0,1	0,15	0,25	0,1

La media es ____ ; la varianza ____ y la desviación típica ____

(Separa la parte decimal con "," y en la desviación típica pon tres decimales)

Enviar

Aplica las fórmulas anteriores

2. Experimentos de Bernoulli

Imagen de tnarik bajo licencia Creative Commons

En numerosas situaciones, una pregunta sólo tiene dos posibles respuestas, sí o no, y en numerosos experimentos, sólo son posibles dos resultados, blanco o negro, me gusta un modelo de coche o no me gusta, una persona toma café o no toma, un ladrillo es defectuoso o está en buen estado, una persona está enferma o sana,..., y así, hasta que nos aburramos, podemos estar poniendo ejemplos de situaciones en las que sólo hay dos posibilidades.

Bueno, pues esto que puede parecerte tan tonto, resulta que en el mundo de las probabilidades es la base con la que se resuelven muchas cuestiones, hasta el punto incluso de decidir si una partida de zumos es defectuosa y no es apta para el consumo. Pero vamos por parte, un experimento aleatorio en el que sólo hay dos posibles resultados se denomina **Experimento de Bernoulli**, y a esos dos posibles resultados que constituyen el espacio muestral se les llama **éxito** y **fracaso**.

¿Y se puede definir una variable aleatoria a pesar de que la respuesta sea toma café o no toma? Pues sí, y eso que la respuesta no es un número.

Y es que, podemos modificar la respuesta para que sí sea numérica. En estos casos, al éxito se le asigna el valor 1 y al fracaso el valor 0. Por tanto, tenemos una variable que tomará valores 0 y 1.

Además, a la **probabilidad de éxito** la vamos a llamar "**p**", con lo que la de fracaso será 1-p y la representaremos por la letra q.

Ejercicio resuelto

Imagen de jgoge123 bajo licencia Creative Commons

Una pregunta de un examen es de tipo test, consta de cuatro posibles respuestas pero no tenemos ni idea sobre la respuesta de la misma, así que la contestamos al azar. ¿Podemos definir una variable aleatoria sobre este experimento? ¿Cuáles serían la función de probabilidad, la media, la varianza y la desviación típica?

Mostrar retroalimentación

En principio, parece que no, pues lo que puede pasar es que se acierte o que no, pero puesto que sólo son dos los posibles resultados,lo podemos adaptar a experimento de Bernoulli, asignándole como hemos dicho antes dos valores al éxito y al fracaso. Así, asignamos 1 al éxito, que será acertar y 0 al fracaso que será no acertar.

Ahora calculamos las probabilidades. Puesto que hay 4 posibles respuestas y sólo una es verdadera, la probabilidad de acertar es una entre cuatro, esto es, 1/4 = 0,25.

Por tanto p = P(Éxito) = 0,25 y q = P(Fracaso) = 1 - p = 0,75.

Bueno, pues ya tenemos la función de probabilidad:

x_i	0	1
p_i	0,75	0,25

Y por tanto podemos calcular los tres parámetros:

Media: $\mu = 0 \cdot 0{,}75 + 1 \cdot 0{,}25 = 0{,}25$

Varianza:
$\sigma^2 = 0^2 \cdot 0{,}75 + 1^2 \cdot 0{,}25 - \mu^2 \; = \; 0{,}25 - 0{,}25^2 \; = \; 0{,}25(1-0{,}25) \; = \; 0{,}1875$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \; = \; \sqrt{0{,}1875} \; = \; 0{,}433$

Si te fijas, la **media** siempre va a salir el valor del parámetro **p**, la probabilidad de éxito, y la **varianza**, **p·(1-p)** o p·q, como prefieras.

Importante

Un experimento aleatorio decimos que es de Bernoulli si sólo tiene dos posibles resultados al realizarse, a los que llamamos éxito y fracaso, según lo que estemos interesados. Una variable aleatoria basada en un experimento de Bernoulli tiene únicamente dos valores 0 y 1, asociados respectivamente al fracaso o al éxito de ese experimento de Bernoulli.

La **probabilidad de éxito** es el parámetro que define esta distribución y se representa mediante la letra **p**, y la función de probabilidad es entonces:

x_i	p_i
0	1-p
1	p

En cualquier distribución de Bernoulli las medidas representativas de centralización y dispersión vienen dadas en función de este parámetro y valen:

Media	Varianza	Desviación Típica
$\mu = p$	$\sigma^2 = p \cdot (1-p)$	$\sigma = \sqrt{p \cdot (1-p)}$

Este video puede aclarar mejor el concepto de variable aleatoria discreta que sigue una distribución de bernoulli.

Curiosidad

Imagen en Wikimedia Commons bajo licencia Creative Commons

Los Bernoulli (o Bernouilli) son una familia de matemáticos y físicos suizos procedentes de la ciudad de Basilea, que irrumpió en el mundo científico a finales del siglo XVII.

