¿Has dejado hace poco tu coche en un aparcamiento público? ¿Has visto cuánto cuesta un segundo de estancia? Un precio normal puede ser 0,000534 euros por segundo.

¿Has tomado alguna vez las medidas de tu DNI o de la tarjeta de crédito? Hazlo, y divide el largo entre el ancho. ¿Qué número aparece? Esta cantidad es una aproximación del número áureo, también llamado Φ (phi).

Si realizas la misma operación con la medida del contorno de una lata de refrescos y de su diámetro, es decir, divides lo primero entre lo segundo, también te aparecerá la aproximación a un número muy conocido, π (pi).

La verdad es que pocas veces trabajamos con números enteros. Incluso cuando nos preguntan nuestra edad, y a no ser que ese mismo día cumplamos años, no deberíamos decir que tenemos 32 años. Sería mucho más correcto especificar que nuestra edad es de 32 años, cuatro meses, doce días, 4 horas... Aunque en este caso, y para no aburrir a nuestro interlocutor, lo mejor sería decirle que tenemos 32 años y medio, o si somos algo coquetos, que acabamos de cumplir los 32.

IMG_2547 de **Fotero**, CC by-nc 2.0

Por tanto, en multitud de ocasiones, no es necesario ser muy precisos al expresar una cantidad. Basta con que aproximemos el número, teniendo en cuenta el contexto en que lo estamos utilizando. Aproximar mi edad por 32 años y medio no es ninguna locura, pero decir que mi hija que acaba de cumplir los 4 meses de vida tiene medio año, no es que sea muy correcto.

A lo largo de todo este tema vamos a trabajar con los **números reales**. Este nuevo conjunto se divide en racionales e irracionales. El que un número real pertenezca a uno u otro grupo va a depender de cómo sea su parte decimal.

Los decimales importan, y más desde que se implantó el euro como moneda.

1. Se repite o no

Ya hemos hablado de Φ en la presentación del tema. Este número esconde muchos secretos, relacionados tanto con las matemáticas como con la naturaleza y las artes. En un principio puede parecer un número como otro cualquiera. Está comprendido entre 1 y 2, luego no es muy grande. ¿Qué lo distingue entonces de 1,3 ó 1,6? ¿De dónde viene la fascinación por él desde hace miles de años?

Veamos antes el siguiente vídeo, a ver si salimos de nuestras dudas.

¡Vaya con Φ! Se parece a la protagonista de aquella vieja canción de Cecilia: "sería la novia en la boda, el niño en el bautizo y el muerto en el entierro". Está en todas partes. Hasta en la forma que adoptan las galaxias que componen el Universo parece intervenir ese simple 1,61803...

De desarrollos decimales hablaremos en este punto. De cómo la forma en que se distribuyen las cifras decimales influye en la naturaleza de un número.

1.1. Decimales, racionales, irracionales: Reales

La Tierra donde vivimos, la Luna que gira a nuestro alrededor, el balón alrededor del que giran la mirada y el ocio de millones de aficionados en todo el mundo, y multitud de objetos tanto de la naturaleza como creados por el ser humano tienen forma esférica, o utilizando un lenguaje coloquial, son redondos.

La rueda, sin duda uno de los grandes inventos de la humanidad, es una circunferencia. El uso de la rueda para el transporte, para girar en las norias y elevar el agua o batir las semillas en los molinos. No nos puede extrañar que desde muy pronto el ser humano se fijara en la circunferencia y se preguntara por la relación que existe entre el perímetro y el diámetro. De esa relación surgió uno de los números más famosos y conocidos por todas las civilizaciones: **π**.

Para convencerte de que es cierto lo que hemos dicho, disfruta de este vídeo.

Como has podido comprobar, a lo largo de la historia de la humanidad ha existido la necesidad de conocer el desarrollo decimal de π. Algunas han sido aproximaciones muy pobres, como la que aparece en los textos bíblicos. Pero otras, y sobre todo a partir del siglo XVI con el desarrollo del cálculo infinitesimal, muy buenas .

La siguiente autoevaluación nos va a servir para repasar algunas de estas aproximaciones.

Comprueba lo aprendido

Rellena los espacios en blanco con las cantidades y cifras que aparecen en el vídeo anterior.

a) La peor aproximación de π corresponde a Salomón, en el 900 a.c., que lo expresa como la fracción ____ / ____ .

b) Hacia el 1.700 a.c., en Babilonia, se escribía π como la fracción 25/8, que es igual a ____ , ____ .

c) En Egipto, allá por el 1.650 a.c., se pensaba que π podía ser igual a (____ / ____)^2= 3,16.

d) Arquímedes, ya en el 250 a.c., puso a π entre los siguientes valores: 3, ____ > π > 3, ____ .

e) El sabio chino Chung Chih, en el siglo V de nuestra era, lo aproximó como ____ / ____ = 3,141592.

