2º de Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

Análisis II: Problemas de optimización

1. Introducción

Imagen de cineveo.com bajo licencia Creative Commons

No sabemos si recordarás una película con este título del año 97 protagonizada por Jack Nicholson y Helen Hunt, ambos ganaron el Oscar a mejor actor y mejor actriz con ella, por lo que si no la has visto, te recomendamos que lo hagas. *"Mejor... imposible"* cuenta la historia de un escritor de novelas románticas, Melvin Udall, que sufre un desorden obsesivo que le hace intratable ante el resto de la humanidad. Su humor es ácido y corrosivo, a pesar de ello Melvin se enorgullece de su forma de ser.

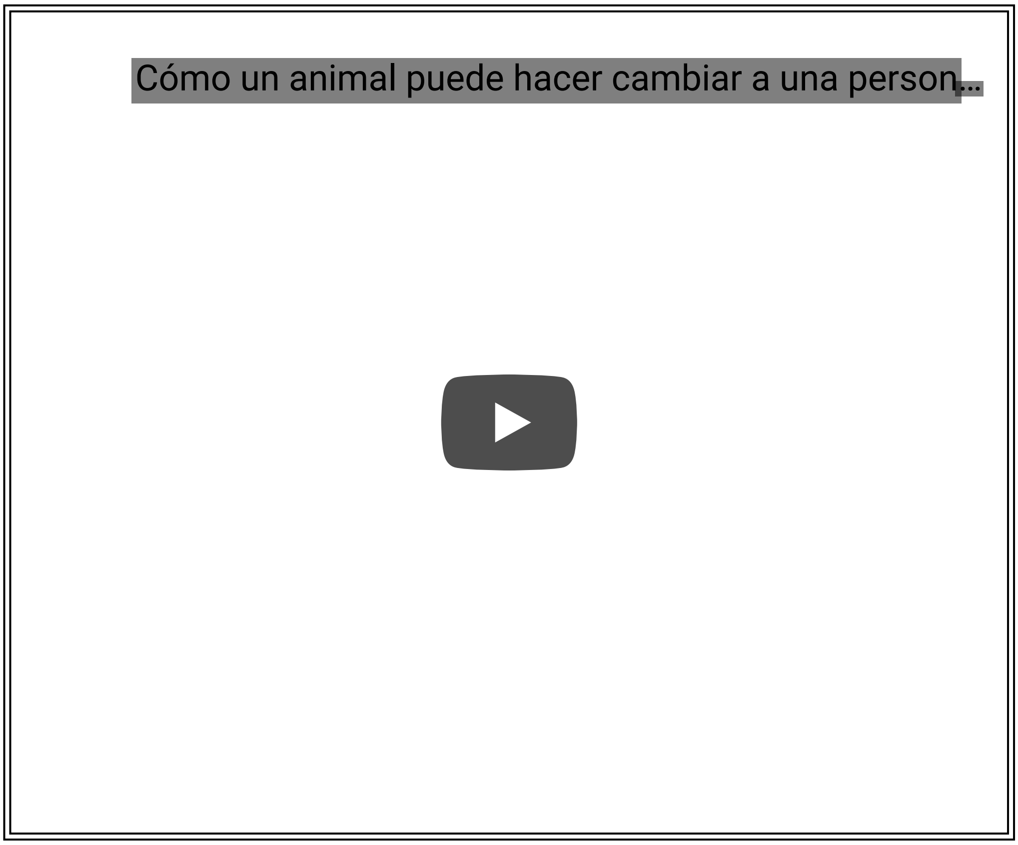
Sin embargo, en su vida cotidiana, hay dos personas con las que se relaciona de forma más o menos habitual: su vecino de enfrente, el artista homosexual Simon Bishop (Greg Kinnear), su perro (Verdell) y Carol Connelly (Helen Hunt), la única camarera que es capaz de soportar su sarcasmo y malos modales en el restaurante al que acude a comer a diario.

Al final Melvin, con la ayuda de Simon con el se acaba haciendo amigo, acaba con la chica ya que poco a poco el amor que siente por Carol hace que se vaya olvidando de sus obsesiones. Pues eso, mejor... imposible.

En nuestra vida, continuamente estamos buscando la mejor opción. La compra más barata, la gasolina más eficiente, el taller más rápido, el mejor restaurante... En muchos casos el matiz es un poco subjetivo, pero en otras todo puede quedar perfectamente modelizado y fijado, y ahí es cuando entramos nosotros.

Ya en la primera unidad resolvimos cuestiones como estas, ¿recuerdas el tema de la programación lineal? Pues bien, en este tema vamos a ver una de las mejores aplicaciones que tiene la derivada, que es la de optimizar una función, es decir, encontrar el mejor valor de la función bajo ciertas condiciones. Ya en el tema anterior has visto que cuando se investigaba el crecimiento o decrecimiento de una función, también salían de forma inmediata los máximos y los mínimos relativos de la función. En este tema lo vamos a hacer un poco distinto, calculando directamente esos máximos o mínimos.

A lo largo del tema te vamos a presentar algunos ejemplos y seguro que con ellos vas a entender el proceso que hay que seguir para resolver estas cuestiones. Para empezar y relajarnos un poco, te ponemos un fragmento de la película.



Cómo un animal puede hacer cambiar a una persona...