El fundador de esta familia fue Jacob el viejo, nacido en Amberes (Bélgica), un hugonote que se trasladó a Basilea en 1622 por motivos de persecución religiosa. Se casó tres veces y sólo tuvo un hijo, Nikolaus. Éste se casó y tuvo una docena, de los cuales cuatro llegaron a edad adulta; dos de ellos se convirtieron en matemáticos de primer orden: Jakob, nacido en 1654, y Johann, nacido en 1667. Ambos estudiaron la teoría del cálculo infinitesimal de Leibniz y desarrollaron aplicaciones de la misma.

Jakob Bernoulli (Basilea, 27 de diciembre de 1654 - 16 de agosto de 1705), también conocido como Jacob, Jacques o James Bernoulli, fue un matemático y científico. Siendo joven, su padre lo envió a la Universidad de Basilea para estudiar filosofía y teología, con el ánimo de que se convirtiera en teólogo. Pero Jakob continuó, a escondidas, las que eran sus auténticas aficiones la física y las matemáticas, según confiesa en su diario.

Su obra maestra fue Ars Conjectandi (el Arte de la conjetura), un trabajo pionero en la teoría de la probabilidad. La publicó su sobrino Nicholas en 1713, ocho años tras su muerte. Los términos ensayo de Bernoulli y números de Bernoulli son resultado de su trabajo. También existe un cráter en la Luna bautizado cráter Bernoulli en honor suyo y de su hermano Johann.

3. Distribución Binomial

Imagen de Comodoro Deportes bajo licencia Creative Commons

En el ejemplo del apartado anterior, veíamos que si contestábamos al azar una pregunta de tipo test se producía una situación con dos únicas posibilidades acertar o fallar, al igual que en el juego de las monedas de Gonzalo. Bueno, no exactamente era así, había tres posibles resultados, pero si lo miramos diciendo que gana algo de dinero o pierde ya sí.

Pero claro, ni el examen tendrá una única pregunta ni Gonzalo jugará una sola vez, sino que se repetirá varias veces la misma situación. Pues bien, cuando repetimos una serie de veces un experimento de Bernoulli con las mismas probabilidades de éxito y fracaso en todos las repeticiones, llegamos a un modelo binomial. Por ejemplo, imagínate que todos los niños de la fila juegan al mismo juego que Gonzalo. Estamos repitiendo el mismo experimento una serie de veces. Si nuestra variable indica el número de niños que ganan, tendremos una variable binomial.

Lo ponemos todo con más detalles.

Importante

Tenemos un experimento de Bernoulli en el que la **probabilidad** de que ocurra el **éxito** es **"p"**, repetimos ese experimento una serie de **veces "n"** en las mismas condiciones y anotamos el número de veces que ocurre el éxito en esas n repeticiones. Entonces, la variable aleatoria X que mide el **número de éxitos obtenidos** decimos que sigue una distribución **Binomial** de parámetros n y p, y lo expresamos así:

X= n.º de éxitos obtenidos → X~B(n , p)

Fíjate que X es una variable aleatoria discreta, pues habrá un éxito, dos o catorce, pero X no podrá valer 1,5 ni 2,23.

Ejercicio resuelto

En nuestro examen tipo test había cuatro posibles respuestas en cada pregunta, por tanto, una pregunta se acierta con una probabilidad del 25% y se falla con una probabilidad del 75%.

El éxito de este experimento es acertar, pues nos interesa ver cuántas preguntas acertamos para aprobar o no aprobar el examen, luego el parámetro p será:

p = 0,25.

Todavía no hemos dicho cuántas preguntas tiene el examen. Si por ejemplo, decimos que

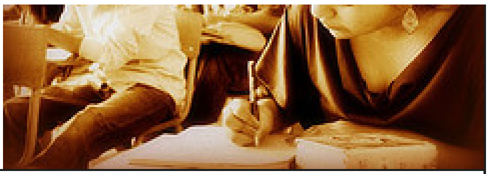


Imagen de jgoge123 bajo licencia Creative Commons

hay 10 preguntas, tendremos que repetir ese experimento de contestar al azar 10 veces, luego el parámetro n será 10:

n= 10.

Además, como en todas las preguntas las probabilidades éxito y fracaso no varían (siempre hay 4 posibles respuestas), el número de éxitos, o sea, el número de preguntas acertadas, nos conduce a una binomial y sería así:

X = Número de preguntas acertadas → X~B(10 ; 0,25)

Comprueba lo aprendido

Blanco

Completa los huecos en blanco. Si has de poner decimales, separa la parte entera y la decimal con ",".

1) 20 niños juegan a cara o cruz. La variable X que mide el número de caras obtenidas es una binomial de parámetros n= ____ y p= ____

2) Gonzalo apuesta 15 veces al juego y su mujer quiere contarles las veces que pierde. La variable X=nº de veces que pierde es una binomial. X~B(____ ; ____)

3) En una población, al 62% le gusta tomar café. Si elegimos una muestra de 12 personas y nos preguntamos sobre el número de personas a las que les gusta el café de ellas, estamos ante una binomial B(____ ; ____)

4) Una máquina fabrica un 2% de piezas defectuosas. Si cogemos 50 piezas y nos preguntamos sobre un número de piezas defectuosas, tenemos un modelo binomial donde los parámetros son n= ____ y p = ____

Enviar

1) n es 20 pues repetimos 20 veces el lanzamiento de la moneda y en cada caso la probabilidad de sacar cara es 1/2, es decir, 0,5.