Enviar

Vuelve a ver el vídeo si algunas de las cifras no es la correcta.

Todas las aproximaciones que se pueden dar de π vienen escritas como números decimales con una cantidad determinada de cifras decimales o una fracción, es decir, un cociente de números enteros.

Pero por muchas cifras que se conozcan, ninguna aproximación será exactamente π. Porque su desarrollo decimal no sigue ninguna regla. Igual ocurre con Φ, la forma en que aparecen sus decimales no cumple ninguna norma.

Aquí tienes escrito **Φ** con 30 cifras decimales. ¿Sabrías decir cuál es la que ocupa el lugar 31?

1,618 033 988 749 894 848 204 586 834 365 ...

Importante

Los **números irracionales** son aquellos que poseen un desarrollo decimal con infinitas cifras decimales no periódicas. Un número irracional **nunca** se puede expresar como una fracción o cociente de números enteros. Por ejemplo π, $\sqrt{2}$ y en general cualquier raíz cuadrada de un número natural que no sea cuadrado perfecto, son números irracionales.

Los **números racionales** son aquellos que tienen un desarrollo decimal finito, o infinito periódico. Es decir, en algún momento las cifras decimales se repiten. Un número racional **siempre** se puede escribir como una fracción o cociente de números enteros. Por ejemplo, la aproximación tan buena que dio Francoise Vieta de π 3,1415926536 o la de los chinos $\frac{385}{113}$, son números racionales.

Al conjunto de los racionales e irracionales es lo que denominamos números **reales**. Que para simplificar se expresa con una **R**.

Ejercicio resuelto

Dos aproximaciones a Φ son 1,618 y $\frac{161}{100}$. Indica a qué conjunto numérico pertenece cada uno de los números anteriores, es decir, si son racionales o irracionales.

1,618 y $\frac{161}{100}$ son racionales, pues el primero es un decimal exacto y el segundo es una fracción.

Φ es irracional puesto que es un decimal con infinitas cifras decimales no periódicas.

Curiosidad

Los nombres de racionales e irracionales viene de las matemáticas griegas. Racional tiene su origen en **razón**, que no tiene otro sentido más que **proporción** o división. Un número racional es el que se puede expresar como proporción de dos números enteros. Por tanto, un irracional es el número que no se puede escribir como el cociente de dos enteros.

Para entender mejor la diferencia entre racionales e irracionales, veamos la imagen que propone el profesor **Fernando Corbalán**: "si asignamos un sonido a cada cifra y hacemos *sonar* los decimales de un racional, escucharíamos una melodía que se va repitiendo, como el estribillo de una canción. En el caso de los números irracionales las notas sonarían sin ton ni son, y no podríamos obtener jamás una melodía".

Burgos´09 Covarrubias libro de música medieval, de **ferlomu**, CC by-nc-sa 2.0

Comprueba lo aprendido

Veamos si has entendido bien los conceptos de número racional, irracional y real. Responde si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\sqrt{5}$ es racional

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso
Ten en cuenta que es la raíz cuadrada de un número natural que no es cuadrado perfecto.

b) $\frac{5}{3}$ es racional.

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Verdadero
Fíjate bie, es una fracción de dos números enteros

c) 3,242424... es un número irracional.

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso
Observa que es un número decimal con infinitas cifras periódicas.

d) Todos los números anteriores son reales.

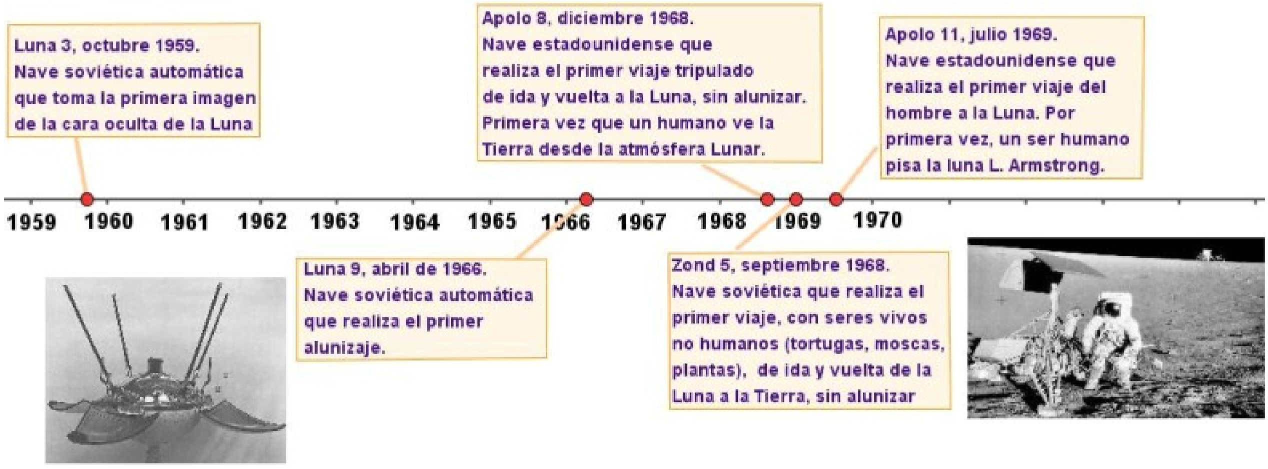
Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Verdadero
Los reales son todos los racionales e irracionales.

