Aritmética: Números reales

Matemáticas I

1.º Bachillerato

Contenidos

Aritmética

Números reales

1. Números reales

Uno de los aspectos más sorprendentes de la historia de los números es que cada nueva invención es ampliación de las precedentes y de alguna manera las completa. Los números enteros incluyen los naturales, y los números racionales incluyen los números enteros. La idea de número es común a todos ellos. Mas por otra parte la historia de la invención de los números no es lineal, está llena de vicisitudes, y batallas encarnizadas. Hoy día sorprende leer lo que se dijo de los números negativos, los siglos que tuvieron que pasar para la introducción plena del sistema decimal en Occidente. El viaje que empezamos con los números naturales, siguió con los números enteros, ¿habrá concluido con los números racionales?

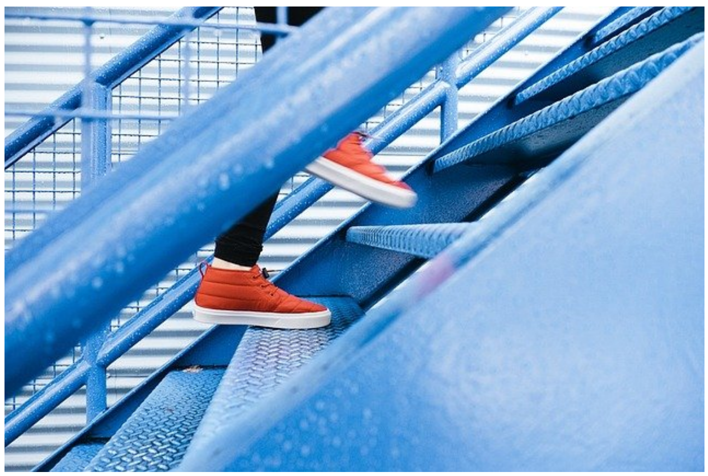


Imagen de Free-Photos en Pixabay. Licencia Pixabay

La respuesta a tal pregunta es NO.

1.1. De los irracionales a los reales

Ya los antiguos griegos descubrieron que había objetos, cuyas dimensiones no podían expresarse con los números racionales, una vez elegida una unidad. Llamaron a tales magnitudes inconmensurables, que no pueden medirse. La unión del sustantivo ‘magnitudes’ y el atributo ‘inconmensurables’ parece encerrar en sí misma una contradicción o paradoja. Constituyen el equivalente en lenguaje geométrico de lo que en lenguaje numérico se designa hoy día como número irracional.

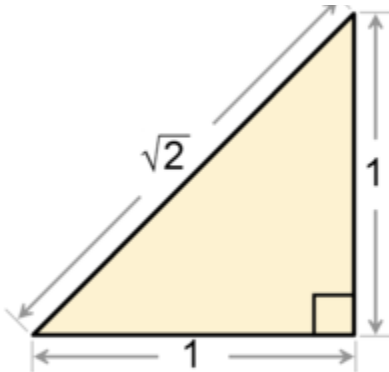
Imagen de Matthias_Roeneveld en Pixabay. Licencia Pixabay

Un número irracional contra lo que puede parece a simple vista no es un número absurdo, ilógico, sino un número que no es racional, que no puede expresarse como cociente de números enteros.

Importante

El conjunto de los irracionales, I, está formado por los números que no pueden ser expresados como fracción. Su expresión decimal tiene un número infinito de cifras que no se repiten de forma periódica.

Dado que hemos comentado que los números irracionales tienen infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica plantea el problema de cómo representar dichos números de forma exacta.



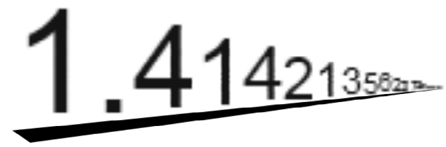


Imagen de Fredrik en Wikimedia Commons. Licencia Dominio Público

Imagen de Dnu72 en Wikimedia Commons. Licencia CC

Importante

Se llama número real a cualquier expresión decimal, ya tenga una cantidad finita o infinita de cifras.

El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$.

Se clasifican en:

- Racionales (pueden expresarse como cociente de números enteros)
- Irracionales (no racionales)

El conjunto de los números reales se puede representar como si de un cuadro de Modrian se tratara:

Si te fijas, uno de los aspectos más sorprendentes de la historia de los números es que cada nueva invención es ampliación de las precedentes y, de alguna manera, las completa. Los números enteros incluyen los naturales, los números racionales incluyen los números enteros y los reales incluyen los racionales y los irracionales. En el siguiente vídeo puedes verlo con más claridad, además de practicar con algunos ejemplos de clasificación de números.

Vídeo de Tuto mate alojado en Youtube.

Aunque parezca increíble la historia de los números no termina con los números reales. Existe otro conjunto de números llamado números complejos , que como no podía ser de otra forma, está repleto de números imaginarios.

Comprueba lo aprendido

Veamos si has entendido bien los conceptos de número racional, irracional y real. Responde si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $\sqrt{5}$ es racional.

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Ten en cuenta que es la raíz cuadrada de un número natural que no es cuadrado perfecto.

b. $\frac{5}{3}$ es racional.

Sugerencia

Verdadero Falso

Verdadero Fíjate bien, es una fracción de dos números enteros.

c. 3,242424... es un número irracional.

Sugerencia

Verdadero Falso

Falso Observa que es un número decimal con infinitas cifras periódicas.

d. Todos los números anteriores son reales.

Sugerencia

Verdadero Falso

Verdadero Los reales son todos los racionales e irracionales.

Ya hemos visto que las raíces están íntimamente relacionadas con los números irracionales. Veamos que las raíces se pueden expresar como potencias de exponente fraccionario .

Importante

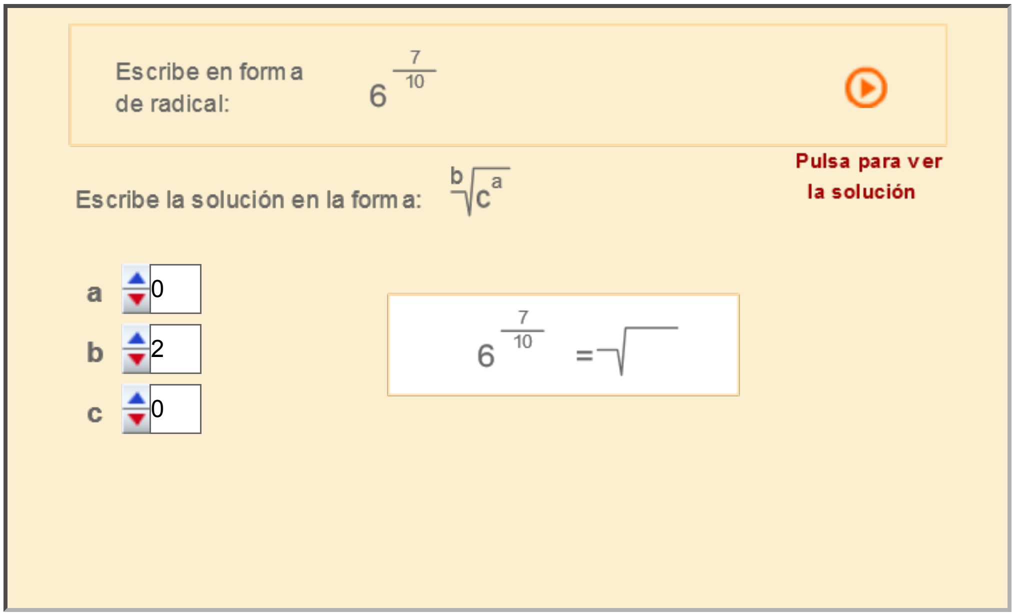
Una potencia de exponente fraccionario $a^{\frac{m}{n}}$ es un radical de índice n y radicando a^m, y se denota por: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

En consecuencia, las raíces pueden expresarse como potencias de exponente fraccionario. Y, por tanto, podemos efectuar los cálculos utilizando las propiedades de las fracciones y las reglas básicas de las potencias.

En el siguiente vídeo puedes ver una explicación más detallada al respecto:

Vídeo de Tuto mate alojado en Youtube

Comprueba lo aprendido



Escena de José Luis Alonso Borrego en [Proyecto Descartes](). Licencia [CC]()

Para saber más

Existen infinitos números irracionales. Algunos de ellos por su importancia histórica y práctica, han llegado a adquirir un nombre propio, como por ejemplo el número e:

Vídeo de Derivando alojado en [Youtube]()

1.2. Aproximación y errores

Si lo piensas bien, existen muchas situaciones en nuestra vida cotidiana donde utilizamos los números de manera aproximada.