2) Como apuesta 15 veces, n = 15 y como estamos interesados en que pierda, el éxito ahora es perder. Por tanto, el parámetro p es la probabilidad de perder que era la probabilidad de que no saliera ninguna cara en las dos monedas, y ésta, era de 0,25.

3) A cada persona, le pregunto si le gusta o no el café. Como al 62% le gusta, la probabilidad al elegir una persona al azar que le guste el café es 0,62 (62/100), luego p = 0,62. Como elegimos 12 personas, estamos repitiendo 12 veces el experimento y por tanto n = 12.

4) en este caso n = 50, pues cojo 50 piezas, y en cada una, la probabilidad de que sea defectuosa es del 2%, esto es, 0,02. Por tanto, p = 0,02. Ten en cuenta que en esta situación el éxito es que la pieza sea defectuosa.

Curiosidad

Curiosidad

La distribución Binomial tiene muchísimas aplicaciones en campos diversos. Por ejemplo, el control de calidad sobre las piezas que fabrica una determinada máquina puede realizarse a partir de aplicar la distribución binomial a una muestra, el número de personas que sanan ante un nuevo medicamento puede preverse a través de una binomial, o el número de personas que contraerán un determinado virus, también.

Imagen de Nicholas_T bajo licencia Creative Commons

En la ingeniería agrícola, las pruebas sobre el rendimiento de un nuevo cultivo y su extrapolación a grandes plantaciones se basan muchas veces en esta distribución.

Y que decir de los estudios de mercado en una población. Ventas de un nuevo producto, apertura de un nuevo negocio en un determinado lugar de la población, impacto de la publicidad en la población, análisis de riesgo de una determinada inversión. Todas estas cuestiones se resuelven a través de encuestas y muestras y las conclusiones se explican a través de distribuciones binomiales.

Como ves, la distribución binomial está mucho más presente de lo que te imaginas.

3.1. Números factoriales

Imagen de Adrianolt bajo licencia Creative Commons

Ya sabemos entonces lo que es una distribución binomial y si un problema nuestro lo podemos adecuar cual sastre en su taller a ese patrón. Pero, ¿qué ventajas tiene que tengamos ese modelo?

Pues la respuesta te la digo inmediata: que podemos calcular las probabilidades de esos sucesos de manera rápida aplicando la fórmula de la función de probabilidad de la distribución binomial, y si nos hace falta, la media y la varianza sin prácticamente esfuerzo ninguno. Como comprenderás, no me interesa para nada fabricar 50 piezas y contar las buenas y malas, sino sin fabricarlas, calcular a priori con probabilidad salen todas buenas, o con qué probabilidad como mucho hay 5 defectuosas o con probabilidad apruebo el examen tipo test sin estudiar.

¿Y cuál es esa fórmula? -dirás ahora- Pues eso no te lo contesto hasta el siguiente apartado, y es que, para poder usar esa fórmula necesitamos una herramienta o mejor dicho dos herramientas: los números factoriales y los números combinatorios.

Los números factoriales se expresan por n!, se leen *"n factorial"* y se calculan multiplicando todos los números naturales menores o iguales que él:

n! = n·(n-1)·(n-2)·...·3·2·1

Por ejemplo, 5! = 5·4·3·2·1 = 120.

Por definición, al factorial de cero se le asigna el valor 1: 0! = 1

Los números combinatorios se expresan $\binom{n}{k}$, se leen *"n sobre k"* y se calculan aplicando la fórmula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Por ejemplo, $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{720}{2\cdot 24} = \frac{720}{48} = 15$

Los siguientes videos pueden ayudarte a aclarar los conceptos de números factoriales y combinatorios.

Números Factoriales	Números combinatorios

Comprueba lo aprendido ltiple

Elige la respuesta correcta.

1) El valor de 7! es:

- 7
- 49
- 720
- 5040

No es correcto

No, eso es el cuadrado

Creo que te falta algo

Muy bien

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

2) Calcular 10! es lo mismo que multiplicar 10 por 9!

- Verdadero
- Falso

Correcto

Sí es cierto, pues en 10! multiplicacos de 10 para abajo, y en 9! a partir del 9. Como a éste último le añadimos el producto por 10, estamos multiplicando los mismos números.