Vídeo alojado en Youtube

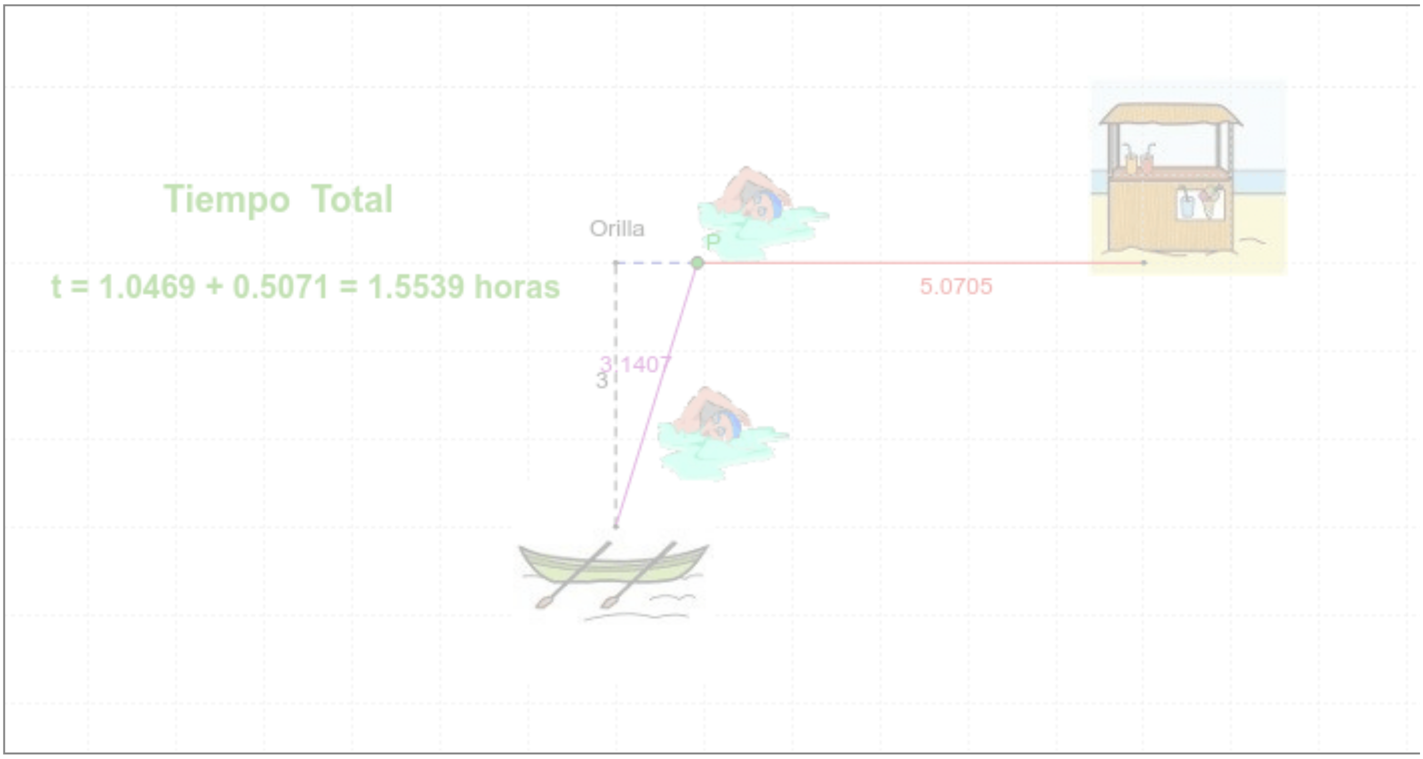
1. Etapas en la resolución de problemas de optimización

Para empezar te vamos a proponer un juego:

La mayor afición de Martín cuando sus vacas y sus cultivos lo dejan, es la natación y la navegación. En cierta ocasión se encontraba pescando con un grupo de amigos en el mar y de buenas a primeras sintió la inmensa necesidad de refrescarse con una cerveza fresquita en el chiringuito más próximo, pero el problema está que la playa la tiene a 3 km justo enfrente y el chiringuito está a 6 km más a la derecha.

Martín que se encontraba en plena forma, no se lo pensó y pese a la distancia se echó a nadar, pero antes pensó un poco la situación. Podría nadar en línea recta y después andar por la playa, o más corto, nadar directamente hasta el chiringuito, pero claro, Martín, como cualquier persona, no nada igual de rápido que corre sino que es capaz de nadar a 3 km/h pero puede correr a 10km/h. Así que, la cuestión es que en que punto de la playa debe llegar Martín nadando para tomarse cuanto antes la cervecita.

En la siguiente animación, puedes ver la situación. El punto verde P indica el punto de la playa donde llega Martín y puedes moverlo a lo largo de la misma. Cuando lo haces, ves en morado la distancia que nada, en rojo la distancia que corre por la playa, y a la izquierda, ves que el tiempo total cambia, pues van cambiando las distancias anteriores. Es evidente que aquí la **mejor** opción es la que reporta un tiempo **mínimo**, así que, ¿cuál es? Mueve el punto P y descúbrelo.



Applet GeoGebra modificado del original de Manuel Sada bajo licencia Creative Commons.

Importante

Optimizar una función f(x), consiste en encontrar el valor o valores de x que hacen que la función tome el valor máximo o mínimo en un intervalo bajo ciertas condiciones.

Sabes, quizás esta aventura de Martín en busca del chiringuito es demasiado complicada de resolver para empezar. Vamos a fijarnos en otra situación a la que también tiene que hacer frente Martín, esta vez en compañía de su amigo Felipe, para explicar de forma clara cómo se resuelven estas cuestiones.

La finca que regentan, *"La Alfonsita"*, tiene una zona donde el límite es un arroyo. Pues bien aprovechando ese límite, quieren vallar un trozo de tierra para sembrar lechugas y coles y con el fin de que las cabras no puedan entrar. Para aprovechar mejor el terreno, quieren que esa parcela sea rectangular, y claro, el lado que linda con el arroyo no habría que vallarlo. Además, en una nave tienen guardado un rollo de valla de aproximadamente 300 metros y estiman que con esa cantidad es suficiente para el terreno que quieren dedicar a las lechugas y coles

Y ahora la pregunta que le surge a Martín y a Felipe es: *-vale, podemos hacer que la forma sea un rectángulo, pero podemos construir muchos rectángulos con esta valla, más ancho o más estrecho, pero... ¿con cuál cubriremos más cantidad de tierra?*

Martín no lo dudo:*-no te preocupes, le pregunto a mi amiga Alba*. Pero Alba no tenía el móvil disponible, así que, ¿le puedes contestar tú?