Lo hacemos normalmente por dos motivos:

- Porque es conveniente o no es necesario dar una cantidad exacta que sí conocemos,
- o bien porque no tenemos forma de medirla con exactitud.

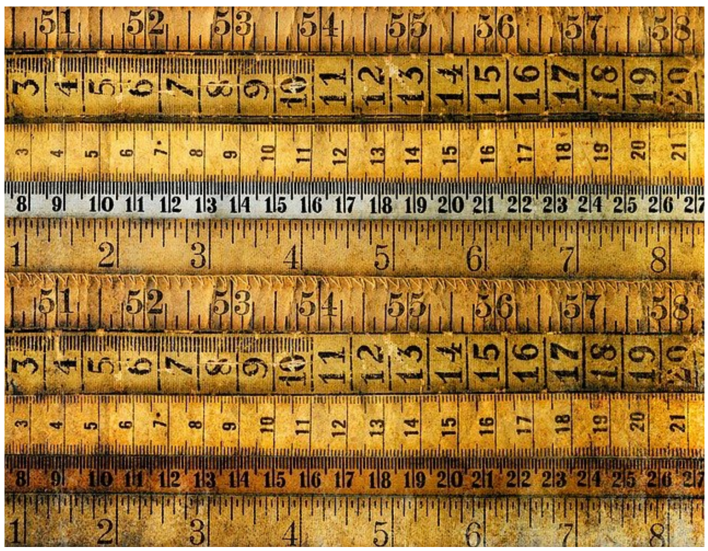


Imagen de arielrobin en Pixabay. Licencia Pixabay

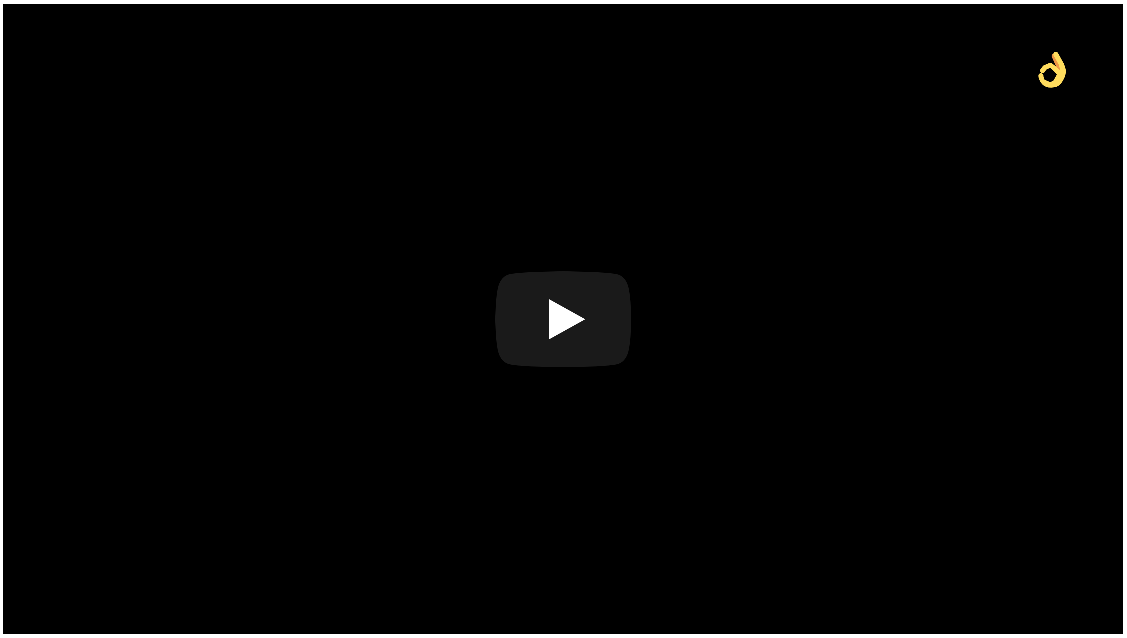
Importante

Si en un número decimal, a partir de un determinado orden, sustituimos todas las cifras de orden inferior por ceros, obtendremos otro número decimal que se dice una aproximación del primero (hasta el orden fijado).

Se llaman cifras significativas a aquellas con las que se expresa un número aproximado.

Reflexiona

En el siguiente vídeo hace un recorrido por la evolución de los rascacielos más altos del mundo. Si te fijas en la esquina superior derecha, en ella figuran los metros (y los piés) que mide cada uno de ellos:



Vídeo de Cityskyline Rodrigo Bernal alojado en Youtube

Te planteamos la siguiente reflexión, ¿crees que todos estos edificios miden exactamente los valores recogidos aquí? ¿No variará ni un centímetro? ¿Tendría sentido recoger en este vídeo los posibles decimales?

La respuesta probablemente sea no, ya que las diferencias entre unos y otros son de metros.

Esto puede llevarnos a otro planteamiento... ¿existe un orden de aproximación establecido de antemano para hacer una aproximación? La respuesta es NO. Dependerá de lo que se desea medir. Así, carecería de sentido fijar el mismo orden de aproximación para medir la distancia entre dos ciudades o el diámetro de una pelota de tenis de mesa.

En el día a día no es necesaria mucha precisión, basta con 2 ó 3 decimales. Eso sí, la cosa cambia si manejamos datos científicos.

Cuando realizamos una aproximación podemos hacerla por exceso o por defecto. Estos conceptos están más asimilados en nuestra vida cotidiana de lo que parece. Por ejemplo, la duración del año solar medio no contiene un número exacto de días, por lo que se hacen aproximaciones a la unidad, usando dos tipos de años: el de 365 días (aproximación por defecto) y el de 366 (año bisiesto, aproximación por exceso).

Hay distintos métodos de aproximación:

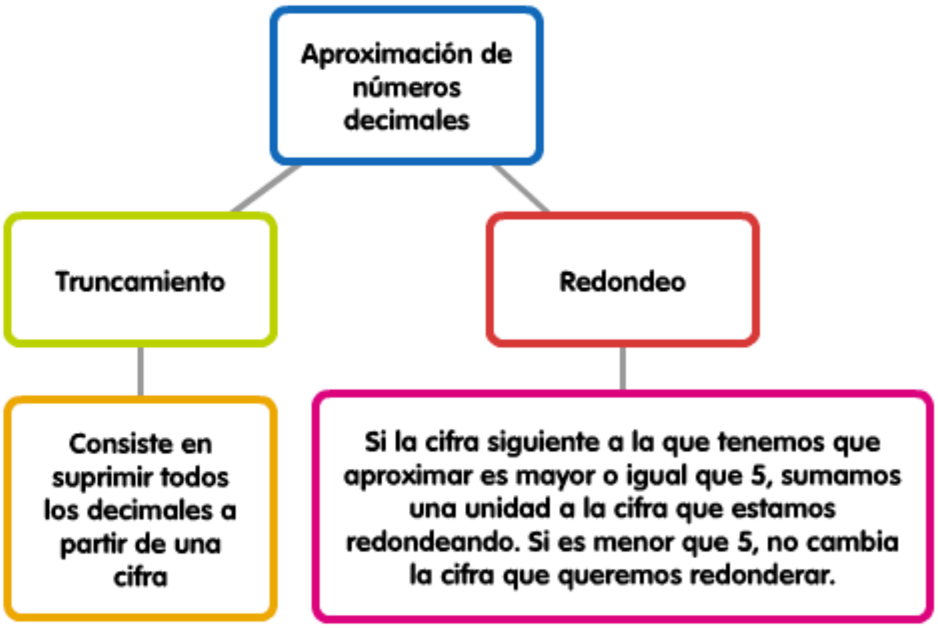


Imagen de elaboración propia

En el siguiente vídeo puedes ver una explicación completa de estos conceptos y algunos ejemplos:

Vídeo de Tuto mate alojado en Youtube

Completa la siguiente tabla:

	Redondeo a las milésimas	Truncamiento a las milésimas
3,4586		
0,8174		
2,888...		

Recuerda los conceptos de redondeo y truncamiento.

Al sustituir un valor por su aproximación evidentemente se comete un error, y a veces estos errores no se realizan de manera consciente.

Importante

Se denomina error absoluto a la diferencia entre el valor real de un número y su aproximación. Se suele tomar el valor absoluto de dicha diferencia.

Error absoluto =|valor real - aproximación|

Caso práctico

Veamos un caso práctico. En el prospecto de unas cápsulas se indica que cada gramo del medicamento contiene 0,00285 gramos de ácido bórico y 0,00015 gramos de tetraborato de sodio .