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto

3) $\binom{8}{4}$ es:

- 2
- 4
- 70
- 56

No se trata de dividir

No es correcto

Muy bien

Repasa los cálculos

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

4) El resultado de calcular $\binom{6}{0}$ es:

- 1
- 6
- 12
- No se puede calcular

Muy bien

No es correcto, repasa los cálculos

No es correcto

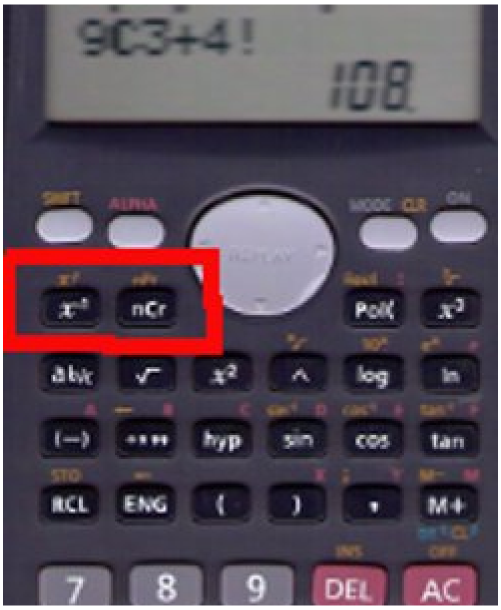
Sí se puede. Ten en cuenta que 0!=1

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Curiosidad

Curiosidad



Con la mayoría de calculadoras científicas puedes calcular números factoriales y números combinatorios. Seguro que hay algún botón donde directamente o a través de la función inversa aparece ***x!***. Como es lógico, esta instrucción sirve para calcular números factoriales.

Seguramente también, tendrás un botón donde aparezca algo así: ***nCr***. Este botón es el que hay que utilizar para calcular un número combinatorio.

También en las aplicaciones informáticas se pueden calcular estos números. Con la aplicación Wirirs, en la pestaña combinatoria, puedes calcular cualquier número combinatorio.

Para saber más

Los números combinatorios sirven para contar los posibles agrupamientos que se pueden hacer cuando tenemos un número de elementos y hacemos grupos con unos cuantos de ellos. El número $\binom{n}{k}$ indica el número de grupos distintos que se pueden coger si tengo un conjunto de n elementos y hago grupos de tamaño k sin que importe el orden en que los cojo.

Imagen de oseillo bajo licencia Creative Commons

Por ejemplo, has echado alguna vez una primitiva. ¿Te has preguntado cuántas primitivas distintas hay que rellenar para asegurarnos el premio gordo? Pues esta cuestión se resuelve con los números combinatorios.

En una primitiva, de entre los 49 números que hay, elijo 6. El número de grupos distintos de 49 elementos cogidos de 6 en 6 que se pueden hacer es: $\binom{49}{6} = 13.983.816$. ¡Casi nada!

Todo esto forma parte de una rama de las Matemáticas y de la probabilidad llamada combinatoria. Si te interesa y quieres saber más sigue este enlace.

3.2. Aplicaciones

Imagen de tatrebil bajo licencia Creative Commons

Ahora ya sí, tenemos todo lo necesario. Sabemos lo que es la distribución binomial y sabemos calcular los números combinatorios, así que, ya podemos calcular probabilidades de una distribución binomial. Bueno, en realidad podíamos hacerlo pero lo que ocurre es que sería pesadísimo. Por ejemplo, si Gonzalo juega 10 veces y queremos calcular la probabilidad de que pierda 4 veces, tendríamos que hacer un árbol con 10 ramificaciones y contar en las que pierde 4. No te digo más que ese árbol completo tendría 1024 ramitas. Uff! ¡Casi nada!

Vamos a aprovechar que es una binomial y que en este modelo las probabilidades se calculan así:

Importante

Si **X** es una variable aleatoria **binomial** de parámetros **n y p**, X~B(n , p), la función de probabilidad de esta variable X viene dada por:

$$p(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\ ;\quad k=0,1,2\ldots,n$$

Es decir, si X~B(n,p) la probabilidad de que X tome el valor K, con k comprendido entre 0 y n, se calcula a partir de esa fórmula.

Ejercicio resuelto

¿Aprobaremos el examen ese o no? Recuerda, teníamos un examen con 10 preguntas tipo test y con cuatro posibles respuestas para cada una de ellas. La variable X = nº de respuestas acertadas seguía un modelo binomial B(10 ; 0,25). ¿Con qué probabilidad acertamos 5 preguntas? ¿Qué es más probable acertarlas todas o fallarlas todas? Definitivamente, ¿tengo posibilidades de aprobar?

Mostrar retroalimentación

Vamos por parte: X~B(10 ; 0,25)

Acertar 5 es X=5, así que, aplicamos la fórmula para esos valores:

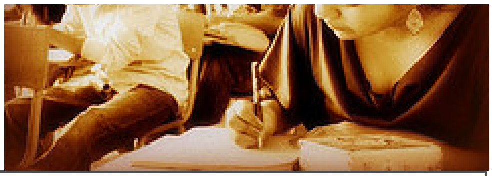


Imagen de jgoge123 bajo licencia Creative Commons

$$p(X=5)=\binom{n}{5}\cdot p^5\cdot(1-p)^{n-5} \;=\; \binom{10}{5}\cdot 0{,}25^5\cdot(1-0{,}25)^5$$

Cogemos la calculadora y obtenemos que P(X=5) = 252·0,00097656·0,2373 = 0,058399.