Ejercicio resuelto

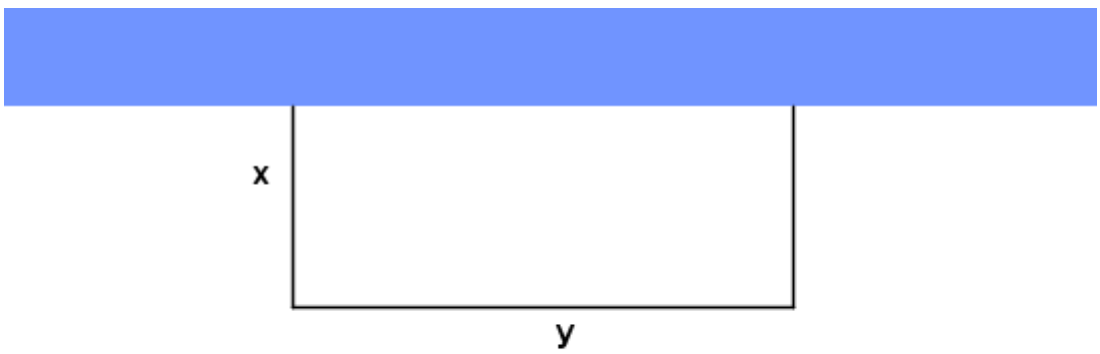
Para empezar tenemos que buscar algo a lo que buscarle el máximo o el mínimo. En este caso, lo que queremos es que la valla abarque la máxima cantidad de tierra, y eso lo que quiere decir es que el área que ocupe la parcela vallada sea la máxima posible.

Así que, ya tenemos claro lo que queremos, que el área de la parcela sea máxima.

Ahora tenemos que expresar eso con una función. ¿Cómo lo hacemos?

Mostrar retroalimentación

Queremos que la parcela sea rectangular, y claro un rectángulo depende de dos parámetros, el largo y el ancho. Pues bien, vamos a llamarle **x** e **y** a ambas medidas:



Esa sería más o menos la situación que tendríamos. Si te acuerdas, el área de un rectángulo se calcula multiplicando ambas medidas, es decir, **A=x·y**

Pero claro, eso no es una función de la manera a la que estamos habituado pues tiene dos variables, la x y la y, así que, lo que toca ahora es buscar una relación entre ellas dos de forma que podamos sustituir en el área y que ésta sólo dependa de un parámetro.

Todavía no hemos usado que disponemos 300 metros de valla, y como el lado del río no se valla, en total con esos 300 metros, tenemos que cubrir los dos lados que miden "x" y el lado que mide "y".

O sea, se tiene que cumplir que: $\mathbf{x + x + y = 300}$

O lo que es lo mismo, $\mathbf{2x + y = 300}$.

Pues bien, si despejamos una de las incógnitas, por ejemplo la "y", nos queda: $\mathbf{y = 300 - 2x}$.

Para terminar, nos vamos al área y sustituimos la "y" por esa expresión:

$A = x \cdot (300 - 2x)$ y multiplicando, $A = 300x - 2x^2$

Pues ya está, ya tenemos la función área a la que buscarle el máximo y que depende de una sola incógnita, el ancho "x" de la parcela rectangular, y es:

$$\mathbf{A(x) = 300x - 2x^2}$$

Importante

Para resolver un problema de optimización, lo **primero** es construir la **función a maximizar o minimizar**, y conseguir que esta dependa de una sola variable.

Si en el contexto del problema aparecen **más de una variable**, habrá que **buscar** alguna **relación** entre ellas de entre los datos que nos aporte el problema. Una vez encontrada esta relación, se tiene que despejar y sustituir en la función para que esta sí dependa ya de una sola variable.

Comprueba lo aprendido

Contesta verdadero o falso a las siguientes cuestiones:

1) Para encontrar el máximo o el mínimo de una función, pueden aparecer dos o más incógnitas en la misma

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso
Sólo puede depender de una variable.

2) Si hay dos variables en un problema de optimización, hay que buscar alguna relación ente ellas.

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Para que así la función pueda depender de una sola.

3) La cotización en bolsa de las acciones de una sociedad viene dadas por la expresión $C(x) = X^3 - 40X^2 + 180X + 22000$. Esta función está bien expresada para calcular la cotización máxima de la sociedad.

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero
Claro, es una función que depende sólo de x.

Ya tenemos claro cómo hay que plantear el problema, pero claro, hay que resolverlo porque si no, a ver qué estamos haciendo. Pues eso es lo que vamos a ver en este apartado del tema, cómo calcular la solución, aunque en realidad, en este apartado no vamos a dar todavía con la solución, sino con los valores candidatos a solución.

Imagen de eltiempo.com bajo licencia Creative Commons

En el segundo tema de esta unidad, vimos que los máximos y mínimos relativos, si la función era continua, se alcanzaban en los puntos donde la función cambiaba de creciente a decreciente o de decreciente a creciente respectivamente. Pero claro, sería una lata tener que ver toda la monotonía de la función cuando en realidad sólo nos interesa el punto donde se produce el cambio.

En ese tema has visto que los extremos relativos se alcanzan en los puntos donde la primera derivada es cero, así que eso es lo que vamos a hacer para buscar los puntos candidatos a máximo o mínimo, calcular la primera derivada, igualarla a cero y resolver la ecuación que resulte.

Otra cosa será ya ver si es o no la solución, pero al igual que unas elecciones, hay que empezar conociendo a los candidatos para elegir después al ganador.

Ejercicio resuelto

Volvemos a nuestra parcela. Teníamos 300 metros de alambrada para vallar una parcela rectangular que lindaba con un arroyo en uno de sus lados y queríamos que el área o superficie encerrada en esa parcela fuera máxima. Habíamos llegado a la conclusión de que la función que daba el área según la longitud del ancho de la parcela era $A(x) = 300x - 2x^2$. ¿Cuál será el valor de x que da el máximo área?

Mostrar retroalimentación

Imagen de tristadesign bajo licencia Creative Commons

Como acabamos de comentar, los máximos y mínimos relativos se alcanzan donde la derivada vale 0. Bueno, pues vamos a ver dónde ocurre eso.

$$\mathbf{A(x) = 300X - 2X^2}$$

Esta función, es una de las del tipo polinómica, así que su derivada no tiene ninguna dificultad, se derivan cada uno de los monomios aplicando la regla de la función potencial y se restan:

$$\mathbf{A'(x)} = 300 - 2\cdot 2x = \mathbf{300 - 4x}$$

Ya tenemos la derivada, ahora la igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{300 - 4x = 0}$$

Esta ecuación es una ecuación de primer grado que se resuelve sindificultad alguna despejando la incógnita x:

$$300 - 4x = 0$$

$$-4x = -300$$

$$x = -300 / -4$$

$$\mathbf{x = 75}$$

Pues bien x=75 es la solución. Ojo, todavía no podemos asegurar que 75 sea la solución óptima de nuestro problema, de momento, x = 75 es candidato a ser máximo de la función, es decir, que si x=75, el área de la parcela sea máxima.