En un control de calidad farmacéutico, se toma una muestra de una de las cápsulas y se detecta que cada gramo de la medicina contiene 0,0031 gramos de ácido bórico y 0,00013 gramos de tetraborato.

a. En uno de los casos el error es por exceso, supera a la cantidad fijada, y en el otro es por defecto, está por debajo. ¿cuál es uno y cuál es el otro?
b. ¿En cuál de los dos componentes la diferencia entre la cantidad indicada en el prospecto y la detectada en el tubo es mayor?

a. En el caso del ácido bórico el error es por exceso, puesto que 0,0031>0,00285. Y para el tetraborato es por defecto, ya que 0,00013<0,00015.

b. Hallamos en ambos casos la diferencia entre la cantidad indicada y la detectada:

|0,0031-0,00285| = 0,000250

|0,00013 - 0,00015| = |-0,00002| = 0,00002

Para poder comparar, se considera el valor absoluto de la diferencia. En nuestro caso, es mayor la diferencia del ácido bórico.

El error absoluto es un indicador de la precisión que tiene una determinada media, ya que el resultado es precisamente la imprecisión que estamos cometiendo respecto a la medida real.

En ocasiones, no nos interesa saber exactamente cuál ha sido la cantidad exacta sino hacernos una idea de la magnitud del error, para ello usamos el error relativo, que tiene como objetivo darnos una indicación de la calidad de la medida.

Importante

Se define error relativo de una aproximación a un número como el cociente entre el error absoluto y el valor del número. El error relativo se puede expresar en tanto por uno o en tanto por ciento.

$$Error\ relativo = \frac{Error\ absoluto}{Valor\ real}$$

Comprueba lo aprendido

¿Es distinta la significación de un error de un milímetro al medir al ancho de un folio de 21 cm o al medir el ancho de una habitación de 4 metros?

- No
- Sí

No es correcto

Correcto

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

¿Cuál es el error relativo de ambos?

- 0,48 % y 0,25% (folio, habitación)
- 0,48 % y 0,025% (folio y habitación)

No es correcto

En efecto, para el folio 1/210= 0,0048 (0,48%). En el caso de la habitación 1/4.000=0,00025 (0,025%). El error de medir el folio es 19 veces más grande.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

Caso práctico

Para vallar mi cortijo de Níjar (Almería) estimé que necesitaba 400 metros. Cuando la empresa VALLAS INDALO me la instaló cobraron 401 metros, cabe pensar que con mi cinta métrica de casa cometiera un error de 1 metro.

Cuando se lo comenté a mi vecino Pablo, que trabaja en la empresa CARRETERAS RURALES S.A, me explicó que a su encargado le había pasado algo parecido en la carretera que une los pueblos de Macael y Olula del Río (3 km de distancia). Con sus aparatos de medida cometieron el mismo error, 1 metro.

Para ambos casos el error de medición es de 1 metro.

¿Pero es distinta la significación de un error de un metro al medir 3 km que al medir 401 metros?

Para la valla

$$E_r = \frac{1}{401} = 0{,}0025 (0{,}25\%)$$

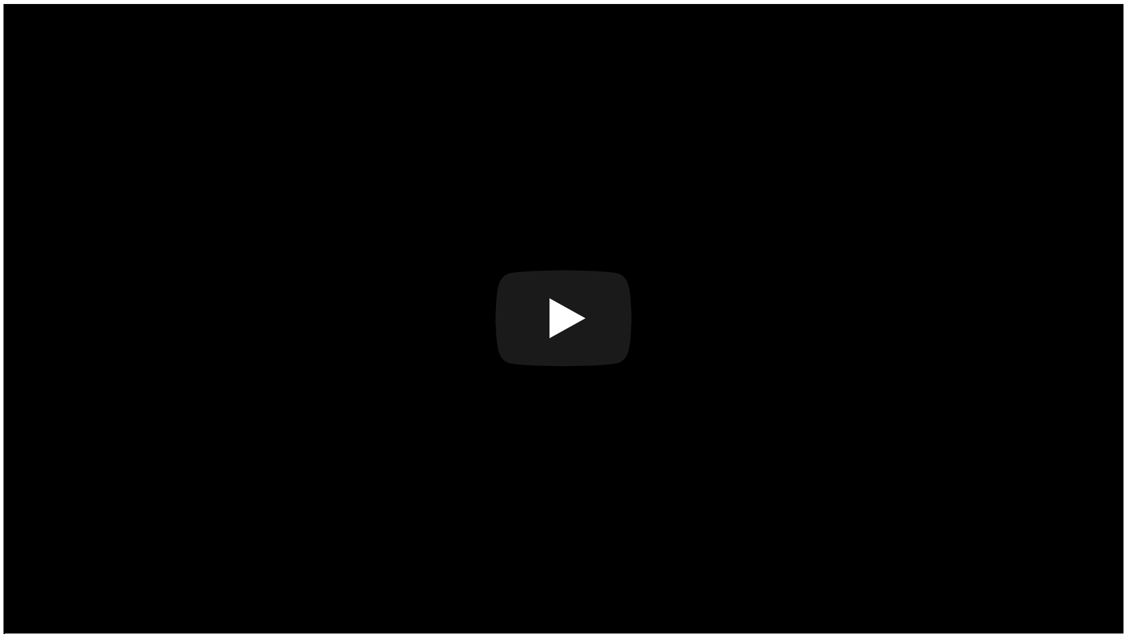
Para la carretera

$$E_r = \frac{1}{3000} = 0{,}00033 (0{,}033\%)$$

Por tanto, si comparamos ambos resultados, el error de medida de la valla es más grande que el de la carretera, por tener mayor error relativo (Dividiendo 0,25/0,033≈8. El error en la medida de la valla es 8 veces mayor que el de la carretera).

Curiosidad

¿Es 0,99999999999.... igual a 1?



Vídeo de Derivando alojado en Youtube

1.3. Notación científica

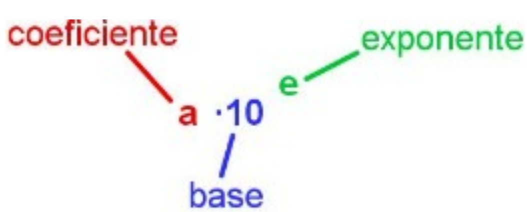
El tamaño de una hormiga varía entre $7{,}5 \cdot 10^{-4}$ y $5{,}2 \cdot 10^{-2}$ metros. ¿Qué indican -4 y -2 en el exponente? Pues que el tamaño de la hormiga se encuentra entre las décimas de milímetro y los decímetros. Además, esa diferencia de 2 unidades entre los exponentes de 10 nos indica que la hormiga de mayor tamaño puede ser hasta 10^2 veces más grande que la de menor envergadura, es decir, 100 veces.

Imagen de Alexas_Fotos en [Pixabay](). Licencia [Pixabay]()

Una de las ventajas de la notación científica es que muestra a través del exponente de la potencia de 10 el orden de magnitud decimal del número. Con ello facilita la comparación de magnitudes.

Importante

Un número escrito en notación científica se compone de de tres partes:



El coeficiente es un número decimal con una única cifra entera distinta de cero y dos o tres cifras decimales significativas.

La base es siempre el número 10.

Y el exponente , que indica el número al que se eleva la base, es un número entero.

Para expresar un número en notación científica debemos seguir el siguiente esquema:

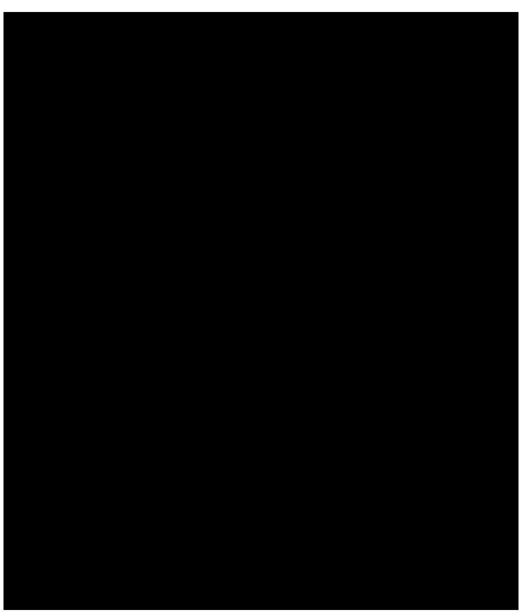
Imagen de elaboración propia

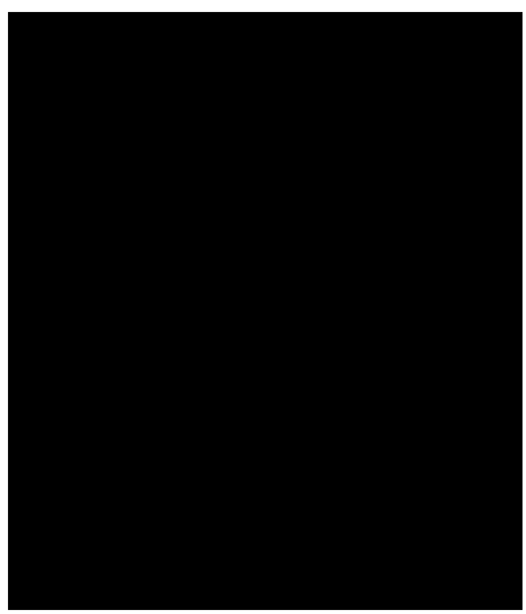
Por ejemplo:

- 121,14 se expresaría en notación científica como $1{,}2114 \cdot 10^{2}$
- 0,00894 se expresaría en notación científica como $8{,}94 \cdot 10^{-3}$

Para calcular el exponente de la potencia de 10 basta con averiguar el orden decimal de la primera cifra que no es cero. Los órdenes decimales de las cifras se calculan recorriendo el número a partir de la coma hacia la izquierda (sentido creciente) y hacia la derecha (sentido decreciente). El orden de la cifra de las unidades es 0

En las siguientes presentaciones puedes ver otros ejemplos:





Recurso de elaboración propia. Jesús Fernández Domínguez.