Así que, la probabilidad de que acertemos 5 es del 5,84%. No tenemos muchas posibilidades que digamos.

Acertar o fallar todas

Acertarlas todas es que X valga 10, así que, hemos de calcular P(X=10)

$$p(X=10)= \binom{10}{10}\cdot 0{,}25^{10}\cdot(1-0{,}25)^0 \;=\; 1\cdot 0{,}25^{10}\cdot(0{,}75)^0 \;=0{,}25^{10}=0{,}000000954$$

Vamos, que te puedes ir olvidando.

Fallarlas todas sí será más probable. Si las fallas todas, el número de aciertos es cero, por tanto X=0

$$p(X=0)=\binom{10}{0}\cdot 0{,}25^0\cdot(1-0{,}25)^{10} \;=\; 1\cdot 1\cdot 0{,}75^{10}=0{,}0563$$

Tampoco es que sea muy probable, y es que lo lógico es que alguna la aciertes, pero vaya, es casi un millón de veces más probable que las falles todas a que la aciertes todas.

Aprobar

Por último nos queda ver la probabilidad de aprobar el examen. Fíjate que aprobar significa sacar al menos 5 puntos, es decir, 5 o más. Puesto que la probabilidad de éxito (p=0,25) es pequeña, las probabilidades más altas estarán en valores pequeños de X y a medida que demos valores mayores la probabilidad de irá disminuyendo. Vamos que no va a ser mucho mayor que la de acertar 5.

Si hacemos los cálculos obtenemos que:

P(X=6)= 0,0162	P(X=8) =0,00039
P(X=7) =0,00309	P(X=9) =0,000029

Y la de acertarlas todas que ya la tenemos hecha arriba,

Total, que la probabilidad de aprobar sería P(X≥5) = P(X=5) + P(X=6) +...+P(X=10) $\simeq$ 0,0781; un 7,81%

Importante

En una distribución **binomial B(n , p)**, calcular la esperanza o media y la varianza es muy fácil, pues basta aplicar estas dos fórmulas:

Media: $\mu = n\cdot p$

Varianza: $\sigma^2 = n\cdot p\cdot(1-p)$

Así, por ejemplo, en el caso del examen de tipo test habíamos visto que fallarlas todas tenía una probabilidad muy baja, que lo lógico era que se acertara alguna, pero, ¿cuántas se puede esperar que acierte? Pues el valor esperado es la media, de ahí que se llame también esperanza, y si la calculamos obtenemos:

$\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}25 = 2,\ 5$

Luego el valor esperado de preguntas acertadas es 2,5.

Para terminar, vamos a hacer un par de ejemplos de situaciones y cuestiones basadas en la distribución binomial.

Ejercicio resuelto


Imagen de ArminFlickr bajo licencia Creative Commons

A la salida de uno de los casinos a los que van de vez en cuando Blanca y Gonzalo hay unos cuantos bares y restaurantes a los que les gusta ir. La mitad de las veces van a Casa Giráldez, el 10% de las veces al Mesón Serrino, y el resto de las veces, o van al restaurante Loreda o al Bar La Tertulia.

En este último local trabaja un amigo nuestro Manolo y siempre que los ve entrar en el casino se pregunta si irán después a su bar, pues las propinas que dejan, especialmente cuando ganan, son de las que no se olvidan. En el último trimestre, Blanca y Gonzalo han ido 15 veces al casino. ¿Cuántas veces puede esperar Manolo que vayan a su bar? ¿Con qué probabilidad se dará ese suceso?Y si no van tantas veces, ¿cuál la probabilidad de que al menos vayan dos veces?

Mostrar retroalimentación

Si lees bien el enunciado, parece que hay cuatro opciones para Blanca y Gonzalo de local al que acudir para celebrar las ganancias, pero en nuestro contexto, que es el de Manolo no es así, únicamente nos interesa si van al Bar La Tertulia o no van. Cada día que van al casino puede ocurrir que después vayan al bar de Manolo o no, además, como nos preguntamos sobre las veces que va, el éxito es que vayan al Bar La Tertulia.

Ahora tenemos que sacar esa probabilidad de éxito. Fíjate que el 60% de las veces van a Casa Giráldez o al Serrino, y el resto, 40%, se reparte a partes iguales entre el restaurante Loreda y nuestro bar, luego la probabilidad de que acudan a La Tertulia uno de los días cualquiera es del 20%, es decir, 0,20.

Ya tenemos entonces los dos parámetros, $n = 15$ (van 15 veces al casino) y $p = 0{,}2$ y la variable $X \sim B(15\ ;\ 0{,}2)$ mide el número de veces que Blanca y Gonzalo acuden al Bar La Tertulia. X valdrá 0, 1, 2, 3,..., 14, 15.