1.2. Recta real

Una herramienta muy útil para exponer de manera secuencial los hechos importantes que dieron forma a un suceso histórico, es utilizar una **línea del tiempo**. Por ejemplo, observemos la siguiente imagen en donde se presentan varios hitos importantes de la aventura espacial que desembocaron con la llegada del hombre a la Luna.



Las dos imágenes corresponden a Luna 9 landing cápsule y Surveyor 3 Apollo 12, tomadas de **Wikipendia** con licencia Dominio Público

Del mismo modo que una línea del tiempo facilita la visión sobre un acontecimiento histórico, representar los números reales en una recta, ayudará a entender mejor determinadas propiedades de este conjunto numérico, como pueden ser el orden y la distancia entre ellos.

Reflexiona

Trabaja la siguiente situación construida con Geogebra. Sitúa el punto sobre su lugar en la recta real. Cuando la ubicación sea la correcta, aparecerá un mensaje de felicitación. Para cambiar de número, pulsa sobre el icono situado en la parte superior derecha.

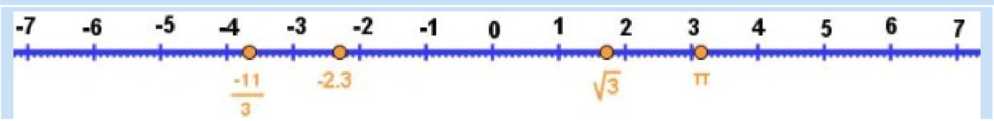
Debes ser preciso a la hora de situar el punto sobre el número real que se indica.

Importante

Llamaremos **recta real** a una recta graduada en la que se fija como origen el número 0, se determina una unidad y se van colocando los números positivos hacia la derecha y los negativos a la izquierda.

Cada número real ocupa un lugar en la recta real, y viceversa, cada punto de la recta real está ocupado por un número real.

En la siguiente imagen, aparecen representados varios números reales.



En el **Importante** anterior, podemos ver que $\sqrt{3}$ es menor que π , o que -2,3 es mayor que $-\frac{11}{3}$. Es decir, representar números en la recta real permite ordenar de una forma muy gráfica dichos números.

Recuerda los signos que se utilizan en matemáticas para expresar el orden: <, >, $\leq$ y $\geq$. Por ejemplo, escribimos $\sqrt{3}<\pi$ o $-2.3>-\frac{11}{3}$.

TrainRaisPresblog por **Julie70**, CC by-nc-sa 2.0

Reflexiona

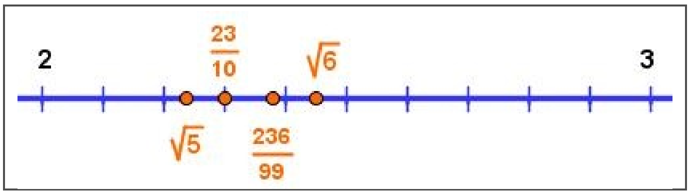
En la siguiente escena de Descartes, creada por el profesor Miguel Ángel Cabezón, es posible representar en la recta real números racionales expresados por una fracción, por ejemplo 7/3 u 8/11, y raíces de números reales, que escribiremos sqrt(r), donde r es el número real. Por ejemplo sqrt(3) ó sqrt(11).

El número real que deseemos representar lo escribiremos en la ventana que está a la derecha de **Número**. También podemos usar el control **zoom** para acercarnos o alejarnos de la recta real.

Ayúdate de esta escena para ordenar y representar de forma aproximada los siguientes números:

$$\frac{236}{99},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6}\ \text{y}\ \frac{23}{10}$$

La representación quedará más o menos de la siguiente forma.



Por tanto, se tiene que: $\sqrt{5} < \frac{23}{10} < \frac{236}{99} < \sqrt{6}$

Para saber más

En la autoevaluación anterior hemos representado números reales en la recta real de forma aproximada. En el siguientes enlace al Proyecto EDAD, se explica cómo podemos representar con más exactitud los números racionales escritos como fracción, y los irracionales que vengan expresados como raíz cuadrada de un número natural que no sea cuadrado perfecto.

Marani de **onicófago**,

Cuando vamos a comprar frutas o verduras y pedimos un kilo o tres cuartos de algún producto, si nos fijamos bien en la cantidad que marca la balanza, casi nunca el frutero coloca la cantidad exacta de la mercancía que hemos solicitado. "Pasa un poco del kilo", nos dice el comerciante; o "le faltan 35 gramos para los tres cuartos".