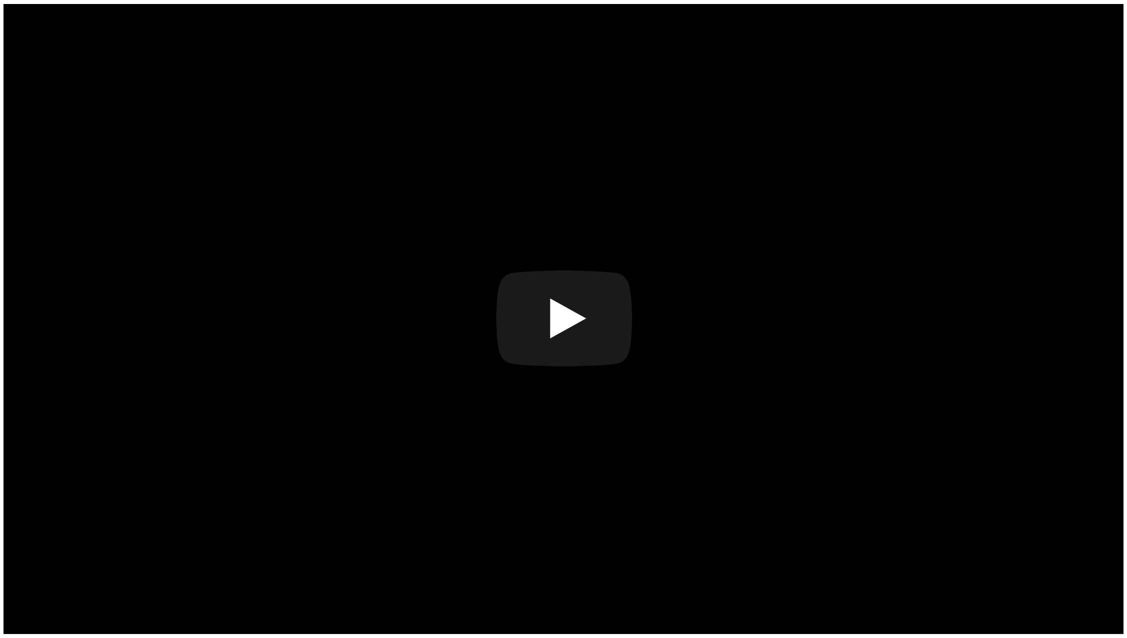
Vamos a pasar las cantidades que comentamos en la introducción a notación científica . Rellena los huecos en blanco con los números adecuados.

- La distancia media entre el Sol y Plutón es de 5.913.520.000 km, que en notación científica son $5{,}91352 \cdot 10^{\square}$ km.
- La distancia de la Tierra a las Pléyades es de 4.162.400.000.000.000 km, es decir, $4{,}1624 \cdot 10^{\square}$ km.
- El diámetro de un glóbulo rojo mide 0,0075 mm. En notación científica sería $\square \cdot 10^{-3}$ km.
- Un protón mide 0,000000000001 mm de diámetro, es decir, $1 \cdot 10^{\square}$ mm.

Comprueba lo aprendido

Escena de José Luis Alonso Borrego en Proyecto Descartes. Licencia CC

Usando las propiedades de las potencias que viste en la Unidad 1, podemos hacer operaciones con números escritos en notación científica, tal y como se explica en los siguientes vídeos:



Lista de reproducción de Tuto mate alojado en [Youtube]

Ejercicio Resuelto

$(4 \cdot 10^5) \cdot (2{,}1 \cdot 10^9) =$

$= 4 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^9 = 8{,}4 \cdot 10^{14}$

$(6{,}1 \cdot 10^{12}) \cdot (3{,}2 \cdot 10^{-4}) =$

$= 6{,}1 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-4} = 19{,}52 \cdot 10^8 = 1{,}952 \cdot 10^9$

En el último paso hemos pasado el número a notación científica, pues 19,52 no es válido por tener dos cifras en la parte entera.

$(5{,}85 \cdot 10^{-4}) : (1{,}5 \cdot 10^{6}) =$

$= (5{,}85 : 1{,}5) \cdot (10^{-4} : 10^{6}) = 3{,}9 \cdot 10^{-10}$

Comprueba lo aprendido

Elige si las siguientes igualdades o afirmaciones son verdaderas o falsas.

La notación científica de 154000 es $1{,}54 \cdot 10^{5}$

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Es verdadero porque tenemos que avanzar 5 cifras a la derecha desde la coma para conseguir nuestro número inicial.

La notación científica de 0,0024 es $0{,}24 \cdot 10^{-2}$

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Es falso, porque para que un número esté escrito en notación científica, la parte entera debe ser un número de 1 a 9, y en este caso es 0.

$(4{,}5 \cdot 10^{6}) \cdot (2 \cdot 10^{-10}) = 9 \cdot 10^{-4}$

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

$(8{,}1 \cdot 10^{78}) : (2{,}7 \cdot 10^{14}) = 3 \cdot 10^{92}$

Sugerencia

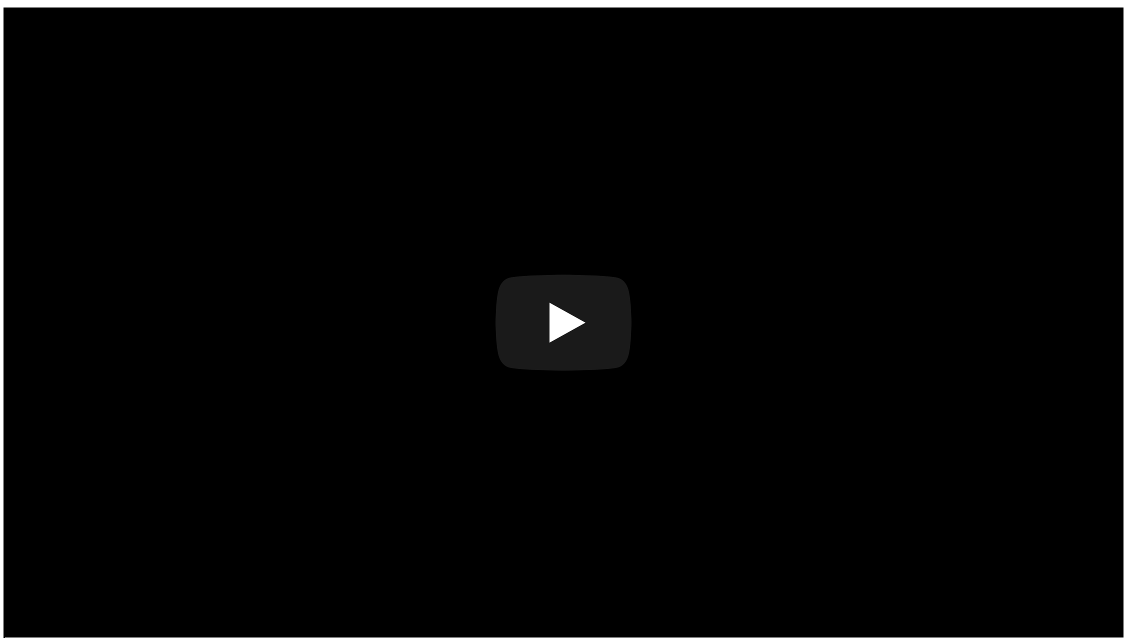
○ Verdadero ○ Falso

Falso

La respuesta correcta es $3 \cdot 10^{64}$

Curiosidad

En el siguiente vídeo puedes ver cómo varían estas distancias en nuestro mundo.