Importante

Los valores candidatos a ser solución de un problema de optimización se obtienen derivando la función, igualando a cero la derivada y resolviendo la ecuación.

Esos valores se llaman **puntos críticos** de la función.

Comprueba lo aprendido

Contesta a las siguientes cuestiones:

1) Si x=8 es solución de la ecuación f '(x)=0, seguro que x=8 es el máximo de la función.

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso
Pueda que sea pero no es seguro. Puede ser también un mínimo o ninguna de las dos

2) El consumo de un barco según la velocidad x, viene dado por la función $C(x)=\frac{x^2}{60}+\frac{450}{x}$. Para determinar los extremos relativos tenemos que resolver la ecuación:

$$\frac{x^2}{60}+\frac{450}{x}=0$$

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso
Hay que igualar a cero la derivada.

3) En la función f(x) = $2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, es posible que x = 1 sea un mínimo relativo

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero
x=1 es una de las soluciones de f '(x) = 0, por tanto es candidato a extremo relativo.

1.3. Obtención de los puntos óptimos

Imagen de House Of Sims bajo licencia Creative Commons.

Bien, pues ya sólo nos queda comprobar que efectivamente, ese candidato a solución, lo es. Para ello tenemos que utilizar nuevamente lo que hemos visto en el tema 2 de la unidad:

- Si en x=a, f '(a) = 0 y f ''(a) > 0, el punto x=a es un mínimo relativo.
- Si en x=a, f '(a) = 0 y f ''(a) < 0, el punto x=a es un máximo relativo.

Por tanto, habrá que calcular la segunda derivada, sustituir el punto candidato y ver el signo del valor que se obtiene para afirmar si es o no la solución deseada.

Pero ojo, también habrá que observar el contexto en el que nos estamos moviendo, y es que, si en el contexto del problema, la variable x sólo puede tomar valores dentro de un intervalo, hay que evaluar los valores extremos del intervalo, por si da la casualidad que ahí es donde se alcanza el máximo o el mínimo.

Lo vemos con nuestro ejemplo.

Ejercicio resuelto

Si x = 75, ¿obtenemos así la parcela con área máxima para plantar las coles y las lechugas?

Mostrar retroalimentación

Nuestra función área era $A(x) = 300x - 2x^2$, donde x indicaba el ancho de la parcela.

La primera derivada era $A'(x) = 300 - 4x$, y habíamos obtenido que x = 75 era el candidato a extremo relativo. Lo comprobamos con la segunda derivada.

La segunda derivada, sale de derivar la derivada, es decir, de derivar la función A'(x). Esta función es polinómica, así que no tiene ninguna dificultad. Aplicamos las propiedades de las derivadas y obtenemos que:

A'' (x) = 0 - 4 = **- 4**

Si sustituimos el valor x = 75 en esa segunda derivada, obtenemos:

A''(75) = -4, pues no hay ninguna x donde sustituir 75; la segunda derivada es una función constante.

En cualquier caso, tenemos que A'(75) = 0 y A''(75) < 0, por tanto, **x = 75 es un máximo relativo**.

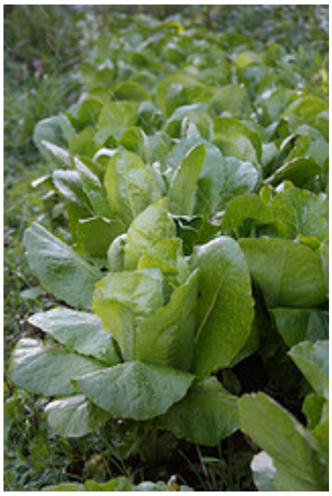


Imagen de NatalieHG bajo licencia Creative Commons

¿Cuál es el valor de ese área máximo? Pues nos vamos a la función y sustituímos la x por 75:

$$A(x) = 300x - 2x^2 \rightarrow A(75) = 300 \cdot 75 - 2 \cdot 75^2 = 22500 - 11250 = 11.250 \text{ m}^2$$

Pero ojo, un máximo realtivo no tiene por que ser absoluto, es decir puede que haya otro máximo mejor, y eso lo vemos buscando en el dominio de la función y en el dominio real del problema o situación.

Nuestra función Área es un polinomio y por tanto el domino es (-∞,+∞), pero x indica la longitud de la anchura. Puesto que longitudes negativas no tienen sentido, el valor más pequeño que puede tener x es cero. Por otro lado, tenemos 300 metros de valla y dos lados de anchura que cubrir con la valla, así que como mucho, x podrá valer 150 m.

lados de anchura que cubrir con la valla, así que como mucho, x podrá valer 150 m, pues si es más, ya nos pasamos de los 300 m.

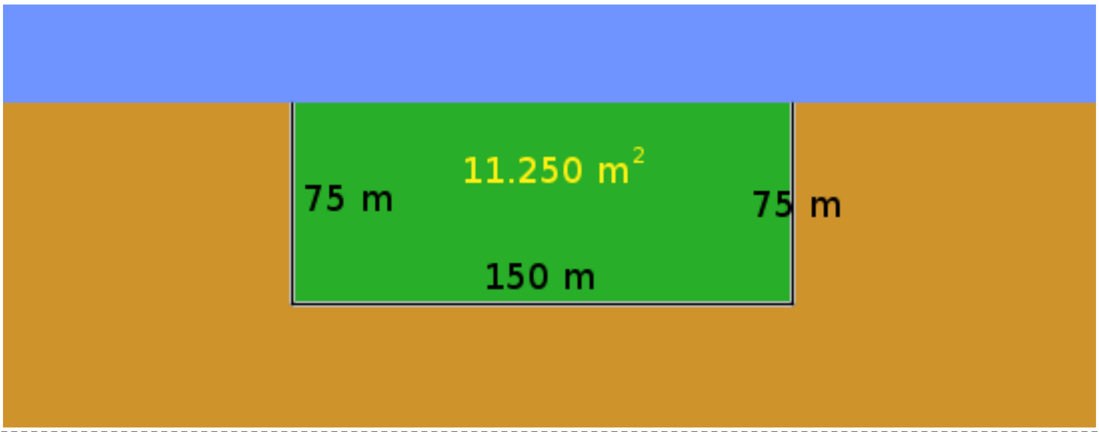
Por tanto en el contrexto del problema, el dominio de la función es [0 , 150]. Bueno, pues vamos a evaluar la función en esos dos valores extremos:

$A(0) = 300 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0$ m^2. Lo que es totalmente lógico, pues si no le damos anchura tenemos una recta de 300 m y la superficie de una línea es 0.

