INTERVALOS. SEMIRRECTAS. VALOR ABSOLUTO

- Entre dos números reales cualesquiera a y b existen infinitos números racionales e irracionales.
- No existe el siguiente de un número real. Es decir, si a y b son dos números reales distintos, no es posible formar una lista ordenada con todos los números reales comprendidos entre a y b.
- Los números reales llenan la recta numérica, es decir, si señalamos un origen O y situamos un segmento unidad u, entonces a cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto le corresponde un número real, denominándose ahora **recta real**.
- Los números racionales ocupan la recta real densamente, es decir, entre dos números racionales hay infinitos números racionales. Los puntos **no** ocupados por los números racionales están ocupados por los números irracionales.
- La representación de los números reales en la recta numérica permite compararlos, y por tanto, ordenarlos. Que un número real sea mayor que otro significa que está a su derecha en la recta real, y viceversa.

— El conjunto $\mathbb{R}$ está ordenado

Dados dos números reales a y b, se verifica una y solo una de estas condiciones:

$$a > b \quad ; \quad a = b \quad ; \quad a < b$$

Por tanto, en el conjunto de los números reales, además de las operaciones aritméticas ya conocidas, están definidas dos relaciones de orden:

✓ mayor o igual que... ($\geq$), de forma estricta mayor que... (>)
✓ menor o igual que... ($\leq$), de forma estricta menor que... (<)

Las relaciones numéricas que utilizan estos símbolos se denominan **desigualdades** y las relaciones algebraicas correspondientes se llaman **inecuaciones**.

Ej. $7 > 3 \quad (\text{desigualdad}) \quad ; \quad 4x - 1 \geq 5 \quad (\text{inecuación})$

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

① Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma (resta) un número real, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.

$x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + a \leq y + a$

② La suma, término a término, de dos desigualdades del mismo sentido es otra desigualdad del mismo sentido.

$x \leq y \quad , \quad a \leq b \quad \Rightarrow \quad x + a \leq y + b$

③ Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica (divide) por un mismo número **positivo**, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.

$Si \ \ a > 0 \quad entonces \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad x \cdot a \leq y \cdot a$

④ Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica (divide) por un mismo número **negativo**, se obtiene otra desigualdad de **sentido contrario**.

$Si \ \ a < 0 \quad entonces \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad x \cdot a \geq y \cdot a$

⑤ Si a y b no son nulos, la desigualdad de sus inversos es de **sentido contrario**.

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

Escribir $a > 0$ es una forma de decir que a es un número positivo
Escribir $a < 0$ es una forma de decir que a es un número negativo

— Intervalos de extremos a y b

Intervalo cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

Intervalo abierto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

Intervalos semiabiertos o semicerrados:

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\} \quad ; \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

— Semirrectas

Semirrecta cerrada, de origen a : $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$

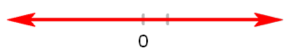
Semirrecta cerrada, de extremo b: $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$

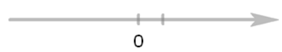
Semirrecta abierta, de origen a : $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

Semirrecta abierta, de extremo b: $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$

Todos los puntos de la recta o ningún punto de la recta real

$$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R} \qquad ; \qquad \{\varnothing\}$$





— Valor absoluto de un número real

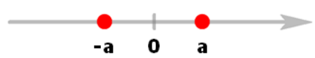
Se llama valor absoluto de un número real x, y se representa por $|x|$ al siguiente número real:

$$|x| = \begin{cases} x & si \ \ x \geq 0 \\ -x & si \ \ x < 0 \end{cases}$$

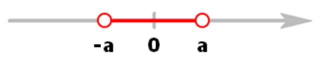
De manera que, el valor absoluto de un número real x coincide con él si es positivo y coincide con su opuesto si es negativo. Gráficamente, el valor absoluto de un número se interpreta como su **distancia** al cero.

$$\forall \quad a > 0 \quad , \quad se \ verifica:$$

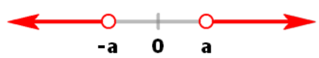
$|x| = a \quad$ equivale a $\quad x = a \ \ ó \ \ x = -a$



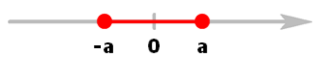
$|x| < a \quad$ equivale a $\quad -a < x < a \ \rightarrow \ x > -a \ \ \mathbf{y} \ \ x < a$



$|x| > a \quad$ equivale a $\quad x < -a \ \ \mathbf{o} \ \ x > a$



$|x| \leq a \quad$ equivale a $\quad -a \leq x \leq a \ \rightarrow \ x \geq -a \ \ \mathbf{y} \ \ x \leq a$



$|x| \geq a \quad$ equivale a $\quad x \leq -a \ \ \mathbf{o} \ \ x \geq a$