Vídeo de Daniel Molina alojado en Youtube

2. La ordenación de los números reales

A estas alturas ya habrás descubierto que todos los tipos de números los hemos podido ir estableciendo una relación de orden, utilizando expresiones como mayor que o menor que. Esto nos permite poder representarlos en una recta, a la que llamaremos recta real.

Imagen de Diggeo en Pixabay. Licencia Pixabay

Los números reales llenan completamente la recta, de tal forma que todo punto de la recta real tiene una expresión entera o decimal (exacta, periódica o no periódica). Recuerda además que según el tipo de número con el que estemos trabajando utilizamos un método u otro de representación. En este enlace te recordamos la forma de representar los números reales.

2.1. Intervalos, semirrectas y distancias

Es posible que estudiando o leyendo un libro, te hayas hecho alguna vez un plan de trabajo, y hayas formulado comentarios como:

"*Hoy me leeré de la 20 a la 40*"

Es decir, tienes proyecto de leer todas las páginas comprendidas entre la 20 y la 40. Pues en esta ocasión estás usando intervalos para dar una información.

Imagen de Free-Photos en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

Si $a < b$ se llama intervalo de extremos a y b al conjunto de números que están entre a y b en la relación de orden. Según contengan o no los extremos los intervalos se llaman cerrados, abiertos o semicerrados o semiabiertos si contienen solamente uno de los extremos.

Es decir, los intervalos son "trozos" de la recta real.

En la siguiente imagen puedes ver cómo representamos los distintos tramos:

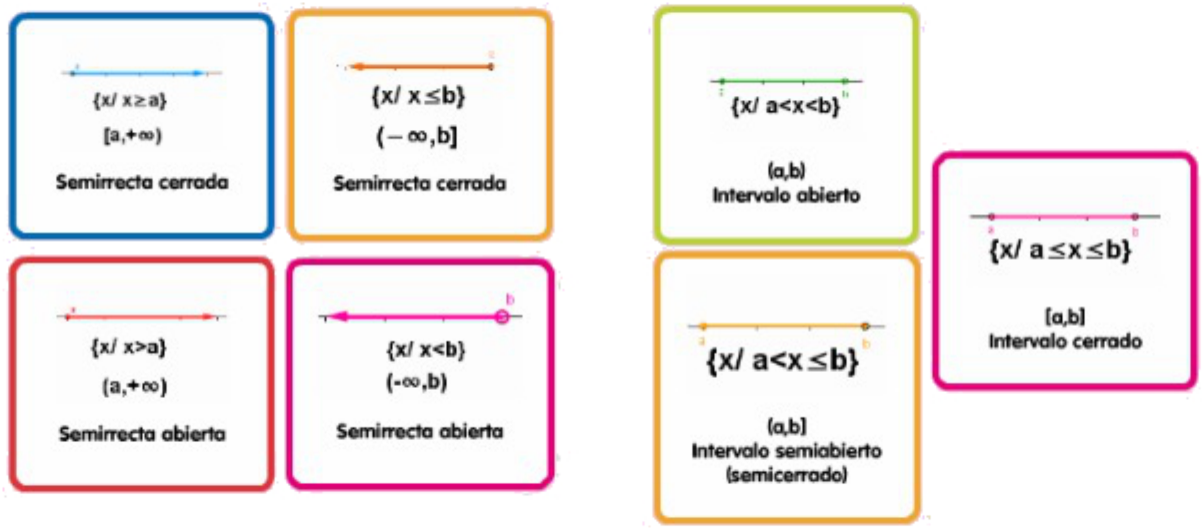
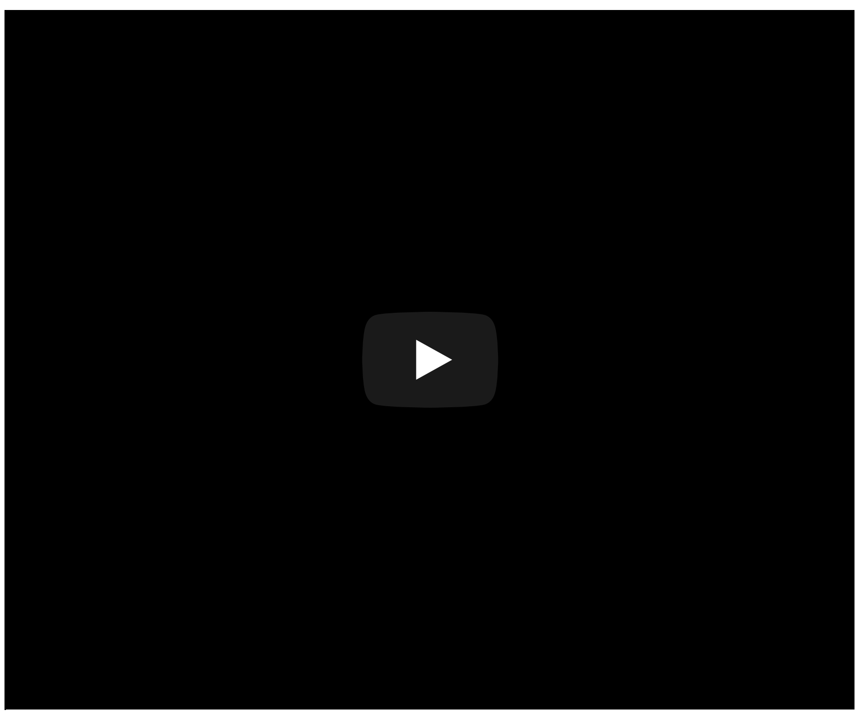


Imagen de elaboración propia

Si observas la imagen anterior, tenemos distintas formas de expresar un intervalo:

- Gráficamente: utilizando la recta real, e indicando los extremos del intervalo.
- A través de conjunto y desigualdades
- Notación de intervalo. En este caso observa que en el caso de las semirrectas, el infinito nunca está contenido.

En el siguiente vídeo, puedes ver los diferentes tipos.



Vídeo de Tuto mate alojado en Youtube.

Recuerda que los intervalos se simbolizan mediante corchetes [ ] o paréntesis ( ), dependiendo de si queremos o no incluir los extremos.

Ejercicio Resuelto

Escribe como intervalo los siguientes conjuntos de números reales:

a) Los números que están entre 3 y 10:

Como no nos indican que el 3 y el 10 sean parte del conjunto, nuestro intervalo es $(3, 10)$. Es decir, son los números x que cumplen: $3 < x < 10$.

b) Los números mayores que 0 y menores o iguales que 8.5:

El 0 no está incluido, pero el 8.5 sí. Por tanto el intervalo estará abierto en 0 y cerrado en 8.5: $(0, 8.5]$. Este intervalo está formado por los números x que cumplen: $0 < x \leq 8.5$.

c) Los números menores que 2/3:

La fracción 2/3 no está incluida, y recuerda que $+\infty$ y $-\infty$ siempre van abiertos, luego será el intervalo $(-\infty, 2/3)$. Este intervalo está formado por los números x que cumplen: $x < 2/3$.

Comprueba lo aprendido

¿Cuál es el intervalo que representa los números que cumplen $2 \leq x < 5$?

- [2 , 5]
- (2 , 5)
- [2 , 5)

Incorrecto

Incorrecto

Opción correcta

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

Indica qué intervalo representa a los números mayores que -2:

- $(-2 , +\infty)$
- $(-2 , +\infty]$
- $(-\infty , -2)$

Opción correcta

Incorrecto

Incorrecto

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Indica cuál de los siguientes números pertenecen al intervalo [3.26 , 3.42):

- 3.423
- 3.31
- 3.2

Incorrecto

Opción correcta

Incorrecto

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

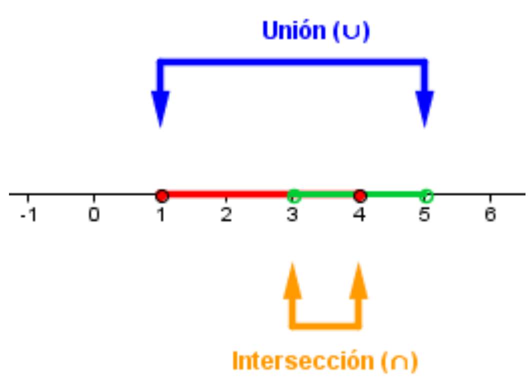


Imagen de elaboración propia

Al igual que operábamos con números, con los intervalos podemos hacer algunas operaciones:

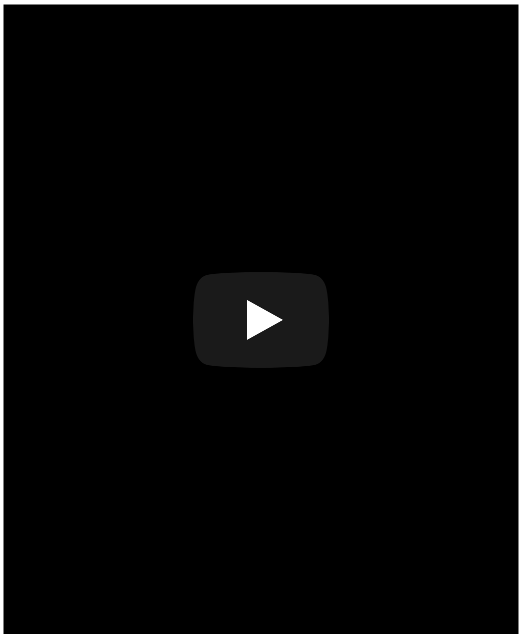
a. Unión (U): al unir dos intervalos, consideramos los números que están en uno u otro intervalo:

[1,4] U (3,5) = [1,5)

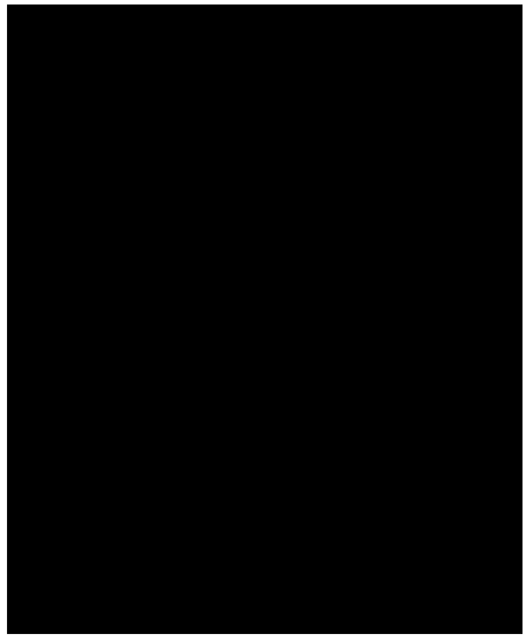
b. Intersección (∩): la intersección de dos intervalos consiste en quedarse con los números que están en los dos a la vez:

[1,4] ∩ (3,5) = (3,4]

En los siguientes vídeos, puedes ver la unión y la intersección.



Vídeo de Tuto mate alojado en Youtube.



Vídeo de Tuto mate alojado en Youtube.

Comprueba lo aprendido

El intervalo (2,5] está incluido en el intervalo de (1,3]∪(2,6)

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Ya que (1,3]∪(2,6)=(1,6)

El ser humano, desde el comienzo de la historia, ha tenido la necesidad de medir para mejorar sus condiciones de vida: medir el tiempo, las distancias, el peso del producto que tenía que vender...

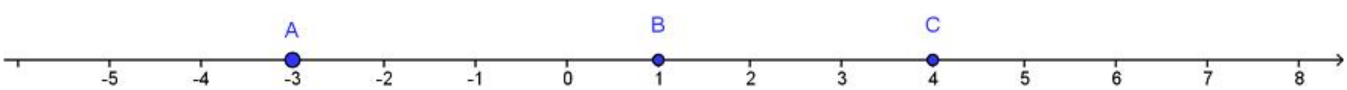
En todos estos casos, lo que realmente estaba haciendo era medir distancias entre los números de la recta real.

Reflexiona

Mueve los puntos A y B y observa cómo varía la distancia.

¿Cómo medimos esa distancia? Es algo muy intuitivo: sólo tienes que restar los números para ver la diferencia entre ambos.

Veamos las distancias en el siguiente ejemplo:



a) Entre B y C: de 1 a 4 hay 3 unidades, que se corresponde con la operación 4 - 1 = 3.

b) Entre A y C: de -3 a 4 hay 7 unidades, que se corresponde con la operación 4 - (-3) = 4 + 3 = 7.

Comprueba lo aprendido

Completa los huecos con el valor correspondiente:

a) El punto más alto de la tierra es el Everest (8844 m) y el más bajo es la Fosa de las Marianas (10924 m bajo el nivel del mar). La distancia que los separa es de ______ m.

b) Una persona comprueba su cuenta bancaria. En enero tenía 326€, y en febrero tiene -54€. La diferencia entre ambos meses es de ______ €.

c) Julio César nació en el año 100 a.C. y murió el 44 a.C. ¿Cuántos años vivió? ______ años.

d) En el desierto del Sahara podemos pasar de los 57,7 °C a unas temperaturas bajo cero de -23,9 °C. La diferencia es de ______ °C.

a) Las medidas bajo el nivel del mar se dan con signo negativo: Fosa de las Marianas = -10924m. Luego la distancia es 8844 - (- 10924) = 19768.

b) 326 - (-54) = 326+54= 380.

c) Los años a.C. se representan con números negativos: -44 - (-100) = -44 + 100 = 56.

d) 57,7 - (-23,9) = 81,6.

3. Logaritmos

Los logaritmos se utilizan para muchas cuestiones diarias, y entre ellas la famosa escala de Richter (terremotos).

En la imagen tienes el Convento do Carmo de Lisboa, que tras el terremoto de 1755, en el que murieron entre 60000 y 100000 personas, quedó prácticamente abierto al cielo. Los sismólogos estiman que hoy la magnitud del terremoto de Lisboa sería de aproximadamente un 8,4. Actualmente alberga un Museo Arqueológico.

Imagen de LoggaWiggler en Pixabay. Licencia Pixabay

Curiosidad

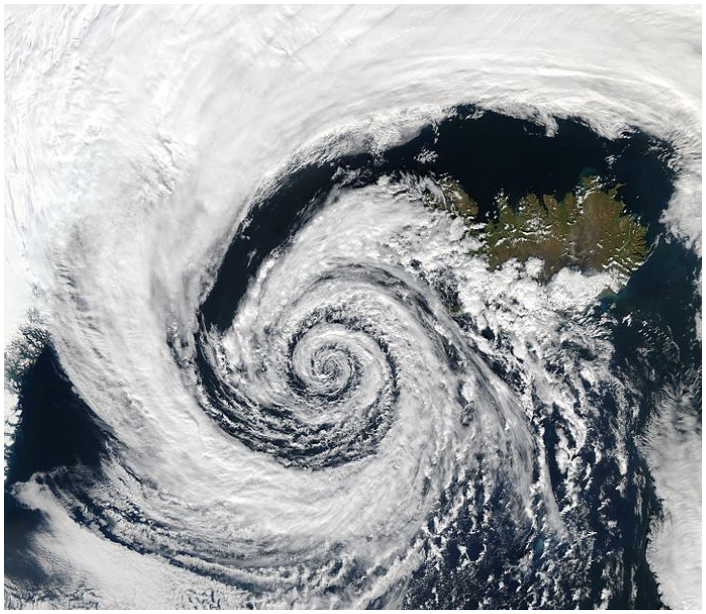
¿Para qué sirven los logaritmos?

El vídeo presenta algunas de sus utilidades: Medición del tiempo con la técnica del Carbono 14, intensidad de los terremotos, brillo de las estrellas... y hay muchas más que no aparecen en el vídeo: Cálculo del PH, fórmulas del interés compuesto, transformar productos en sumas, los decibelios midiendo la intensidad del sonido, etc.

Vídeo de Victoria Alfosea alojado en Youtube

3.1. Definición

Ya hemos visto que los logaritmos tienen muchísimas utilidades, pero qué son y cómo se calculan.



Una borrasca sobre Islandia. El patrón que sigue se aproxima a la forma de una espiral logarítmica.

Imagen de la NASA alojado en Wikimedia Commons. Dominio Público

Empecemos por los logartimos de base 10.

Importante

Se llama logaritmo en base 10 del número x al exponente al que hay que elevar 10 para obtener dicho número.

¿A qué número tenemos que elevar 10 para obtener 100, o lo que es lo mismo $log_{10}100$? Basicamente eso es calcular el logaritmo en base 10 de un número, determinar el exponente al que debemos elevar 10 para obtener el número dado.