Veces que se espera que vayan al bar de Manolo

Aquí, lo que queremos saber es el valor esperado de la variable aleatoria, esto es, la media de la variable. Para ello, únicamente tenemos que aplicar la fórmula que acabamos de ver:

μ = n·p = 15·0,2 = 3. Luego de las 15 veces, Manolo puede esperar que vayan tres veces a su local.

Probabilidad con la que lo harán

Tenemos que calcular entonces P(X=3) en una distribución binomial B(15 ; 0,2). Aplicamos la fórmula del cálculo de probabilidades en la distribución binomial y sustituimos n por 15 y p por 0,2.

$$P(X=3)=\binom{15}{3}\cdot 0,2^3\cdot 0,8^{12} \;=\; 455\cdot 0,008\cdot 0,068719 \;=\; 0,2501$$

Fíjate que no nos ha salido 0,2, sino algo mayor, y es que esa, es la probabilidad de que vayan un día cualquiera. Además, puedes comprobar que cualquier probabilidad es más pequeña, y es que, en una distribución **binomial**, el **valor más probable** es el valor esperado, es decir, la **media** de la variable.

Probabilidad de que al menos vayan dos veces

Al menos dos veces, significa que va dos veces o más, ¿verdad? Uff!, tenemos que calcular la probabilidad de que vaya 2 veces, 3 veces, 4 veces, y así hasta que vaya las 15 veces. ¡Qué barbaridad!

Cierto, una barbaridad, así que, vamos a buscar algo mejor.

En lugar de esa, vamos a calcular la probabilidad contraria, o sea, la probabilidad del suceso complementario, y vamos a aplicar la propiedad que nos decía que:

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Al menos dos veces, es X ≥ 2. Por tanto, el suceso contrario sería X < 2, o lo que es lo mismo, X ≤ 1. Así, vamos a calcular la probabilidad de que nuestra variable aleatoria valga 1 o menos, pero como el valor más pequeño que puede tomar es 0 (que nunca vayan), únicamente tenemos que calcular dos probabilidades, la de X = 0 y la de X = 1.

$$P(X=0)=\binom{15}{0}\cdot 0,2^0\cdot 0,8^{15} \;=\; 1\cdot 1\cdot 0,0352 \;=\; 0,0352$$

$$P(X=1)=\binom{15}{1}\cdot 0,2^1\cdot 0,8^{14} \;=\; 15\cdot 0,2\cdot 0,4398 \;=\; 0,1319$$

P(Al menos vayan dos veces) = P (X ≥ 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [0,0352 + 0,1319] = 1 -0,1671 = 0,8329

Así que, la probabilidad de que al menos dos veces vayan al Bar La Tertulia aumenta considerablemente; 83,29%

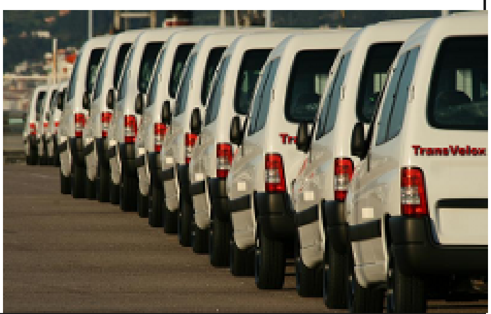


Imagen modificada de Contando Estrelas bajo licencia Creative Commons

Siguiente ejemplo. ¿Te acuerdas de nuestra compañía de reparto y mensajería TRANS VELOX de las primeras unidades? Pues también ellos en sus previsiones de reparto utilizan la distribución binomial.

No sé tú, pero a mí más de una vez me han traído un paquete a casa y justo en el momento que han venido no había nadie. ¡Son cosas que pasan! Cuando esto ocurre, te llaman por teléfono para que des otra dirección o un lugar donde dejar el paquete, pero también puede ocurrir que no logren ponerse en contacto contigo y entonces el paquete vuelva a la central.

En la sede de Mérida llevan muchos años ya funcionando y entre otros lugares, a uno de los que más paquetes llevan es a Almendralejo. En esta ciudad los trabajadores de TRANS VELOX tienen estimado que en el 60% de los casos, en el domicilio donde se ha de entregar el paquete no hay nadie, y de estos en el 40% de los casos el repartidor no consigue contactar telefónicamente con el cliente, con lo que el paquete va devuelto a Mérida hasta otro día de reparto.

Pues bien, un lunes tienen 28 paquetes que repartir en Almendralejo. ¿Con qué probabilidad no se entregan la mitad de los paquetes? ¿Con qué probabilidad se devuelven 10 paquetes? ¿Qué número de paquetes se espera que entreguen correctamente? ¿Hay mucha desviación en esa previsión?

Mostrar retroalimentación

Un paquete se devuelve o se entrega y como hay 28 paquetes, repetimos la operación 28 veces, luego estamos ante un modelo binomial donde n = 28.

En este ejemplo, definimos como éxito que el paquete no se entregue y como fracaso que se entregue, aunque podríamos haberlo planteado al revés sin ningún problema, y es que, la elección de éxito o fracaso es siempre un poco subjetivo, depende del punto de visto personal. Cómo al principio nos fijamos en los que no reparte, por eso lo hemos elegido así.