$A(150) = 300 \cdot 150 - 2 \cdot 150^2 = 45000 - 45000 = 0$, por idéntico motivo.

Por tanto, en ninguno de los dos extremos se mejora la solución, es más, estamos obteniendo los mínimos absolutos. Ahora sí, podemos afirmar entonces que x = 75 es el máximo de la función, obteniéndose por tanto la parcela de superficie máxima si x vale 75 metros.

Si recuerdas, la relación entre largo y ancho era Y = 300 - 2x. Si x = 75, nos sale que Y = 150, por tanto las dimensiones óptimas para la parcela son 150 m de largo y 75 de ancho. Con esas medidas obtenemos 11.250 m^2 para cultivar lechugas y coles.



Importante

Para comprobar que un valor candidato es solución de un problema de optimización, hay que proceder así:

1. Calcular la segunda derivada de la función.
2. Sustituir el valor candidato en esa segunda derivada. Si sale una cantidad positiva es un mínimo relativo y si sale negativa un máximo relativo.
3. Determinar el verdadero dominio de la función teniendo en cuenta el contexto del problema.
4. Evaluar en la función inicial los valores extremos obtenidos y compararlos con los máximos o mínimos relativos

Comprueba lo aprendido

1) En la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 3$ se cumple:

- ○ x= 2 y x= -4 son máximos relativos
- ○ x= -2 y x=4 son mínimos relativos
- ○ x= 2 es un máximo realtivo y x = -4 un mínimo
- ○ x=2 es un mínimo relativo y x = -4 un máximo.

No es correcto

Esos valores ni siquiera son candidatos

Repasa el ejercicio resuelto.

Muy bien

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

2) En la función $f(x) = \frac{x^2-3}{x}$, el máximo relativo es:

- ○ -1
- ○ 3
- ○ -1 y 3
- ○ No hay máximos relativos

Es un mínimo

Correcto

-1 no es máximo

3 sí lo es.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Imagen de clspace bajo licencia Creative Commons

¿Te ha quedado claro el ejemplo que hemos resuelto?

Si la respuesta ha sido sí, perfecto. Seguro que los que vienen ahora te van a resultar fácil. Si la respuesta ha sido más o menos, esperamos que con los próximos ejemplos te quede claro, y si la respuesta es no, te aconsejamos que antes de seguir vuelvas a repasar el ejemplo, los pasos y si algo no llegas a entenderlo, se lo preguntes al tutor.

En este apartado del tema vamos a resolver algunos problemas de optimización para que te familiarices con la técnica y el modo de operar.

Vas a ver que en todos los problemas de optimización hay que empezar buscando la función a la que hay que encontrarle el máximo o el mínimo y ponerla que dependa de una sola incógnita. Para ello, habrá que relacionar las variables a través de los datos que nos den.

A continuación, una vez que tengamos la función, hay que derivar, igualar a cero la derivada y resolver la ecuación para encontrar los puntos candidatos a ser máximo o mínimo. Por último, una vez que tenemos los candidatos, a través de la segunda derivada hay que comprobar si efectivamente es máximo o mínimo y ver si es solución de nuestro problema comparando con los extremos del intervalo donde está definida la función.

Curiosidad

Karl Weierstrass, padre del análisis moderno. Imagen en Wikimedia Commons bajo licencia Creativew Commons

Desde el principio de los tiempos, el hombre siempre ha buscado mejorar y encontrar los mejores resultados a las diversas cuestiones que afectaban a su vida diaria.

Para los matemáticos, este campo de la optimización ha sido uno de los más apasionantes y donde grandes esfuerzos se han hecho, pues podían llevar a la práctica toda la teoría que se esconde en las Matemáticas. Poco a poco han ido dando respuesta a todas estas cuestiones relativas a la optimización, partiendo de problemas reales que surgían en la sociedad, pero no de forma única, sino diversificando las miras y buscando nuevos procedimientos para nuevos problemas. Además, ha sido punto de partida para el descubrimiento de nuevas ramas de las Matemáticas, pues la búsqueda de la solución ha sido la que ha impulsado al desarrollo de la teoría que sustentara dicha solución.

En este curso hemos visto dos técnicas, las de programación lineal en la primera unidad y las de optimización clásica en esta, pero como puedes ver en este enlace, hay muchísimos más métodos y algoritmos que buscan la solución óptima a un problema concreto.

Seguro que más de una vez en la playa has visto a los simpáticos vendedores de refrescos dando una vuelta y otra intentando vender algo bajo el sofocante calor veraniego. ¡Qué no! Bueno, es igual, tampoco pasa nada. Llégate si eso un momento al frigorífico y cógete alguna lata de refresco. ¿Que tampoco tienes latas de refrescos? Pues nada, cuando vayas al súper piensa sobre esto. ¿Por qué todas las latas, sean de la marca que sean y tengan el producto que tengan de 33 cl son iguales?

Imagen de martiniko bajo licencia Creative Commons

No, no es ninguna tontería. Podrían ser unas más alargadas, otras más anchas, y seguir teniendo el tercio de litro, pero no. Todas son iguales. Pero,... ¿lo harán bien? ¿Es ese el mejor diseño?

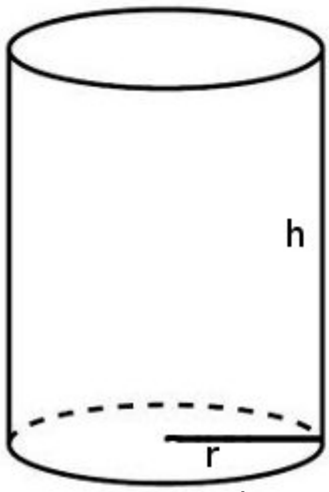
Claro, al fabricante de latas, le interesa que el coste de cada lata sea mínimo, y el coste se traduce en la cantidad de material que hace falta para construir la lata. Ese material no es mi más ni menos que el área total del cilindro, es decir, la suma del área lateral y el de las dos tapas.