Ejemplos:

$$log_{10}100=2$$

$$log_{10}10000 = 5$$

$$log_{10}10000000 = 8$$

Importante

Se llama logaritmo en base a del número x al exponente b al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

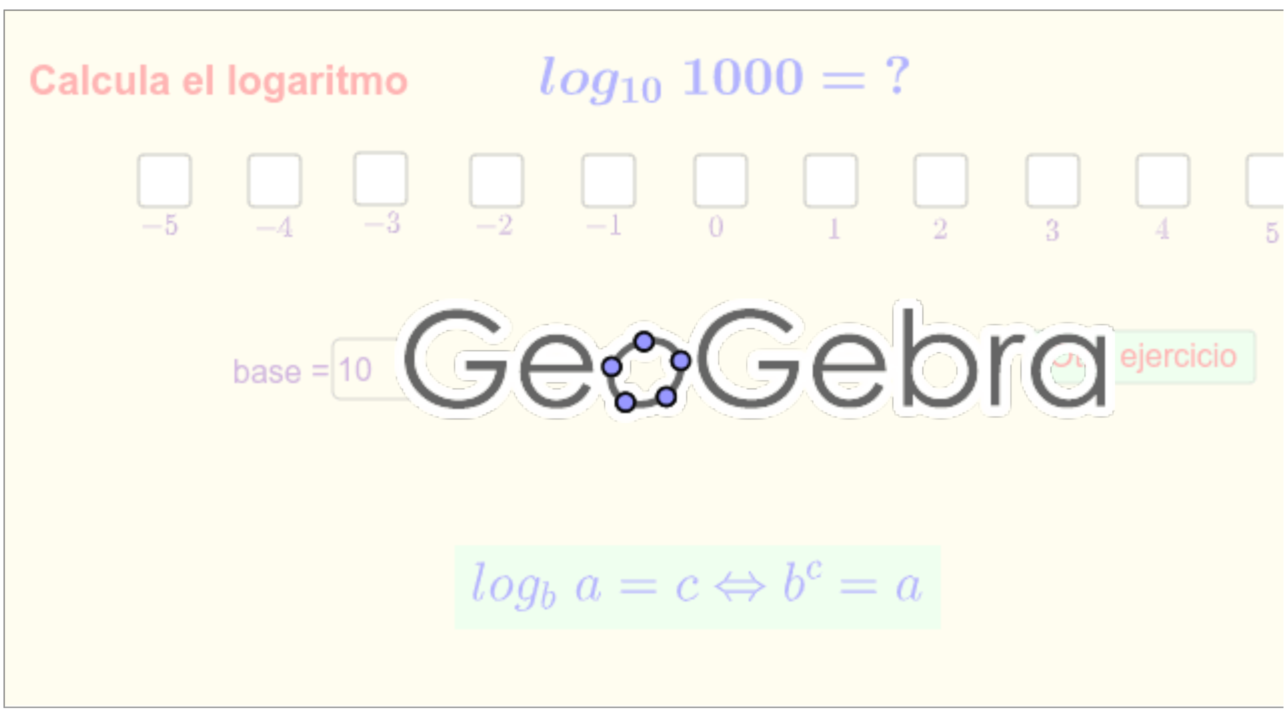
$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

con a>0 y a distinto de 1

Si no se indica ninguna base, hacemos referencia a logaritmos en base 10.

Comprueba lo aprendido

Utiliza el siguiente applet para practicar el concepto de logaritmo:



Applet de Fernando Díaz alojado en geogebra.org. Licencia CC

Calcula el $log_5 125$

- 1
- 3
- 4
- 25

Piensa en el exponente al que debes elevar 5 para obtener 125.

¡Correcto!

Piensa en el exponente al que debes elevar 5 para obtener 125.

Piensa en el exponente al que debes elevar 5 para obtener 125.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Determina $log_3 81$

- 27
- 81
- 4
- 3

Piensa en el exponente al que debes elevar 3 para obtener 81.

Piensa en el exponente al que debes elevar 3 para obtener 81.

¡Correcto!

Piensa en el exponente al que debes elevar 3 para obtener 81.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Ejercicio Resuelto

Halla el valor de x en las siguientes expresiones

a) $log_x 32 = \frac{5}{2}$

b) $log_x 5 = \frac{1}{2}$

c) $log_x 4 = -\frac{2}{3}$

Aplicaremos en ambos casos la definición de logaritmo.

a. Buscamos $log_x 32 = \frac{5}{2}$ el valor que al elevarlo a $\frac{5}{2}$, obtenemos 32, es decir $x^{\frac{5}{2}} = 32$. Si elevamos ambas expresiones a $\frac{2}{5}$, obtenemos $x = 32^{\frac{2}{5}} = 2^{5\left(\frac{2}{5}\right)} = 2^2 = 4$.

   Ten en cuenta que hemos elevado a $\frac{2}{5}$ para eliminar la potencia de la incógnita x.

b. Análogamente calculamos $log_x 5 = \frac{1}{2}$. Buscamos la x de la siguiente expresión $x^{\frac{1}{2}} = 5$. Elevamos ambas expresiones a 2 para eliminar la potencia de la incógnita $x = 5^2$, por lo que x = 25.

c. Buscamos el valor de x para la expresión $x^{\left(-\frac{2}{3}\right)} = 4$. Elevamos ambas expresiones a $-\frac{3}{2}$ para obtener $x = 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{2^6}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$. Así

$x = \frac{1}{8}$

Importante

Se llama logaritmo neperiano o en base e al logaritmo cuya base es el número e = 2.718281.
Lo representamos por L o Ln.

Caso práctico

La expresión que determina el tiempo de un fósil es la siguiente

$$t = -8311.69 \cdot ln(\frac{x}{100})$$

donde x representa el porcentaje de carbono 14 de los restos del fósil encontrado respecto de un especimen vivo.

Si en el fósil que hemos encontrado en nuestra excavación tan solo se detecta el 10 % de carbono 14 respecto de un especimen vivo, ¿qué estimación podemos hacer de los años que han transcurrido desde que murio el animal?

Para determinar la edad de nuestro fósil, tan solo debemos sustituir la variable x por el porcentaje de carbono 14 que se detecta en el animal.

$t = -8311.69 \cdot ln(\frac{10}{100}) = 19138$

Por lo tanto nuestro fósil tiene 19138 años.

Para saber más

En el siguiente vídeo puedes repasar todos los conceptos que hemos visto en este apartado con ejemplos incluidos:

Vídeo de lasmatematicas.es alojado en Youtube

3.2. Propiedades

Como todo en las matemáticas, los logartimos se descubren por necesidades de la humanidad. En este caso la necesidad de realizar grandes operaciones aritméticas, en concreto multiplicaciones y divisiones. Gracias a los logartimos, las enormes multiplicaciones relacionadas con distancias espaciales se podían convertir en sumas, utilizando una serie de propiedades. Las famosas tablan de logaritmos ayudanban a realizar estas transformaciones.

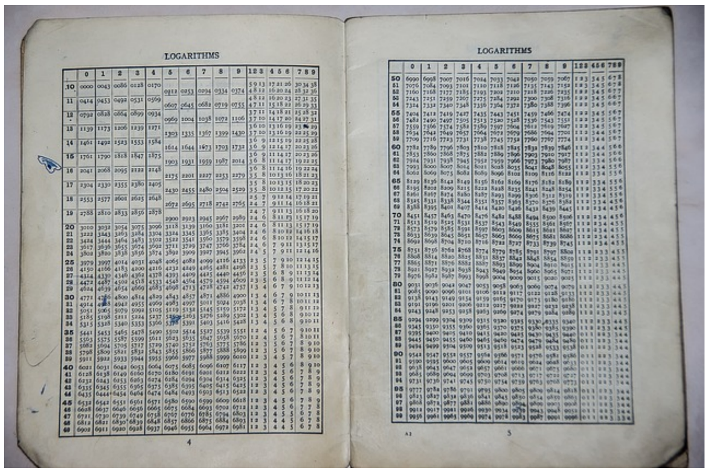


Imagen de sandid en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

Propiedades básicas

$log_a 1 = 0$

$log_a a = 1$

$$log_a a^n = n$$

Estas propiedades son muy fáciles de recordar, tan solo debes pensar en la definición de logaritmos. Veamos la primera propiedad $log_a 1$ ¿Cuál es el exponente al que debemos elevar a un número para que el resultado sea 0? Recuerda las propiedades de los número exponenciales. Cualquier número elevado a 0 es 1, por lo que $log_a 1 = 0$. Puedes razonar igual con el resto de las propiedades. Además, ya las vimos en el último vídeo del apartado anterior.

Importante

Propiedades de las operaciones con logaritmos

El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos

$log_a(p \cdot q) = log_a p + log_a q$

El logaritmo de uncociente es la diferencia de los logaritmos

$log_a(\frac{p}{q}) = log_a p - log_a q$

El logaritmo de una potencia es el exponente multiplicado por el logaritmo de la base

$log_a p^n = n \cdot log_a p$

El logaritmo de una raíz es el logaritmo del radicando dividido por el índice

$$log_a \sqrt[n]{p} = (\frac{log_a p}{n})$$

Comprueba lo aprendido

Antonio es un alumno de 4.º de ESO que en su examen de logaritmos ha obtenido 4.5. En una de las preguntas, Antonio ha indicado lo siguiente log (7+5) = log 7 + log 5 y su profesor lo ha tachado. Antonio está convencido que el ejercicios es correcto y que superará el examen. ¿Puedes indicar si el razonamiento de Antonio es correcto?
El razonamiento de Antonio es correcto.

Sugerencia

Verdadero   Falso

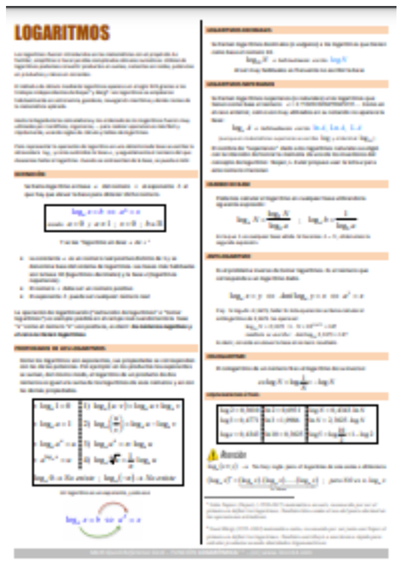
Falso

Como puedes observar en las propiedades de los logaritmos log (a·b)= log a + log b, por lo que log 7 + log 5 = log (35), por lo que la afirmación es falsa.

No olvides que a la hora de calcular logaritmos siempre tienes que tener en cuenta la base aplicada.

Por ejemplo, si trabajas con logaritmos en base 3 ($\log_3$), sabes que $\log_3 3 = 1$, $\log_3 9 = 2$ o que $\log_3 27 = 3$.

En el siguiente pdf tienes una guía de todo lo visto en este apartado:


LOGARITMOS

PDF de Jesús Plaza M alojado en [3con14]

Ejercicio Resuelto

Si sabemos que log 2 ≈ 0.3 y log 3 ≈ 0.48, calcula los siguientes valores:

a. log 20
b. log 60
c. log 0.3
d. log 45

a. log 20 = log (2·10)= log 2 + log 10 ≈ 0.3 + 1 = 1.3

b. $\log 60 = \log(2\cdot3\cdot10) = \log 2 + \log 3 + \log 10 \approx 0.3 + 0.48 + 1 = 1.78$

c. $\log 0.3 = \log \frac{3}{10} = \log 3 - \log 10 \approx 0.48 - 1 = -0.52$

d. $\log 45 = \log(9\cdot5) = \log 9 + \log 5 = \log 9 + \log \frac{10}{2} = \log 3^2 + \log 10 - \log 2 =$

$2\cdot\log 3 + \log 10 - \log 2 = 0.96 + 1 - 0.3 = 1.66$

Ejercicio Resuelto

Si sabemos que $\log 2 \approx 0.3$ y $\log 3 \approx 0.48$, calcula el valor de $\log 2.88$.

En primer lugar, siempre convertiremos el número decimal a fracción , por lo que

$$2.88 = \frac{288}{100}$$

$$log 2.88 = log\frac{288}{100} = log 288 - log 100$$

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Factorizamos 288 obtenemos que $288 = 2^5 3^2$

Así

$$log 2.88 = log\frac{288}{100} = log 288 - log 100 = log(2^5\cdot3^2) - log 100 = log 2^5 + log 3^2 - log 100 = 5 log 2 + 2 log 3 - log 100 \approx 5\cdot0.3 + 2\cdot0.48 - 2 = 1.5 + 0.96 - 2 = 0.46$$

Ejercicio Resuelto

Sabiendo que el $log 2 = 0{,}3010300$ y el $log 3 = 0{,}4771213$, calcule:

$log 4 \quad log 6 \quad log 15 \quad log\frac{1}{8} \quad log\sqrt{6} \quad log 6{,}75$

$$\log_{10}4 = \log_{10}2^2 = 2\log_{10}2 = 0.602\,059\,99$$

$$\log_{10}6 = \log_{10}2 \cdot 3 = \log_{10}2 + \log_{10}3 = 0.778\,151\,25$$

$$\log_{10}15 = \log_{10}\frac{30}{2} = \log_{10}30 - \log_{10}2 = \log_{10}3 \cdot 10 - \log_{10}2 =$$
$$= \log_{10}3 + \log_{10}10 - \log_{10}2 == \log_{10}3 + 1 - \log_{10}2 = 1.176\,091\,3$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{8}\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{2^3}\right) = \log_{10}(2^{-3}) = -3\log_{10}2 = -0.903\,089\,99$$

$$\log_{10}\sqrt[2]{6} = \log_{10}\left(6^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log_{10}(2 \cdot 3) = \frac{1}{2}[\log_{10}2 + \log_{10}3] = 0.389\,075\,63$$

$$\log_{10}6.75 = \log_{10}\frac{675}{100} = \log_{10}\frac{27}{4} = \log_{10}27 - \log_{10}4 =$$
$$\log_{10}3^3 - \log_{10}2^2 = 3\log_{10}3 - 2\log_{10}2 = 0.829\,303\,77$$

Para saber más

En el siguiente vídeo puedes repasar todas las propiedades de los logaritmos con ejemplos:

Vídeo de lasmatematicas.es alojado en Youtube

Resumen

Importante

Los números irracionales son aquellos que poseen un desarrollo decimal con infinitas cifras decimales no periódicas. Un número irracional nunca se puede expresar como una fracción o cociente de números enteros. Por ejemplo π, $\sqrt{2}$ y en general cualquier raíz cuadrada de un número natural que no sea cuadrado perfecto, son números irracionales.

Al conjunto de los racionales e irracionales es lo que denominamos números reales. Que para simplificar se expresa con una R.

Llamaremos recta real a una recta graduada en la que se fija como origen el número 0, se determina una unidad y se van colocando los números positivos hacia la derecha y los negativos a la izquierda.

Cada número real ocupa un lugar en la recta real, y viceversa, cada punto de la recta real está ocupado por un número real.

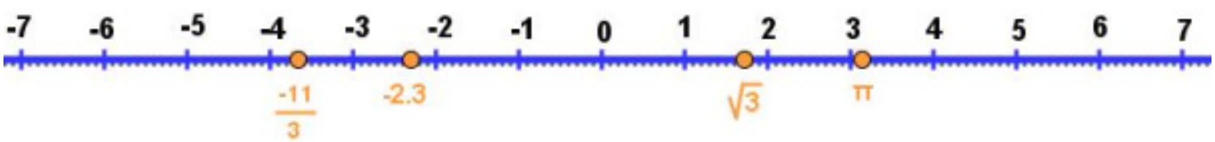


Imagen de elaboración propia

Si $a < b$ se llama intervalo de extremos a y b al conjunto de números que están entre a y b en la relación de orden. Según contengan o no los extremos los intervalos se llaman cerrados, abiertos o semicerrados o semiabiertos si contienen solamente uno de los extremos.

Importante

Dos maneras de aproximar un número decimal son el truncamiento y el redondeo.

Una aproximación por truncamiento consiste en suprimir todos los decimales a partir de una cierta cifra.

Es decir, si el truncamiento se hace a la cuarta cifra decimal, a partir de ella suprimimos el resto del desarrollo decimal. Por ejemplo, aproximar π como 3,1415 es realizar un truncamiento a la cuarta cifra decimal.

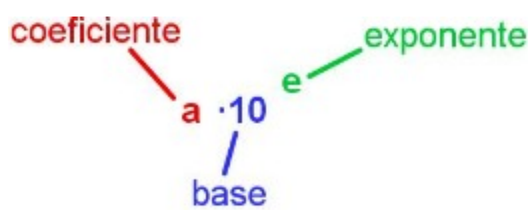
Una aproximación por redondeo consiste en suprimir todos los decimales a partir de una cierta cifra, teniendo en cuenta que si la primera cifra que se suprime es mayor o igual que 5, se aumenta en una unidad la última cifra de la aproximación.

Se denomina error absoluto a la diferencia entre el valor real de un número y su aproximación. Se suele tomar el valor absoluto de dicha diferencia.

Se define error relativo de una aproximación a un número como el cociente entre el error absoluto y el valor del número. El error relativo se puede expresar en tanto por uno o en tanto por ciento.

Importante

Un número escrito en notación científica se compone de de tres partes:



El coeficiente es un número decimal con una única cifra entera distinta de cero y dos o tres cifras decimales significativas.

La base es siempre el número 10.

Y el exponente, que indica el número al que se eleva la base, es un número entero.

Importante

Se llama logaritmo en base a del número x al exponente b al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

con a>0 y a distinto de 1

Si no se indica ninguna base, hacemos referencia a logaritmos en base 10.

Propiedades

$log_a 1 = 0 \; log_a a = 1$

$log_a a^n = n \; log_a (p \cdot q) = log_a p + log_a q$

$log_a (\frac{p}{q}) = log_a p - log_a q$

$log_a p^n = n \cdot log_a p$

$log_a \sqrt[n]{p} = (\frac{log_a p}{n})$

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito NDVA.

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y