Probabilidad de éxito. Un paquete se devuelve si no hay nadie en casa (60%) y no se contesta al teléfono (40%). Basta plantear un diagrama en árbol y comprobar que la probabilidad de que el paquete sea devuelto es el producto de las dos probabilidades, es decir, 0,6·0,4 = 0,24.

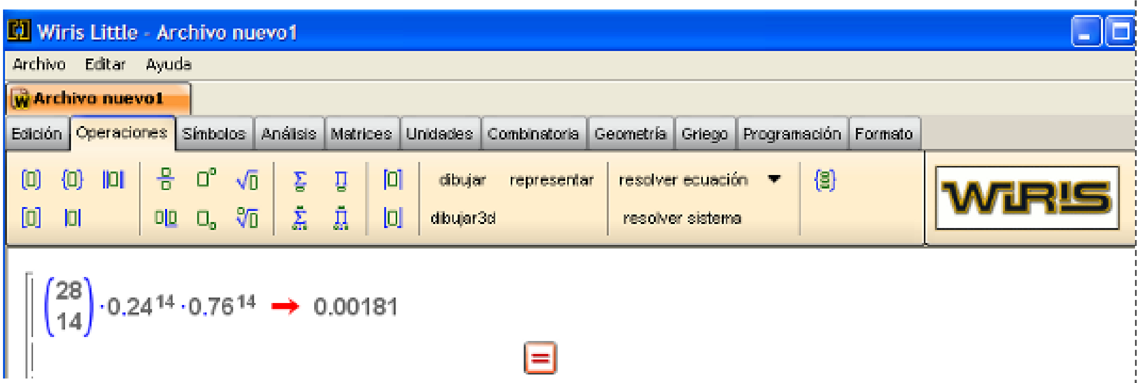
Luego p = P(éxito) = 0,24 y por tanto la probabilidad de fracaso es q = 1 - 0,24 = 0,76.

Por tanto, X = n.º paquetes devueltos sigue una distribución binomial de parámetros 28 y 0,24. X~B(28 ; 0,24)

No entregar la mitad

P(No entregar la mitad) = P(X=14) = $\binom{28}{14}\cdot 0{,}24^{14}\cdot 0{,}76^{14} = 0{,}00181$

Si te pones a hacerlo con calculadora, verás que salen números muy grandes y muy pequeños. Para que al final el resultado está bien debes de operar con todos los decimales. Nosotros lo hemos calculado con Wiris directamente escribiendo el número combinatorio y multiplicando directamente por las potencias como en la imagen que te ponemos.



De todas formas, puedes comprobar en la escena que viene a continuación que es así:

10 paquetes devueltos

$$P(X=10)=\binom{28}{10}\cdot 0{,}24^{10}\cdot 0{,}76^{18} = 0{,}05954$$

Número de paquetes que se espera se entreguen correctamente.

Observa que X indica el número de paquetes devueltos, así que la media de X nos dará el número de paquetes que se espera sean devueltos, pero bueno, tampoco es problema, ¿no? Le restamos a 28 este número y punto.

Media de X → μ = n·p = 28·0,24 = 6,72. Así que, se espera que sean devueltos 6,72 paquetes, por lo que se entregarán 21,28. Sí, ya lo sé, ¿cómo van a ser 21,28?

Bueno pues serán 21 entonces los paquetes entregados y 7 los devueltos, o al menos, esto es lo más previsible.

¿Hay mucha desviación?

Pues calculamos la varianza primero y la desviación típica después.

Varianza → σ^2 = n·p·(1-p) = 28·0,24·0,76 = 5,1072

Desviación típica → $\sigma = \sqrt{varianza} = \sqrt{5,1072} = 2,26$

No, no hay mucha dispersión, pues la mayoría de las veces los valores de X van a estar comprendidos entre 4,46 y 8,98. (Media - desv típica, media + desv típica)

En la siguiente escena de GeoGebra puedes ver gráficamente como se comporta la distribución binomial y calcular cualquier probabilidad, siempre que "n" sea 50 como máximo.

Puedes comprobar que se cumple lo que dijimos en el caso del bar, que el valor que tiene la probabilidad mayor es la media de la variable, o los valores cercanos si ésta no es un número entero.

Applet Geogebra de Manuel Sada bajo licencia Creative Commons.

Comprueba lo aprendido

ltiple

El 3% de la población tiene el grupo sanguíneo B^- . ¿Cuántas personas se espera que en España tengan ese grupo sanguíneo? (Población 44.000.000 aprox.)

- a) Ninguna porque es muy raro ese grupo
- b)1.320.000

- c) 1.320

Pobrecitos los que lo tengan y tengan que hacerse una transfusión. Importamos sangre China

¡Correcto! n=44.000.000 p=0,03 E(X)=n·p=1.320.000

¿No te faltan ceros? Menos mal que el mío es B^+, que si no lo tengo crudo.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

En las mismas condiciones ¿qué probabilidad hay de que en una clase de 30 alumnos al menos uno tenga ese grupo sanguíneo?