Ejercicio resuelto

Vamos a resolver la cuestión. ¿Cuáles deben ser las medidas de una lata de un tercio de litro para que el coste de fabricación sea mínimo?

Mostrar retroalimentación

1er paso: Encontrar la función.



Lo que queremos que sea mínimo es el área total de la lata, por tanto, vamos a empezar construyendo esa área.

El área total queda determinado por la suma del área lateral y el de las dos tapas. El área lateral es un rectángulo cuya altura es la altura del cilindro (h) y cuya base es la longitud de la circunferencia que da el borde, o sea, 2πr. Luego el área lateral del cilindro es: $\mathbf{A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$

Por otro lado, la base y la tapadera son sendos círculos y como recordarás, el área de un círculo es $\pi \cdot r^2$.

Por tanto, el área total de la lata de refrescos es: $\mathbf{A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2}$

Todavía no nos vale porque tenemos dos variables, el radio de la base, r, y la altura del cilindro, h, así que, hemos de poner una en función de la otra. Para ello, usamos el dato de que la lata ha de ser de un tercio de litro. Puesto que queremos relacionar unidades de volumen con longitudes o áreas, el volumen lo tenemos que expresar en unidades cúbicas, o sea, m^3, cm^3, etc., así que como dato, usaremos que el volumen de la lata es 333 cm^3

El volumen de un cilindro se calcula a partir de la fórmula $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, (área de la base por la altura). Por tanto, ha de ser,

$$\pi \cdot r^2 \cdot h = 333$$

Puesto que es más fácil despejar la altura, (si despejas r, habría que poner raíz cuadrada), nos queda que: $h = \frac{333}{}$

Sustituyendo en el área total, nos queda: $A_T=2\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{333}{\pi r^2} + 2\cdot\pi\cdot r^2$

Y simplificando: $A_T=2\cdot\cancel{\pi}\cdot\cancel{r}\cdot\frac{333}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}} + 2\cdot\pi\cdot r^2$

Luego la función a minimizar es: $A_T(r)=\frac{666}{r}+2\pi r^2$

2º Paso: Derivar e igualar a cero.

Tenemos que tener en cuenta que la función es a su vez suma de dos partes y que la variable es r. Derivando obtenemos:

$$A'_T(r)=\frac{-666}{r^2}+4\pi r$$

Igualamos a cero la derivada para buscar los puntos candidatos a extremo relativo:

$$\frac{-666}{r^2}+4\pi r = 0$$

Resolviendo la ecuación obtenemos como solución aproximada: r≈3,76 cm.

3er Paso: Comprobar la solución.

Vamos a comprobar que efectivamente ese valor de r es un mínimo, para ello, calculamos la segunda derivada, sustituimos ese valor y debe de salirnos un resultado positivo.

Derivando el resultado obtenido en la primera derivada, obtenemos que la segunda derivada es:

$$A''_T(r)=\frac{1332}{r^3}+4\pi$$

Sustituyendo el valor de r obtenido anteriormente:

$$A''_T(3{,}76)=\frac{1332}{3{,}76^3}+4\pi\simeq 37{,}9 > 0$$

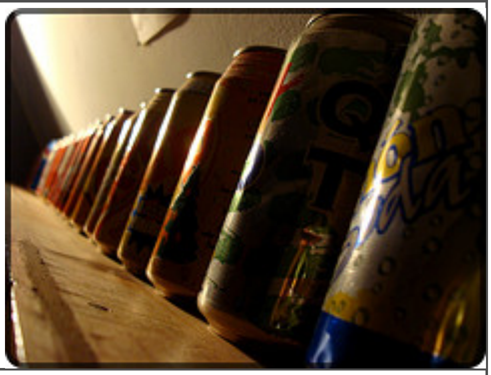


Imagen de JavierPsilocybin bajo licencia Creative Commons

Como puedes ver, una cantidad positiva, por tanto, ese valor es un mínimo relativo.

Además, sustituyendo en la función área, tenemos que el área asociado a ese valor de r es: 265,91 cm^2

Ahora bien, ¿puede haber otro valor mínimo? La respuesta es no, pues el radio tiene que ser una cantidad positiva (>0) y puede ser todo lo grande que queramos, sería cuestión de estrechar la lata. El dominio real de nuestra función área total es el intervalo (0,+∞), luego no puede haber otro mínimo aparte del relativo al no ser un intervalo cerrado.

Así pues, r= 3,76 cm es el radio de la lata de mínimo coste, y sustituyendo donde habíamos despejado la altura, obtenemos que la altura es:

$$h=\frac{333}{\pi\cdot r^2} = \frac{333}{\pi\cdot 3{,}76^2}\simeq 7{,}5cm$$

Luego **la mejor lata** de un tercio de litro que podemos construir es la que mide aproximadamente **3,76 cm de radio y 7,5 cm de altura**.

Y ahora vete al frigo y mide una lata, a ver si varía mucho. Si lo crees necesario puedes llamar al fabricante y decirle que aún puede ganar más.

Comprueba lo aprendido

Y si ahora le quitamos la tapa de arriba, o sea, como si hiciéramos un lapicero, ¿cuáles serían las mejores medidas para la lata?

Empezamos por la función. La función a la que ahora habría que encontrarle el mínimo sería:

Sugerencia

- La misma, pues nada cambia.
- $A_T(r) = \frac{666}{r} + \pi r^2$
- $A_T(r) = \frac{666}{r}$
- $A_T(r) = \frac{333}{r} + \pi r^2$

Claro que hay cambios, ahora no hay que tapar arriba, así que te ahorras un trozo de chapa.

Correcto

No es correcto, pues has quitado las dos tapas

No es correcto

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

La derivada de la función área total es ahora

- $A'_T(r) = \frac{-666}{r^2} + 2\pi r$
- $A'_T(r) = \frac{-666}{r} + \pi r$
- $A'_T(r) = \frac{-666}{r^2} + \pi r^2$
- $A'_T(r) = \frac{666}{r} + 2\pi r$

Muy bien.

No está bien derivado.