"Nos vemos a las siete y media en la puerta del cine", y nadie llega a la hora exacta a la cita. Muy pocos llegarán unos minutos antes, y casi todo el mundo con algo de retraso.

Si lo piensas bien, existen muchas situaciones en nuestra vida cotidiana en donde utilizamos los números de manera aproximada. Lo mismo ocurre con los números decimales, ante la imposibilidad de operar con ellos utilizando todo su desarrollo decimal lo que hacemos es aproximarlos y quedarnos con tan sólo unas cuantas cifras de dicho desarrollo. Además, en la vida real no es necesaria mucha precisión, basta con 2 ó 3 decimales.

Importante

Dos maneras de aproximar un número decimal son el **truncamiento** y el **redondeo**.

Una aproximación por **truncamiento** consiste en suprimir todos los decimales a partir de una cierta cifra.

Es decir, si el truncamiento se hace a la cuarta cifra decimal, a partir de ella suprimimos el resto del desarrollo decimal. Por ejemplo, aproximar π como 3,1415 es realizar un truncamiento a la cuarta cifra decimal.

Una aproximación por **redondeo** consiste en suprimir todos los decimales a partir de una cierta cifra, teniendo en cuenta que si la primera cifra que se suprime es mayor o igual que 5, se aumenta en una unidad la última cifra de la aproximación.

Por ejemplo, si queremos aproximar por redondeo a la cuarta cifra decimal los números 2,63636363... y Φ= 1,618033... obtendríamos 2,6364 y 1,6180 respectivamente.

Comprueba lo aprendido

Recordemos las diez primeras cifras decimales de nuestro querido número Φ= 1,6180339887.

Completa en la siguiente tabla los espacios en blanco correspondiente a las **aproximaciones de Φ** que se indican.

	Truncamiento	Redondeo
a la 3ª cifra decimal	1,	1,
a la 6ª cifra decimal	1,	1,
a la 8ª cifra decimal	1,	1,

Enviar

Recuerda, truncar es suprimir el resto de cifras decimal. Redondear aumenta una unidad la última cifra de la aproximación si la primera que se suprime es mayor o igual que 5.

Puede ser que te hayas dado cuenta que al aproximar un número por truncamiento, obtenemos siempre un número más pequeño. Cuando esto ocurre, es decir, la aproximación es menor que el número aproximado, la llamaremos una aproximación por **defecto**. En caso contrario, cuando es mayor, se dirá que es por **exceso**.

Un aspecto muy importante que hay que tener en cuenta en el proceso de aproximar un número, es el control del **error** cometido. Veamos con un ejemplo, qué queremos decir con esto.

Ejercicio resuelto

Pastillas de **juanpol**, CC by 2.0

Veamos un caso práctico. En el prospecto de unas cápsulas se indica que cada gramo del medicamento contiene 0,00285 gramos de **ácido bórico** y 0,00015 gramos de **tetraborato de sodio**.

En un control de calidad farmacéutico, se toma una muestra de una de las cápsulas y se detecta que cada gramo de la medicina contiene 0,0031 gramos de ácido bórico y 0,00013 gramos de tetraborato.

a) En uno de los casos el error es por exceso, supera a la cantidad fijada, y en el otro es por defecto, está por debajo. ¿cuál es uno y cuál es el otro?

b) ¿En cuál de los dos componentes la diferencia entre la cantidad indicada en el prospecto y la detectada en el tubo es mayor?

a) En el caso del ácido bórico el error es por exceso, puesto que $0{,}0031>0{,}00285$. Y para el tetraborato es por defecto, ya que $0{,}00013<0{,}00015$.

b) Hallamos en ambos casos la diferencia entre la cantidad indicada y la detectada:

$$|0{,}0031-0{,}00285| = 0{,}000250$$

$$|0{,}00013 - 0{,}00015| = |-0{,}00002| = 0{,}00002$$

Para poder comparar, se considera el valor absoluto de la diferencia. En nuestro caso, es mayor la diferencia del ácido bórico.

Importante

Se denomina **error absoluto** a la diferencia entre el valor real de un número y su aproximación. Se suele tomar el valor absoluto de dicha diferencia.

Los errores absolutos cometidos en las muestras detectadas de la pomada son 0,000250 para el ácido bórico y 0,00002 en el tetraborato.

Reflexiona

En la siguiente escena creada por Jesús Fernández Domínguez con Geogebra aparecen un número y una aproximación a él. Halla el error absoluto de varias aproximaciones y comprueba si tus cálculos son correctos. Para generar otro número y otra aproximación a él, pulsa sobre el icono de la parte superior derecha de la escena.

Para comprobar si tus operaciones son correctas, pulsa en la casilla de verificación.

El error absoluto de una aproximación puede resultar a veces engañoso si lo que deseamos es comparar entre dos aproximaciones a números de diferente magnitud. Dicho de otra forma, comparativamente, y teniendo en cuenta el tamaño de cada uno de los componentes de la pomada, qué error es mayor: ¿una diferencia de 0,00025 gramos respecto de 0,00285 ó de 0,00002 gramos respecto de 0,00015?

En el primer caso la proporción sería de $\frac{0{,}00025}{0{,}00285}=0{,}08771$, es decir de un 0,08 gramos por cada gramo de ácido bórico. Por tanto, de un 8%.

En el segundo componente la proporción sería de $\frac{0{,}00002}{0{,}00015}=0{,}13333$, lo que implica una diferencia de 0,13 gramos por cada gramo de tetraborato. Un 13% de error.

Está claro que el error relativo del segundo componente es mayor, y en la mayoría de las ocasiones ese dato es el que importa.

Importante

Se define **error relativo** de una aproximación a un número como el cociente entre el error absoluto y el valor del número. El error relativo se puede expresar en tanto por uno o en tanto por ciento.

En el ejemplo de la pomada, 0,087 es el error relativo del primer componente, y 0,133 es el error relativo del segundo.

Reflexiona

Una industria dedicada a la elaboración de material de bricolaje, fabrica tornillos de 2,58 cm de longitud. El departamento de control mide la longitud de uno de cada mil tornillos que fabrica para estudiar el error que se comete y ver si la máquina es fiable. En la siguiente escena aparece una imagen con el tornillo estándar, y otra con cada uno de los tornillos medidos. Halla el error relativo que se comete en cada uno de ellos. Para generar otro tornillo, pulsa sobre el icono de la parte superior derecha de la escena.

Para comprobar si tus cálculos son correctos, pulsa en la casilla de verificación.

Para saber más

En el apartado 2 de este enlace al proyecto Edad puedes repasar los conceptos que hemos desarrollado anteriormente.

La luna no siempre está a la misma distancia de nosotros.

En el momento en el que se encuentra más próxima (perigeo) está a unos 357.448 Km aproximadamente. Desde aquí, se aleja hasta unos 405.363 Km (apogeo).

Es decir, la luna se mueve en un **intervalo** que va de los 357.448 a los 405.363 Km.

Además, ¿sabías que en el ranking por países de viajes al espacio, Japón se encuentra a dos puestos del lugar que ocupa la Agencia Espacial Europea (ESA)?

Tal y como está expresado este último dato, no podemos asegurar cuál de los dos está por encima en el ránking. Sólo nos ha interesado saber la **distancia** entre ambos puestos, es decir, el **valor absoluto** de su diferencia.

Vamos a profundizar más en estos tres conceptos: intervalo, distancia y valor absoluto.

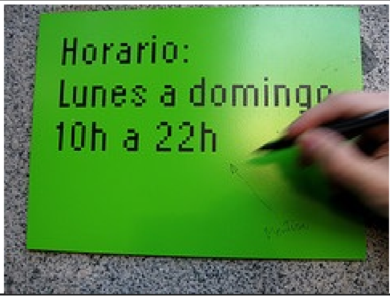
lunar a&p de **oceandesetoiles**, CC by-nc-sa 2.0

Puede que alguna vez, al ir a comprar unas entradas, te hayas encontrado con una lista de precios como ésta:

Infantil (de 0 a 12 años)	5 €
Joven (de 12 a 18 años)	9 €
Adulto (mayores de 18 años)	15 €

En nuestra vida diaria establecemos muchos límites: de edad, de velocidad, por precios, alturas, horarios... Y en ocasiones no está del todo claro si el límite que establecemos forma parte de una categoría u otra (por ejemplo, un chico de 12 años que comprara una entrada del caso anterior ¿sería entrada infantil o joven?)

En Matemáticas tenemos una herramienta muy útil para hacer referencia a los conjuntos que queremos establecer. Mira los siguientes ejemplos:

<table>
<tr><td>Horario de apertura:</td><td>Límite de velocidad:</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mentira de fluzo, CC by 2.0</td><td>minimum speed limit de TheTruthAbout, CC by-sa 2.0</td></tr>
<tr><td>El intervalo [10 ; 22] indica que estamos considerando cualquier hora entre las 10h y las 22h, incluyendo ambas.</td><td>Con el intervalo [40 ; 75] decimos que estamos obligados a conducir a una velocidad que esté entre 40 y 75 km/h. No nos vale ningún valor por debajo de 40 ni por encima de 75.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Altura mínima:</td><td>Altura máxima:</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>This High de LarimdaME, CC by-nc 2.0</td><td>Imagen de Iván Santiesteban, CC by 2.0</td></tr>
<tr><td>Para subir en esta atracción debes medir como mínimo 1,20m. Podríamos expresarlo como el intervalo [1,20 ; +∞), aunque es evidente que no tiene mucho sentido incluir alturas superiores a 2,60 o 2,70m.</td><td>En este aparcamiento podría entrar cualquier vehículo que tenga entre 0 y 2,30m de altura. Sería el intervalo [0 ; 2,30].</td></tr>
</table>

Ya que tienes una idea básica, en el siguiente enlace (que pertenece a la EDAD) vas a aprender qué son los intervalos y qué tipos hay. De las pestañas superiores, sólo tienes que fijarte en la de "**Contenidos**", que es la que se presenta a continuación. Pulsa el icono de la flecha naranja para avanzar:

Intervalos

También te ofrecemos este documento (perteneciente a la web 3con14), en el que puedes encontrar resumidos y ordenados los contenidos más importantes sobre intervalos:

Importante

Para no confundir la coma de los decimales con la coma que separa los números en el intervalo, separaremos los extremos del intervalo con un punto y coma. Es decir, el intervalo abierto de los números entre 0,6 y 1,9 será (0,6 ; 1,9).

Ejercicio resuelto

Escribe como intervalo los siguientes conjuntos de números reales:

a) Los números que están entre 3 y 10:

Como no nos indican que el 3 y el 10 sean parte del conjunto, nuestro intervalo es **(3 ; 10)**. Es decir, son los números x que cumplen: 3 < x < 10.

b) Los números mayores que 0 y menores o iguales que 8,5:

El 0 no está incluido, pero el 8,5 sí. Por tanto el intervalo estará abierto en 0 y cerrado en 8,5: **(0 ; 8'5]**. Este intervalo está formado por los números x que cumplen: 0 < x ≤ 8,5.

c) Los números menores que 2/3:

La fracción 2/3 no está incluida, y recuerda que +∞ y -∞ siempre van abiertos, luego será el intervalo **(-∞ ; 2/3)**. Este intervalo está formado por los números x que cumplen: x < 2/3.

Comprueba lo aprendido

¿Cuál es el intervalo que representa los números que cumplen 2 ≤ x < 5?

- ○ [2 ; 5]
- ○ (2 ; 5)
- ○ [2 ; 5)

Incorrecto

Incorrecto

Opción correcta

Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)
3. Opción correcta (Retroalimentación)

Indica qué intervalo representa a los números mayores que -2:

- ○ (-2 ; +∞)
- ○ (-2 ; +∞]
- ○ (-∞ ; -2)

Opción correcta

Incorrecto

Incorrecto

Solución

1. Opción correcta (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)
3. Incorrecto (Retroalimentación)

Indica cuál de los siguientes números pertenecen al intervalo [3,26 ; 3,42):

- ○ 3,423
- ○ 3,31
- ○ 3,2

Incorrecto

Opción correcta

Incorrecto

Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Opción correcta (Retroalimentación)
3. Incorrecto (Retroalimentación)

Para saber más

Con los intervalos podemos hacer algunas operaciones:

a) Unión ($\cup$): al unir dos intervalos, consideramos los números que están en uno u otro intervalo:

$$[1,4]\cup(3,5)=[1,5)$$

b) Intersección ($\cap$): la intersección de dos intervalos consiste en quedarse con los números que están en los dos a la vez:

$$[1,4]\cap(3,5)=(3,4]$$

2.96' de **ap.**, CC by-nc 2.0

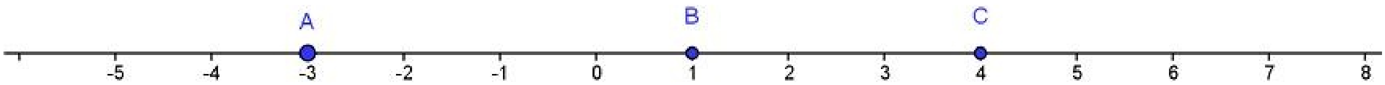
El ser humano, desde el comienzo de la historia, ha tenido la necesidad de **medir** para mejorar sus condiciones de vida: medir el tiempo, las distancias, el peso del producto que tenía que vender...

En todos estos casos, lo que realmente estaba haciendo era medir distancias entre los números de la recta real.

Mueve los puntos A y B y observa cómo varía la distancia.

¿Cómo medimos esa distancia? Es algo muy intuitivo: sólo tienes que restar los números para ver la diferencia entre ambos.

Veamos las distancias en el siguiente ejemplo:



a) Entre B y C: de 1 a 4 hay 3 unidades, que se corresponde con la operación 4 - 1 = 3.

b) Entre A y C: de -3 a 4 hay 7 unidades, que se corresponde con la operación 4 - (-3) = 4 + 3 = 7.

Comprueba lo aprendido

Completa los huecos con el valor correspondiente:

a) El punto más alto de la tierra es el Everest (8844 m) y el más bajo es la Fosa de las Marianas (10924 m bajo el nivel del mar). La distancia que los separa es de ______ m.

b) Una persona comprueba su cuenta bancaria. En enero tenía 326€, y en febrero tiene -54€. La diferencia entre ambos meses es de ______ €.

c) Julio César nació en el año 100 a.C. y murió el 44 a.C. ¿Cuántos años vivió? ______ años.

d) En el desierto del Sahara podemos pasar de los 57,7 ºC a unas temperaturas bajo cero de -23,9 ºC. La diferencia es de ______ ºC.

Enviar

a) Las medidas bajo el nivel del mar se dan con signo negativo: Fosa de las Marianas = -10924m. Luego la distancia es 8844 - (- 10924) = 19768.

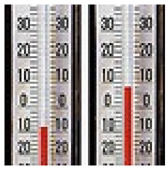
b) 326 - (-54) = 326+54= 380.

c) Los años a.C. se representan con números negativos: -44 - (-100) = -44 + 100 = 56.

d) 57,7 - (-23,9) = 81,6.

3.3. Valor absoluto

Ya que has medido distancias en la recta real, te habrás dado cuenta de que si nos ponemos a medir por ejemplo desde el 0, hay dos números que están a 9 unidades de él, que son el 9 y el -9.



Termometri de **aldoaldoz**, CC by-nc-sa 2.0

Ambos números comparten un mismo valor (su distancia al cero), pero tienen distinto signo. A ese valor es al que llamamos **valor absoluto**.

Importante

El valor absoluto de un número real es el valor numérico, prescindiendo del signo. Lo expresamos poniendo el número entre dos barras verticales.

Valor absoluto de 4: $|4|=4$

Valor absoluto de -3,14: $|-3{,}14|=3{,}14$

Ejercicio resuelto

Calcula los números reales cuyo valor absoluto es 2,9.

Si llamamos x a ese número, |x| = 2,9. Sólo tenemos dos opciones: x = 2,9 ó x = -2,9.

Calcula los números reales cuyo valor absoluto es 0.

El valor absoluto consiste en prescindir del signo, pero en este caso no importa que le pongamos signo positivo o negativo pues sólo hay una solución posible: x = 0.

Calcula los números reales cuyo valor absoluto es -3.

Si hemos dicho que para hallar el valor absoluto tenemos que prescindir del signo, es imposible que un valor absoluto valga -3. No hay solución.

Vamos a unir los tres conceptos que hemos aprendido en este *"Abierto (o cerrado) hasta el amanecer".*

Podemos preguntarnos qué números reales tienen, por ejemplo, **valor absoluto** menor que 2. Nos valdría el -1'9, el -0'6, el 0, el 1... es decir, todos los números que están entre -2 y 2. Es más, ni el 2 ni el -2 nos valen, pues su valor absoluto es exactamente 2. Recuerda que esto lo habíamos expresado como un **intervalo**: (-2 ; 2).

Es decir, los números que cumplen |x| < 2 son los del intervalo (-2 ; 2).

En la siguiente animación, puedes resolver el problema |x| < k moviendo el deslizador rojo. Mira cómo cambia la solución.

Si buscamos los números reales que están a menos de 2 unidades de **distancia** del 5, lo que queremos es encontrar un número que, al restarle 5, obtengamos un valor menor que 2. Para que al restar no nos afecte el signo, consideramos su valor absoluto, y así el signo desaparece. Piénsalo: los números que buscamos van desde el 3 hasta el 7, o lo que es igual, son los números del intervalo (3 ; 7).

Los números que cumplen $|x-5| < 2$ son los del intervalo (3 ; 7).

En la siguiente animación puedes resolver el problema $|x - a| < k$ moviendo los deslizadores verde y rojo. Mira cómo cambia la solución.

Para realizar esta Autoevaluación puedes ayudarte de las animaciones anteriores poniendo los valores que te convengan.

Comprueba lo aprendido

¿Qué números tienen valor absoluto 3,5?

☐ 3,5

☐ (-3 ; 3)

☐ -3,5

☐ 0

Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto
4. Incorrecto

¿Qué números están a una distancia menor o igual que 4 del número 1?

☐ (-4 ; 1)

☐ [-3 ; 5]

☐ (-3 ; 5)

☐ [-4 ; 1]

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

¿Qué números tienen valor absoluto mayor que 6?

☐ Los que están entre -6 y 6.

☐ Los mayores que 6.

☐ 6 y -6.

☐ Los mayores que 6 y los menores que -6.

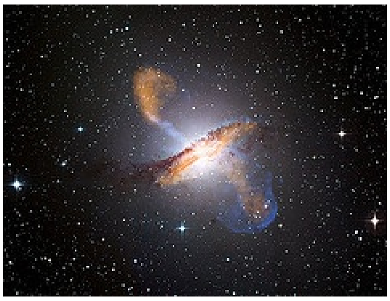
Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto

3. Incorrecto
4. Correcto

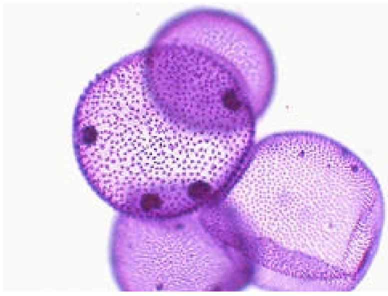
En nuestra vida diaria, podemos trabajar con medidas de objetos o distancias entre ciudades sin que ello nos suponga ninguna dificultad. En algunos casos, para que las cifras sean más manejables, decidimos utilizar centímetros en lugar de metros, o toneladas en lugar de gramos. Pero, ¿qué pasa si estas cifras comienzan a hacerse demasiado grandes o demasiado pequeñas?

Distancias Astronómicas...



A Black Hole Overflows (NASA, Chandra, 2/2/09)
de **nasa1fan/MSFC**, CC by-nc-nd 2.0

... y medidas microscópicas



25c de **uafcde**, CC by-nc-sa 2.0

Ya sabemos que la distancia media entre la Tierra y la Luna es de 384.400 km, que dentro de lo que cabe es una medida con la que podemos trabajar. Pero si seguimos adentrándonos en el campo de la Astronomía, veremos que, por ejemplo, la distancia media entre el Sol y Plutón es de 5.913.520.000 km, o que estamos a 4.162.400.000.000.000 km de las Pléyades.

No hay que irse tan lejos. El grosor de un cabello es de 0,08 mm, que es mucho mayor que los 0,0075 mm que mide un glóbulo rojo o por supuesto que los 0,000000000001 mm del protón.

En el siguiente video puedes ver cómo varían estas distancias en nuestro mundo. Ve fijándote en la potencia que aparece a la derecha de la imagen.

Para que podamos trabajar con estas cifras de una forma más fácil, vamos a ver qué es la **notación científica**. En la siguiente aplicación, desarrollada por Roger Rey y Fernando Romero, lee los apartados "Potencias de 10" y "Notación Científica". Antes de pasar a las actividades, puedes practicar en el apartado "Pequeño taller".

Comprueba lo aprendido

Vamos a pasar las cantidades que comentamos en la introducción a **notación científica**. Rellena los huecos en blanco con los números adecuados.

- La distancia media entre el Sol y Plutón es de 5.913.520.000 km, que en notación científica son 5,91352 · 10 ☐ km.
- La distancia de la Tierra a las Pléyades es de 4.162.400.000.000.000 km, es decir, 4,1624 · 10 ☐ km.
- El diámetro de un glóbulo rojo mide 0,0075 mm. En notación científica sería ☐ · 10^{-3} km.
- Un protón mide 0,000000000001 mm de diámetro, es decir, 1 · 10 ☐ mm.

Enviar

Usando las propiedades de las potencias que viste en la Unidad 1, podemos hacer operaciones con números escritos en notación científica. Mira los siguientes ejemplos antes de resolver la actividad propuesta.

Ejercicio resuelto

$(4 \cdot 10^5) \cdot (2,1 \cdot 10^9) =$

$= 4 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^9 = 8,4 \cdot 10^{14}$

$(6,1 \cdot 10^{12}) \cdot (3,2 \cdot 10^{-4}) =$

$= 6,1 \cdot 3,2 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-4} = 19,52 \cdot 10^8 = 1,952 \cdot 10^9$

En el último paso hemos pasado el número a notación científica, pues 19,52 no es válido por tener dos cifras en la parte entera.

$(5,85 \cdot 10^{-4}) : (1,5 \cdot 10^6) =$

$= (5,85 : 1,5) \cdot (10^{-4} : 10^6) = 3,9 \cdot 10^{-10}$

Comprueba lo aprendido

Elige si las siguientes igualdades o afirmaciones son verdaderas o falsas.

La notación científica de 154000 es $1{,}54 \cdot 10^{5}$

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Verdadero
Es verdadero porque tenemos que avanzar 5 cifras a la derecha desde la coma para conseguir nuestro número inicial.

La notación científica de 0,0024 es $0{,}24 \cdot 10^{-2}$

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso
Es falso, porque para que un número esté escrito en notación científica, la parte entera debe ser un número de 1 a 9, y en este caso es 0.

$(4{,}5 \cdot 10^{6}) \cdot (2 \cdot 10^{-10}) = 9 \cdot 10^{-4}$

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Verdadero

$(8{,}1 \cdot 10^{78}) : (2{,}7 \cdot 10^{14}) = 3 \cdot 10^{92}$

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso
La respuesta correcta es $3 \cdot 10^{64}$

Importante

En tu calculadora puedes usar la tecla EXP para hacer operaciones con notación científica.

Para escribir $2{,}4 \cdot 10^{8}$, tendrías que pulsar 2 · 4 EXP 8

Para hacer la última operación de la autoevaluación, tendrías que pulsar las siguientes teclas:

8 · 1 EXP 7 8 ÷ 2 · 7 EXP 1 4 =

Comprueba la solución que obtienes de esta forma.