- a) 0,60
- b) 0
- c) 0,3

¡Correcto!

No es correcto

No es correcto

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

¿Qué probabilidad hay de encontrar dos con ese mismo grupo sanguíneo en una reunión de 4 amigos?

- a) 0,0051
- b) 0,051
- c) 0,51

Muy poca, pero ¡correcto!

No es correcto

No es correcto

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Para saber más

Para saber más

Existen otras muchas distribuciones de probabilidad de variables discretas basadas en las mismas condiciones de la distribución binomial, es decir, en repetir una serie de veces un experimento con sólo dos posibles resultados, éxito y fracaso. Por ejemplo, en la distribución Geométrica, la variable aleatoria X mide el número de repeticiones del experimento hasta obtener el primer éxito, o en la distribución Binomial Negativa, en la que X mide el número de intentos hasta obtener el éxito k-ésimo.

Si quieres saber más sobre esto y los tipos de variables discretas, sigue este enlace.

Resumen

Importante

Una variable aleatoria es una función que asocia a cada elemento del espacio muestral de un experimento aleatorio un número real.

Imagen de otrarove bajo licencia Creative Commons

Las variables aleatorias pueden ser de dos tipos:

Variables discretas, aquellas que, aunque pudiendo tener infinitos valores, entre un valor y el siguiente no puede haber ninguno. Por ejemplo, el número de monedas en una mano de los chinos puede ser 2 ó 3, sin embargo, nunca tomará ningún valor entre 2 y 3.

Variables continuas, aquellas que necesariamente para pasar de un valor a otro pueden tomar los infinitos valores intermedios, como por ejemplo, el tiempo de espera de un autobús; un día puede tardar 10 minutos y otro 11, pero entre medias puede darse el caso que tome cualquier valor.

Importante

La función o distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta es la función que a cada valor x_i de la variable le asocia su probabilidad p_i.

$$P(X=x_i) = p_i$$

- La probabilidad p_i es siempre no negativa y menor que 1: $0 \leq p_i \leq 1$.
- La suma de todas las probabilidades de los valores de la variable es 1.

Importante

Un experimento aleatorio decimos que es de Bernoulli si sólo tiene dos posibles resultados al realizarse, a los que llamamos éxito y fracaso, según lo que estemos interesados. Una variable aleatoria basada en un experimento de Bernoulli tiene

únicamente dos valores 0 y 1, asociados respectivamente al fracaso o al éxito de ese experimento de Bernoulli.

La **probabilidad de éxito** es el parámetro que define esta distribución y se representa mediante la letra **p**, y la función de probabilidad es entonces:

x_i	p_i
0	1-p
1	p

En cualquier distribución de Bernoulli las medidas representativas de centralización y dispersión vienen dadas en función de este parámetro y valen:

Media	Varianza	Desviación Típica
$\mu = p$	$\sigma^2 = p\cdot(1-p)$	$\sigma = \sqrt{p\cdot(1-p)}$

Importante

Tenemos un experimento de Bernoulli en el que la **probabilidad** de que ocurra el **éxito** es **"p"**, repetimos ese experimento una serie de **veces "n"** en las mismas condiciones y anotamos el número de veces que ocurre el éxito en esas n repeticiones. Entonces, la variable aleatoria X que mide el **número de éxitos obtenidos** decimos que sigue una distribución **Binomial** de parámetros n y p, y lo expresamos así:

X= n.º de éxitos obtenidos → X~B(n , p)

Fíjate que X es una variable aleatoria discreta, pues habrá un éxito, dos o catorce, pero X no podrá valer 1,5 ni 2,23.

Importante

Si **X** es una variable aleatoria **binomial** de parámetros **n y p**, X~B(n , p), la función de probabilidad de esta variable X viene dada por:

$$p(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \quad ; \quad k = 0,1,2\ldots,n$$

Es decir, si X~B(n,p) la probabilidad de que X tome el valor K, con k comprendido entre 0 y n, se calcula a partir de esa fórmula.

Importante

En una distribución **binomial B(n , p)**, calcular la esperanza o media y la varianza es muy fácil, pues basta aplicar estas dos fórmulas:

Media: $\mu = n \cdot p$

Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

Así, por ejemplo, en el caso del examen de tipo test habíamos visto que fallarlas todas tenía una probabilidad muy baja, que lo lógico era que se acertara alguna, pero, ¿cuántas se puede esperar que acierte? Pues el valor esperado es la media, de ahí que se llame también esperanza, y si la calculamos obtenemos:

$\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}25 = 2,\ 5$

Luego el valor esperado de preguntas acertadas es 2,5.

Aviso Legal

AVISO DEL SERVIDOR

Por motivos de seguridad esta página web solo está accesible mediante acceso seguro (https):

https://www.juntadeandalucia.es/Aviso_Legal_Andalucia_v04.htm

Por favor, actualice sus marcadores. Gracias.