No has derivado la segunda parte

No has derivado la primera parte.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Las dimensiones que dan la lata de menor costo son:

- r = 3,7 cm y por tanto h= 7,5 cm.
- r = 3,14 cm, y por tanto h = 10 cm

- r = 3,14 cm y por tanto h = 10 cm
- r = 4,7 cm y h = 4,8 cm.

Esa son las mismas de antes

No es correcto

Exacto, r= 4,7 es la solución aproximada de la ecuación.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

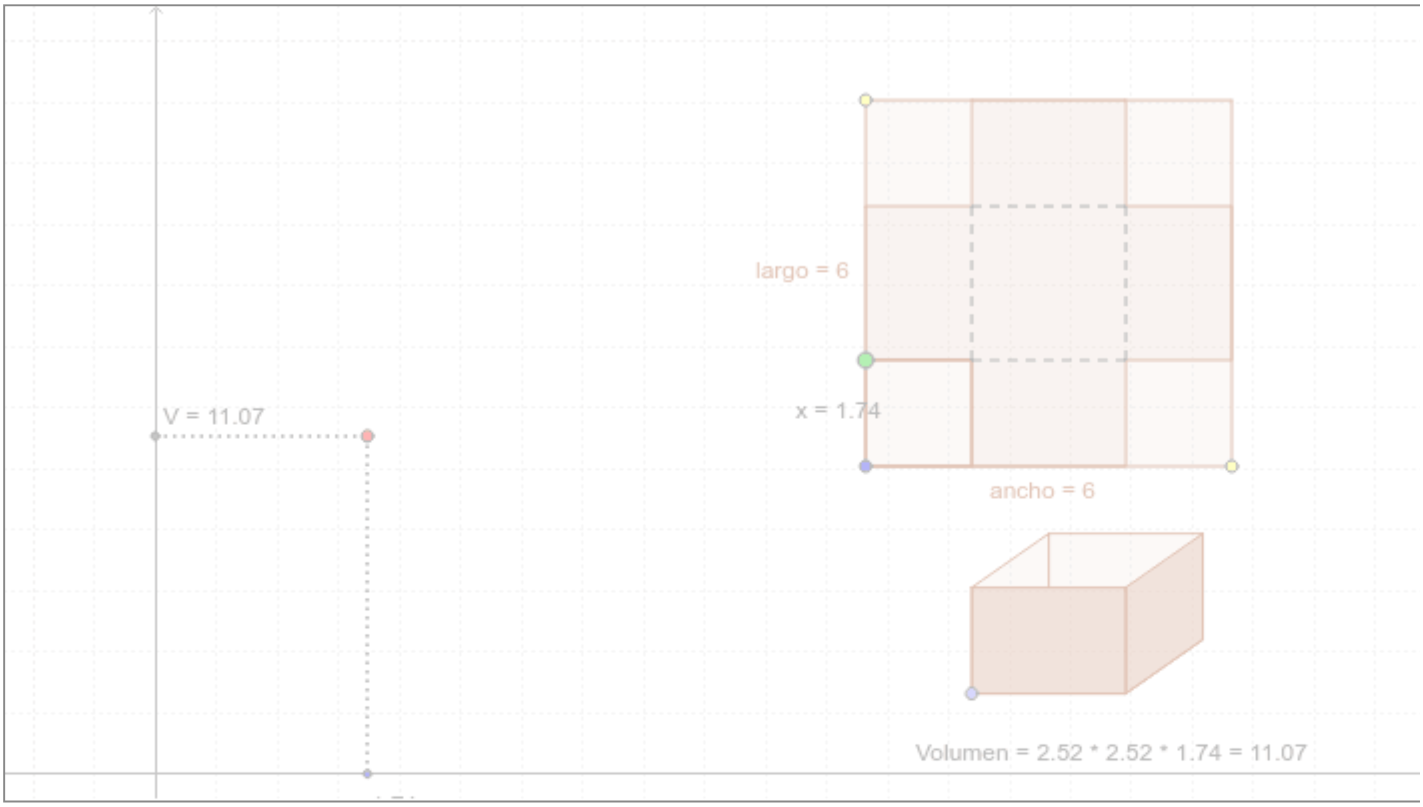
Ahora te vamos a plantear un ejemplo en el que hay que buscar un máximo.

Imagínate que tienes un cartón cuadrado de 6 unidades de lado (ponle tú las unidades, cm, dm, m, lo que quieras) y quieres construir una caja, sin tapadera para meter los juguetes de los niños, las herramientas, ropa,... , o por ejemplo en el caso de Martín y su hermana, para guardar semillas. ¿Cómo hacer el corte para que el volumen sea el mayor posible?

Imagen de seiho bajo licencia Creative Commons

Observa la siguiente escena, Tenemos arriba el cartón extendido de 6 x 6. El botón verde indica por donde cortaríamos para levantar la pared de la caja. Así en un tono más oscuro aparece la cartulina que usaríamos para elaborar la caja y en un tono más claro el cartón que desperdiciaríamos. Muévelo y observa que la forma de la caja (abajo) va variando y por tanto varía también el volumen de la misma. Lo suyo es que en la caja quepa lo máximo posible ¿verdad? Así que tenemos que buscar qué altura le damos a la caja para confeccionarla de la **mejor** manera posible. ¿Cuál debe ser? Ojo, recuerda que el volumen de estas figuras (prismas) se calculan multiplicando el área de la base por la altura.

Si quieres cambiar las medidas del largo y ancho del cartón puedes hacerlo moviendo los puntos amarillos, aunque vamos a ver como resolverlo con esas medidas de 6 x 6.



Applet modificado del original de Manuel Sada bajo licencia Creative Commons.

Mira el siguiente PDF para ver cómo obtener la solución:

La mejor caja

Presentación propia en fomato PDF

Reflexiona

Vamos ahora a cambiar el tamaño de la plancha de cartón. ¿Qué tamaño deberá tener la caja para que el volumen sea máximo si el cartón tiene ahora unas medidas de 10 x 8?

Mostrar retroalimentación

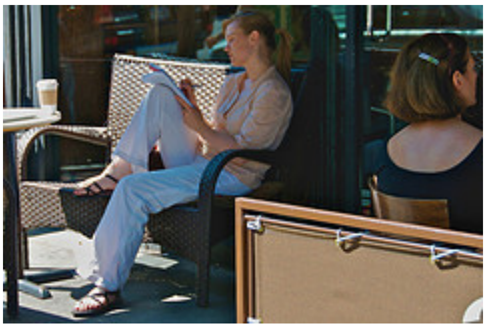


Imagen de Ed Yourdon bajo licencia Creative Commons

Llamando x nuevamente a la altura de la caja, la caja tendrá 10 - 2x unidades de largo, 8 -2x de ancho y x de alto, así que, el volumen vendrá dado por la función:

$$V(x) = (10 - 2x)\cdot(8 - 2x)\cdot x$$

que multiplicando te tiene que quedar:

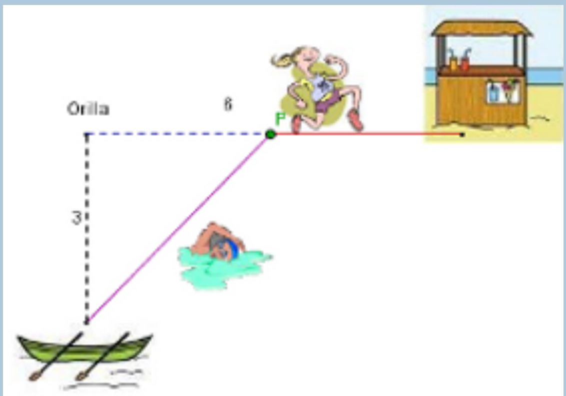
$$V(x) = 4x^3 - 36x^2 + 80x$$

La derivada es $V'(x) = 12x^2 - 72x + 80$. Si igualas a cero y resuelves la ecuación de segundo grado, debes obtener como solución 4,52 y 1,47.

La segunda derivada te tiene que salir $V''(x) = 24x - 72$. Si sustituyes, te tiene que salir que x=1,47 es un máximo relativo y x = 4,52

un mínimo relativo. Además x sólo puede tomar valores en el intervalo [0,4] y en ambos extremos, el volumen es 0. Así que, el volumen máximo se alcanza si x = 1,47 unidades

Curiosidad



¿Recuerdas a nuestro nadador del primer punto del tema?

Teníamos a Martín en una barca y quería llegar a un chiringuito que se encontraba a 6 km del punto más próximo de la playa que se encontraba a 3. La cuestión era en qué punto de la playa debía desembarcar teniendo en cuenta que nadaba a 3 km/h y podía correr a 10 km/h.

Esta cuestión se resuelve de forma similar; planteando una función a la que buscarle el mínimo, en este caso habrá que buscar la fórmula de la función tiempo, derivar e igualar a cero.

La solución que sale, es que debe arribar en la playa en el punto que se encuentra a 5,06 km del chiringuito.

Si quieres ver la solución con todos los detalles, sigue este enlace.

Para saber más

En esta presentación, tienes unos cuantos ejemplos más resueltos sobre optimización de funciones por si quieres seguir practicando:

Ejemplos sobre Optimización de funciones

Ejercicio resuelto

JUNIO 2010 ANDALUCÍA

El gerente de una empresa sabe que los beneficios de la misma, f(x), dependen de la inversión, *x* , según la función $f(x) = -x^2 + 11x - 10$.
(*x* es la cantidad invertida, en millones de euros).
a) **(0.75 puntos)** Determine los valores de la inversión para los que la función beneficio es no negativa.
b) **(1 punto)** Halle el valor de la inversión para el cual el beneficio es máximo. ¿A cuánto asciende éste?

Ejercicio tomado de http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Mostrar retroalimentación

a)
Determine los valores de la inversión para los que la función beneficio f(x) es no negativa.
Me están pidiendo los valores de "x" para los cuales $f(x) \geq 0$
La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 11x - 10$ ($a = -1$, $b = 11$, $c = -10$) es una parábola con las ramas hacia abajo ($\cap$), porque $a = -1 < 0$. Si calculamos las soluciones de $f(x) = 0$, los valores que me piden de "x" son los que están entre las soluciones de $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 11x - 10 = 0 = x^2 - 11x + 10 \rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121-40}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2}$, de donde $x = 10$ y $x = 1$. Los valores pedidos son los comprendidos entre 1 y 10.

b)
Halle el valor de la inversión para el cual el beneficio es máximo. ¿A cuánto asciende éste?
Como las ramas de la parábola van hacia abajo el beneficio máximo se encuentra en el vértice de la parábola (su abscisa anula la 1ª derivada).
$f(x) = -x^2 + 11x - 10$; $f'(x) = -2x + 11$.

De $f'(x) = 0$, tenemos $-2x + 11 = 0$, es decir $x = 5'5$.
Veamos que es un máximo, viendo que su segunda derivada es menor que 0.
$f'(x) = -2x + 11$; $f'(x) = -2 \rightarrow f'(5'5) = -2 < 0$, luego es un máximo.
El valor de la inversión es "x = 5'5 millones de euros" y el "beneficio máximo es $f(5'5) = -(5'5)^2 + 11(5'5) - 10 = 20'25$ millones de euros".

Importante

Optimizar una función f(x), consiste en encontrar el valor o valores de x que hacen que la función tome el valor máximo o mínimo en un intervalo bajo ciertas condiciones.

Importante

Para resolver un problema de optimización, lo **primero** es construir la **función a maximizar o minimizar**, y conseguir que esta dependa de una sola variable.

Si en el contexto del problema aparecen **más de una variable**, habrá que **buscar** alguna **relación** entre ellas de entre los datos que nos aporte el problema. Una vez encontrada esta relación, se tiene que despejar y sustituir en la función para que esta sí dependa ya de una sola variable.

Importante

Los valores candidatos a ser solución de un problema de optimización se obtienen derivando la función, igualando a cero la derivada y resolviendo la ecuación.

Esos valores se llaman **puntos críticos** de la función.

Importante

Para comprobar que un valor candidato es solución de un problema de optimización, hay que proceder así:

1. Calcular la segunda derivada de la función.
2. Sustituir el valor candidato en esa segunda derivada. Si sale una cantidad positiva es un mínimo relativo y si sale negativa un máximo relativo.
3. Determinar el verdadero dominio de la función teniendo en cuenta el contexto del problema.
4. Evaluar en la función inicial los valores extremos obtenidos y compararlos con los máximos o mínimos relativos

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio