Análisis I: Funciones elementales III

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

1.º Bachillerato

Contenidos

Análisis I:

Funciones elementales III

1. Funciones definidas a trozos

¿Has ido alguna vez a correos o alguna empresa de mensajería para enviar un paquete?

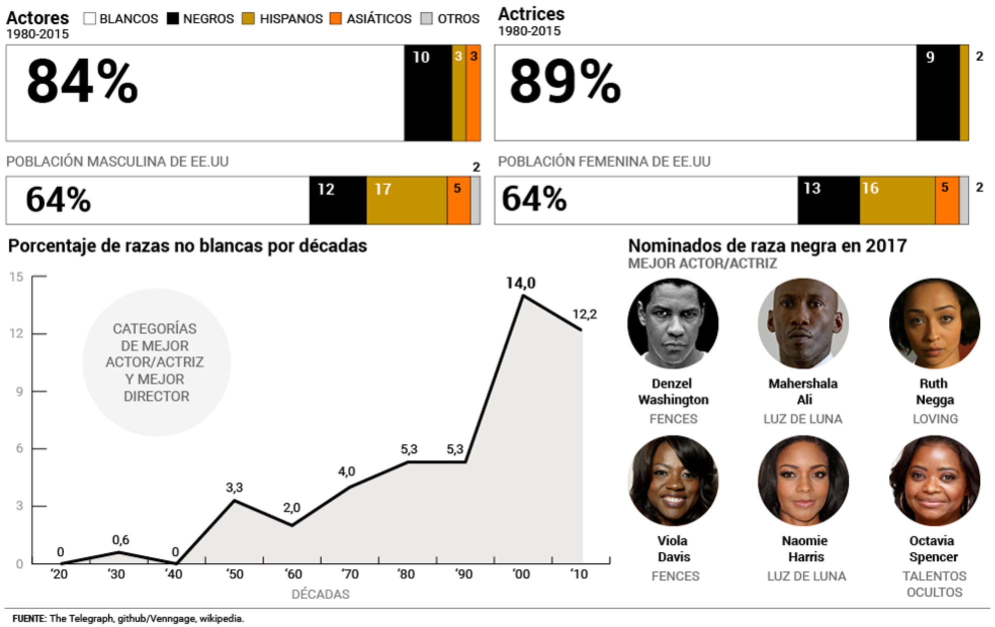
Si es así, habrás visto que lo primero que hacen es coger el paquete y ponerlo en una báscula para pesarlo. Una vez pesado te dicen cuánto tienes que abonar para hacer el envío. Pero esta cantidad no es proporcional, es decir, no se aplica una regla de tres, porque a lo mejor si pesa 4 kg pago lo mismo que si pesa 6 kg, o pago sólo un euro más mientras que si pesaba 3 pagaba uno menos.

Las tarifas de correos van por tramos, desde tal peso hasta tal otro vale una cantidad y así sucesivamente, es decir, las tarifas van por **trozos**.

Imagen de Free-Photos en Pixabay. Licencia CC

1.1. Definición y propiedades

Observa la siguiente gráfica (pincha en la imagen para ampliar) sobre cómo han evolucionado las nominaciones a actores y actrices de raza negra por décadas:



Como puedes ver el gráfico está compuesto por segmentos. Podríamos decir que la función que está representada está definida a trozos. Para dar una función a trozos tenemos que decir cuál es la función en cada trozo y sobre qué intervalo o puntos está actuando.

Importante

Una función definida a trozos es aquella cuya expresión analítica contiene más de una fórmula: para distintos valores de la variable independiente "x" se deben usar distintas fórmulas que permitan calcular la imagen "y" que les corresponde.
Para cada valor de "x", hemos de tener claro qué trozo de función hay que asociarle, por lo que es absolutamente imprescindible que cada fórmula se acompañe de un dominio donde aplicarse. Así, la expresión analítica general de una función definida a trozos tiene que tener el siguiente aspecto:

$$f(x) = \begin{cases} \text{Fórmula}_1 & \text{si } x \text{ pertenece a Dominio}_1 \\ \text{Fórmula}_2 & \text{si } x \text{ pertenece a Dominio}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \text{Fórmula}_n & \text{si } x \text{ pertenece a Dominio}_n \end{cases}$$

Y los dominios de cada fórmula serán intervalos o puntos.
El dominio de toda la función es la unión de los dominios de cada uno de los trozos.

Teniendo en cuenta esta definición, en la siguiente escena prueba a determinar la imagen de los siguientes valores:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_funciones_elementales-JS-apli/4q10_ejercicios_resueltos_2c.htm

Los intervalos en que está definida una función a trozos pueden ser abiertos, cerrados o abiertos en un extremo y cerrados en el otro. Aunque esto pueda parecer una cuestión sin importancia, la tiene en los casos en que el punto extremo no pertenezca a ninguno de los dos intervalos que separa o bien, no coincidan las imágenes en el punto de las funciones definidas en dichos intervalos correlativos. Este hecho se refleja en los gráficos a través puntos rellenos y puntos huecos. Esto se hace para diferenciar si el punto entra o no en la función. Si el punto entra, éste se rellena y si la función se acerca hasta el punto pero sin que el extremo entre, éste se queda sin rellenar.
Este hecho se tendrá en cuenta tanto al estudiar el dominio y como la continuidad de la función.

Esta escena te ayuda a dibujar cualquier función dividida en tres trozos, aunque si queremos que haya dos, sólo tenemos que hacer coincidir los valores de los controles "a" y "b". Para que la gráfica sea correcta, el valor de "a" siempre tiene que ser más pequeño que el

de "b".
Para cambiar la función, haz doble clic sobre la definición de la parte de la izquierda y escribe la que quieras.
Observa que aparecen las representaciones completas de cada gráfica que hayas escrito. Los puntos negros marcados en estas te indican donde termina o empieza cada trozo de función.

http://www.geogebratube.org/material/iframe/id/50240/width/996/height/526/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/false/smb/false/stb/false/stbh/true/ld/false/sri/false/at/preferjava

Caso práctico

Vamos a representar las siguientes funciones a trozos, ayudándote de la escena anterior.

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & si \quad x\leq 2\\ 4 & si \quad 2<x<4\\ x-5 & si \quad x\geq 4\end{cases}$$

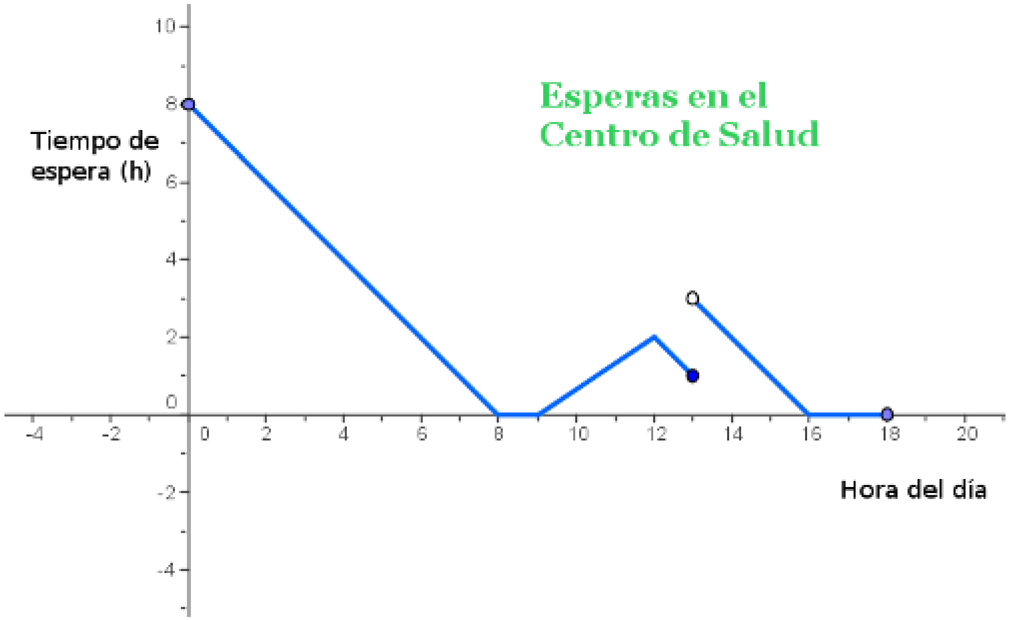
$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & si \quad x<-1\\ x^2 & si \quad -1\leq x\leq 2\\ \frac{x}{2} & si \quad x>2\end{cases}$$

En este vídeo te mostramos cómo hacer paso a paso estas gráficas:

Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/ggMcyTDHzwI

Caso práctico

Fíjate en esta curiosa gráfica que muestra el tiempo de espera de una persona que acude a un centro de salud según la hora de la mañana a la que va.



Puedes ver que en este Centro, la consulta empieza a las 8 de la mañana, así que si se te ocurre ir a las 12 de la noche (0 horas) vas a tener que esperar hasta las ocho de la mañana.
Además, a las 2 de la tarde paran las consultas dos horas, para que el personal sanitario y administrativo pueda ir a comer, por lo que a las 13 h (1 de la tarde) dejan de recibirse pacientes para el turno de mañana, teniendo que esperar entonces al turno de tarde, donde la consulta está abierta de 4 a 6 de la tarde (desde las 16 hasta las 18 h).
Si te fijas, mirando la gráfica podemos saber cuánto tiempo debe esperar una persona que va a las 6 de la mañana, o a las 8:45, o a las 17h, pero no se ve tan claro el tiempo que debe esperar si acude a las 10:15 o a las 12:30.
Con objeto de mejorar el servicio, los responsables del centro han acudido a la asesoría de Eva y Evaristo para que les ayuden a mejorar estos tiempos de espera. Éstos, lo primero que van a hacer es poner el tiempo de espera como una función. ¿Se podrá

encontrar la expresión analítica de la función que da el tiempo de espera según la hora a la que llega el paciente?
Vamos a ver que sí, que es posible, y puesto que nuestra gráfica está formada por trozos de rectas, la función será una función a trozos.

Imagen de dePorcuna bajo CC

Trozo I: Desde las 0h hasta las 8h.

Como en esta zona la gráfica es una recta, hemos de encontrar la ecuación de esa recta. Lo hacemos de la misma forma que en el tema anterior. Tenemos dos puntos por los que pasa (0,8) y (8,0). Calculamos su pendiente y nos sale que ésta es -1. Además, como pasa por el punto (0,8), sabemos que la ordenada en el origen es 8.

Por tanto, la ecuación de esa recta es: $y = -x + 8$.

Trozo II: Desde las 8 hasta las 9

En esta zona, la gráfica es una recta horizontal y por tanto corresponde a una función constante. Como está a la altura cero, la función en ese trozo es:

$y = 0$

Trozo III: Desde las 9 hasta las 12 h.

Aquí, la gráfica es una recta ascendente. Dos puntos de referencia serían (9,0) y (12,2), así que, la pendiente sería 2/3 y la ordenada en el origen -18/3

Por tanto en este tramo la función es: $y=\frac{2}{3}x-\frac{18}{3}$

Trozo IV: Desde las 12 hasta la una de la tarde.

Ahora la recta es descendente y pasa por los puntos (12,2) y (13,1). Fácilmente se ve que la pendiente es ahora -1 y que la ordenada en el origen es 14, luego la recta es:

y = - x + 14

Trozo V: Desde las 13 h hasta las 16 h.

Nuevamente tenemos una recta descendente que ahora pasa por los puntos (13,3) y (16,0). Volvemos a calcular la pendiente y nos vuelve a salir -1 y hallando la ordenada en el origen, obtenemos que ésta es 16. Por tanto, la ecuación es:

y = - x + 16

Trozo VI: Desde las 16 hasta las 18 horas.

A estas horas se ve que no acude mucha gente porque el tiempo de espera es cero y se mantiene constante, luego la recta que cubre esta zona es nuevamente y = 0.

Por tanto, ya lo tenemos. Nos falta por tener en cuenta el punto cerrado y abierto de las 13 horas. El que llega a la una de la tarde, esperará una hora pero el que llegue a la una y minuto esperará 3, es decir, el signo igual hay que ponerlo con el tramo que va de 12 a 13, que es quién tiene el punto cerrado. En el tramo de 13 a 16 habrá que poner desigualdad estricta a las 13 horas, pues no entrará en ese apartado.

La expresión analítica de la función es por tanto:

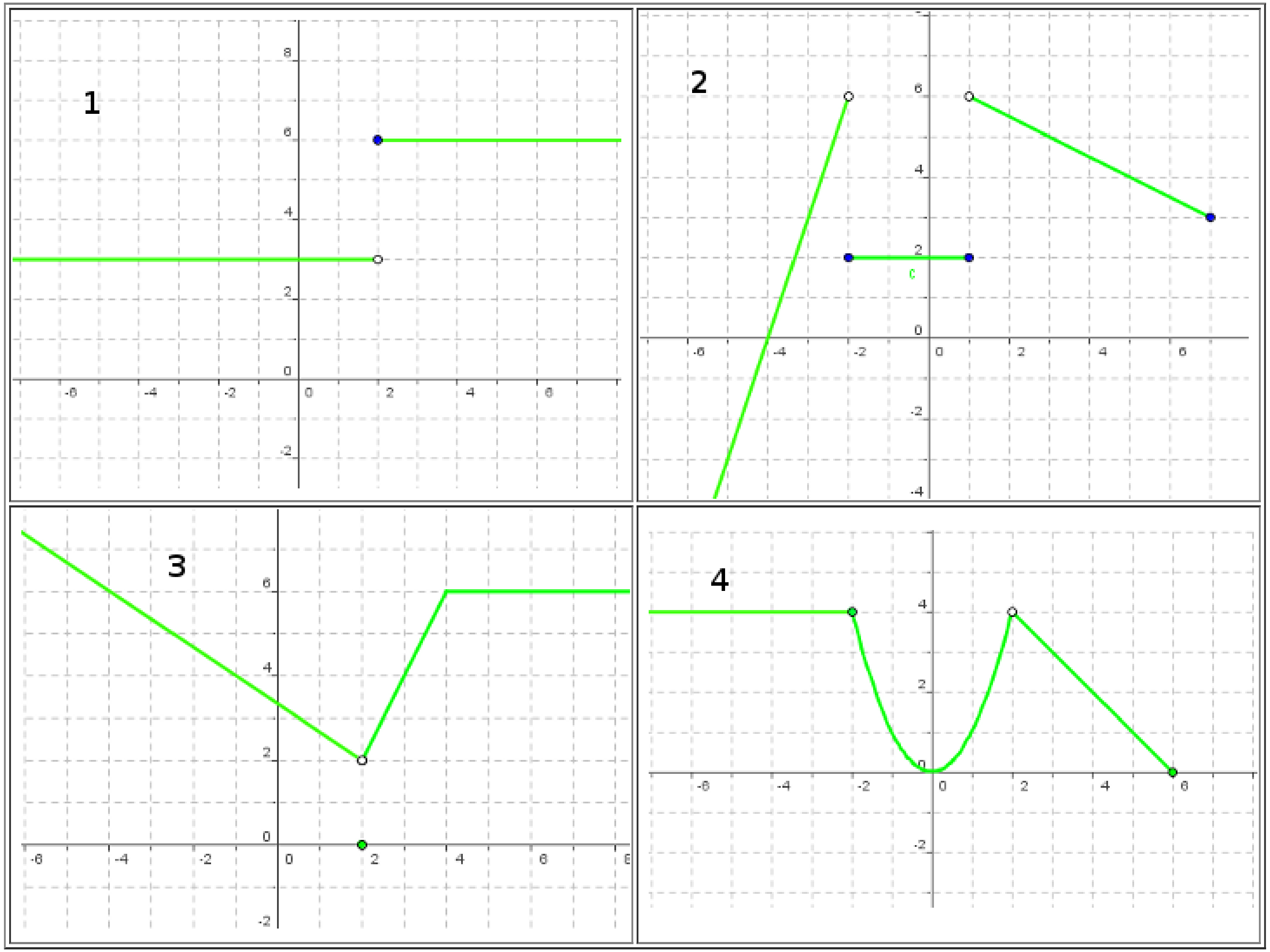
$$f(x)=\begin{cases} -x+8 & si \quad 0\le x\le 8 \\ 0 & si \quad 8<x\le 9 \\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{18}{3} & si \quad 9<x\le 12 \\ -x+14 & si \quad 12<x\le 13 \\ -x+16 & si \quad 13<x\le 16 \\ 0 & si \quad 16<x\le 18 \end{cases}$$

Observa que los ≤ de 8, 9, 12 y 16, podrían haberse puesto en cualquiera de los dos lados donde aparecen, ya que la función es continua en esos puntos y no presenta saltos.

Ahora ya sí que podemos calcular con total exactitud cuánto tiempo tarda en ser atendido una persona que llega, por ejemplo, a las 10:45. Sustituiríamos x por 10,75 (10:45 es 10 y tres cuartos) en el tercer trozo de la función.

Comprueba lo aprendido

Vamos a ver si lo has entendido.
Cógete papel y lápiz y averigua la fórmula que le corresponde a cada una de las cuatro gráficas siguientes:



Las fórmulas que corresponden a estas funciones son:

Gráfica 1

$$f(x)=\begin{cases} 3 & si \quad x<2 \\ 6 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Gráfica 2

$$f(x)=\begin{cases} 3x+12 & si \quad x<-2 \\ 2 & si \quad -2\leq x\leq 1 \\ \dfrac{-1}{2}x+\dfrac{13}{2} & si \quad 1<x\leq 7 \end{cases}$$

Gráfica 3

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{3}x+\dfrac{10}{3} & si \quad x<2 \\ 0 & si \quad x=2 \\ 2x-2 & si \quad 2<x\leq 4 \\ 6 & si \quad x>4 \end{cases}$$

Gráfica 4

$$f(x)=\begin{cases} 4 & si \quad x\leq -2 \\ x^2 & si \quad -2<x<2 \\ -x+6 & si \quad 2<x\leq 6 \end{cases}$$

2. Dos funciones a trozos clásicas

En este segundo apartado del tema, vamos a tratar dos funciones concretas que en matemáticas y en otras ciencias suelen aparecer con cierta frecuencia.

Imagen de Peggy_Marco en Pixabay. Pixabay License

En ocasiones necesitamos trabajar solo con resultados positivos. Pues para conseguir esto, para convertir lo negativo en positivo, tenemos **la función valor absoluto** y como veremos a continuación, su gráfica, es la de una función a trozos.
En otras situaciones, los decimales carecen de sentido y entonces es cuando entra en juego **la función parte entera**, que veremos en el siguiente punto.

2.1. La parte entera

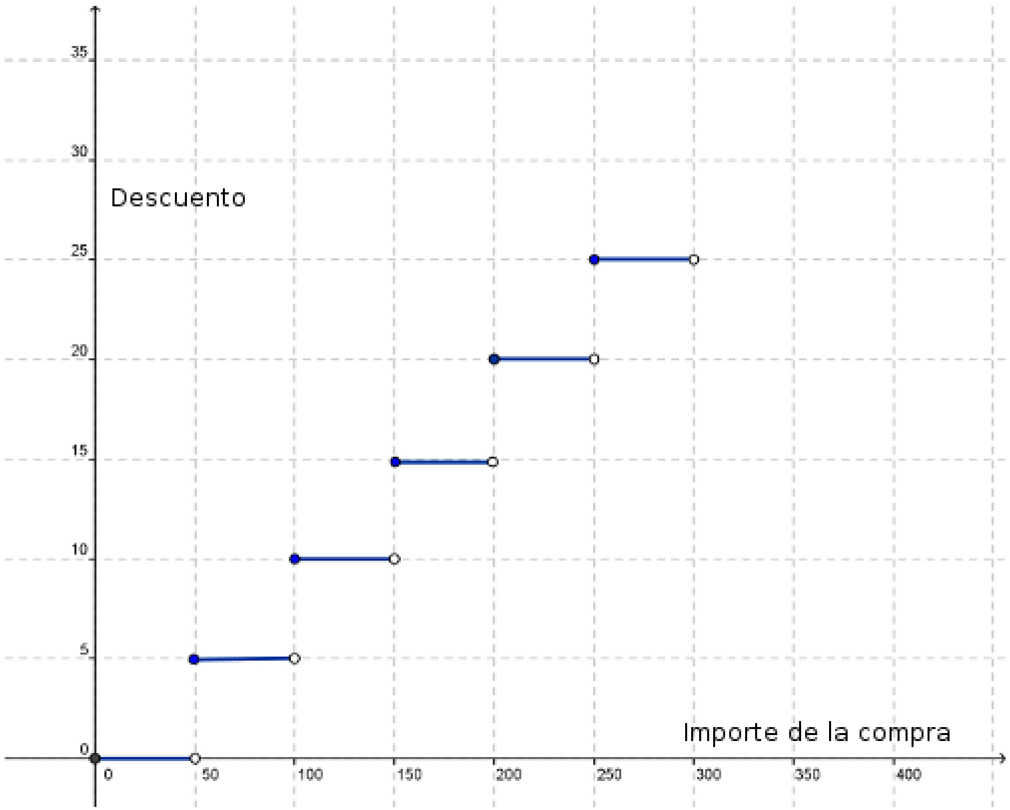
Ejemplo:

El supervisor de un supermercado tras hacer un estudio de la cuota de mercado y de las ventas del supermercado en los últimos años, decide proponer a la empresa que lancen un paquete de ofertas o de descuento: por cada 50 euros de compra regalar un cheque-descuento de 5 para la próxima compra o algo similar.

Imagen de Free-Photos en Pixabay. Licencia CC

La empresa decide ponerla en práctica. Por cada 50 € en compra regala un bono de descuento de 5 €. Así, una persona que vaya a gastar 90 €, apurará un poquito más e intentará llegar a 100 € para que le regalen 10 y no 5 euros.
Pues bien esta situación tan habitual se corresponde con la función parte entera. Si dividimos el valor de la compra entre 50 tendremos el número de bloques de 50 € que hemos gastado, y si le quitamos los decimales, el número de cheques-descuentos que te corresponden.

Esta sería la gráfica de la función que relaciona el importe de la compra con el valor del descuento:

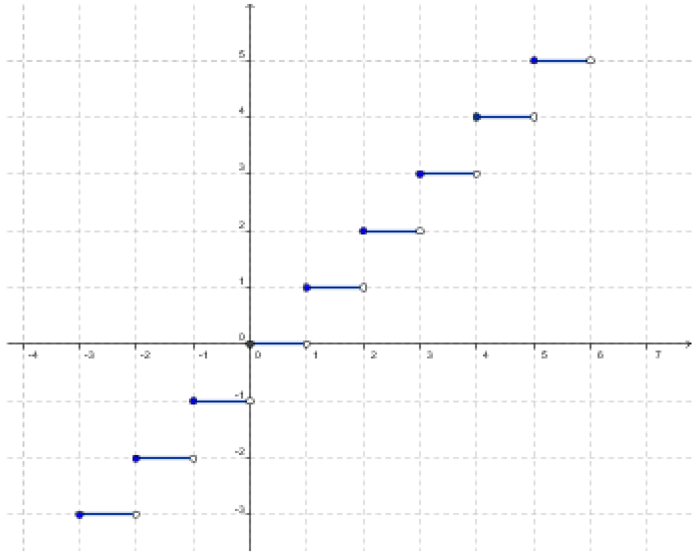


Importante

La función **parte entera**, que se representa por E[x] o Ent(x), es la función que asocia a cada número decimal su parte entera, es decir, el **mayor número entero menor o igual que x**.

Por ejemplo, Ent(3,45) = 3, Ent(0,48) = 0, pero la parte entera de -1,28 no es -1, sino -2, pues asignamos el número entero más próximo al número decimal pero menor que él.

La gráfica de la función parte entera es:



En forma de función a trozos, la función es:

$$Ent(x)=\begin{cases} \ldots & \\ -2 & \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \ldots & \end{cases}$$

De manera más simple: Ent(x) = {n si n ≤ x < n+1, siendo n un número entero}.

Comprueba lo aprendido

Calcula la parte entera de los siguientes números:

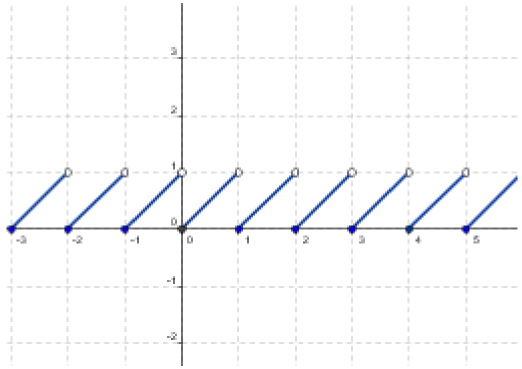
1. Ent(10,6398)=
2. Ent(0,00001)=
3. Ent(-1,5)=

4. Ent(-0,78)=
5. Ent(2567)=
6. Ent(-8632,45)=

Para saber más

Otras funciones a trozos similares a esta que hemos visto son las funciones parte decimal y signo.

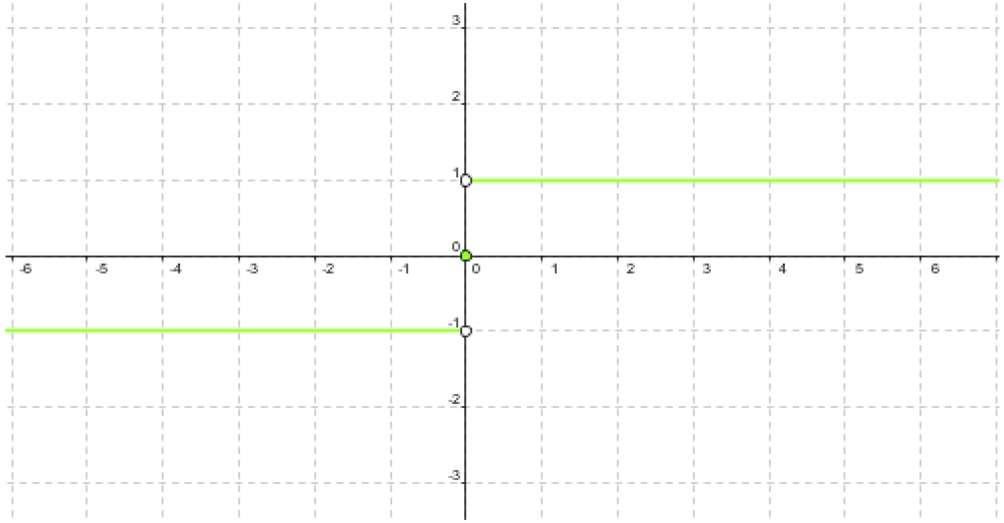
La función parte decimal se define como **y = x - Ent(x)**. Su gráfica es:



La otra función, la **función signo**, sig(x) es la función que le asocia el valor 1 a los números positivos, el -1 si es negativo y el 0 al 0. Es decir,

$$sig(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ 1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

La gráfica sería esta:



2.2. El valor absoluto

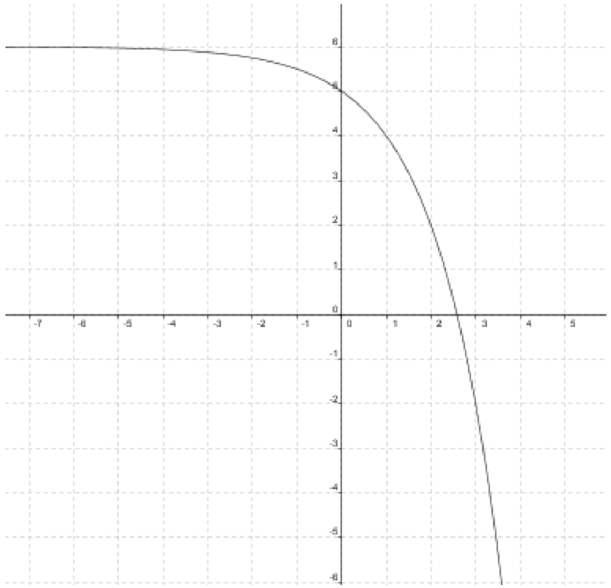
Como ya sabemos, el valor absoluto transforma en positivo un número negativo y lo deja positivo si es positivo. Así, en una función f(x), si construimos la función g(x) = |f(x)|, ésta se queda igual en el trozo donde la función es positiva (está por encima del eje OX) y se lleva a positiva todo el trozo donde la función es negativa (por debajo del eje OX) como si se doblara la gráfica por el eje OX.

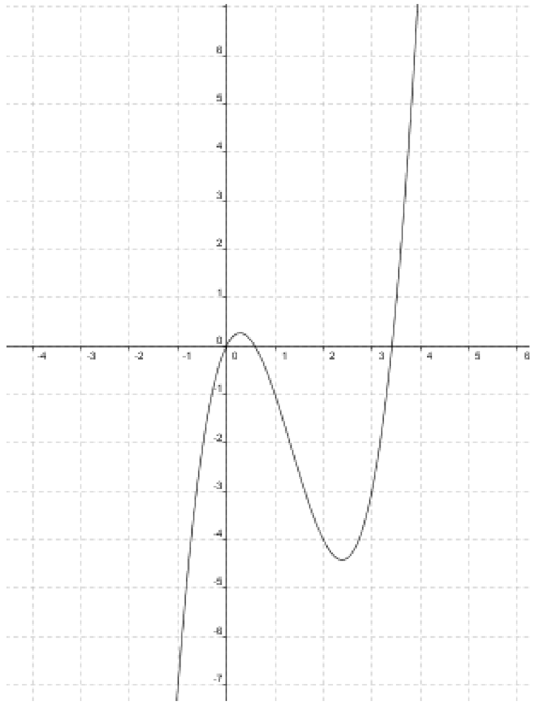
Observa la siguiente escena para ver cómo se construye la gráfica del valor absoluto de una gráfica cualquiera. En la barra de entrada inferior puedes ir cambiando la función y cuando lo hagas le das a la tecla "entrar" :

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_funciones_elementales-JS-apli/4q10_ejercicios_resueltos_2d.htm

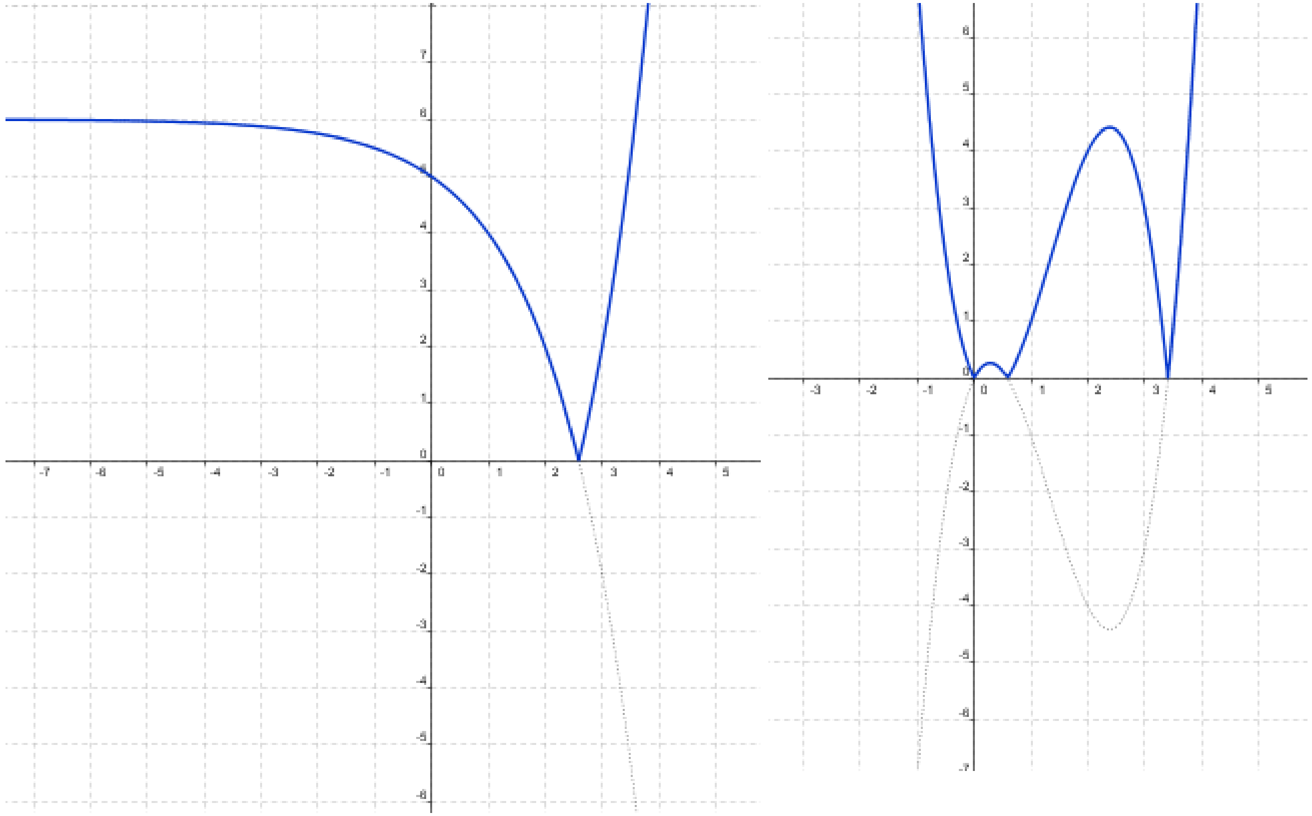
Comprueba lo aprendido

Cógete papel y lápiz y haz las gráficas del valor absoluto de las funciones cuyas gráficas son las siguientes:





Las gráficas deben haberte salido similares a estas:



Acabamos de ver cómo actúa el valor absoluto sobre la gráfica de una función. Vamos ahora a transformar el valor absoluto de una función en una función a trozos, y lo vamos a hacer sobre la más simple, sobre f(x) = |x|

Ya sabemos, que el valor absoluto deja lo positivo como positivo y lo negativo lo transforma en positivo.

Por tanto, si x es positivo (x>0) el valor absoluto de x seguirá siendo x, o sea, |x|=x

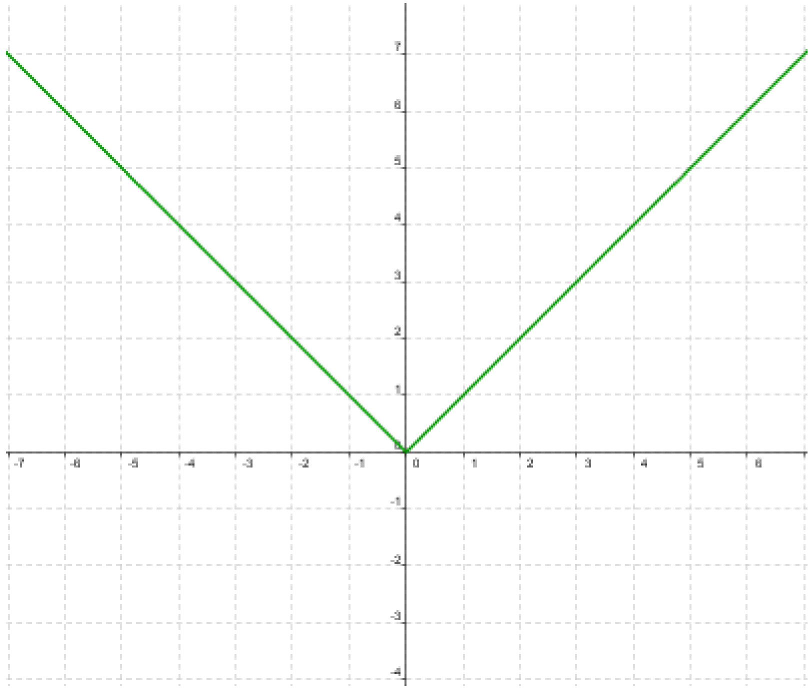
Por otro lado, si x es negativo (x<0) el valor absoluto de x lo cambiará de signo y será así -x, luego, |x|=-x

Y si x = 0, pues seguirá siendo 0 el valor absoluto, o sea, que igual lo podemos poner en cualquiera de las dos desigualdades.

Si lo escribimos como una función a trozos, tendremos que:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

y su gráfica será:



Ejercicio Resuelto

Vamos a transformar en funciones a trozos las siguientes funciones que vienen dadas por valores absolutos:

La primera, f(x) = |2x+4|

Aplicando lo mismo que antes, tendremos que la función vale lo mismo si 2x+4 es positivo y cambiada de signo si es negativo, es decir,

$$f(x) = |2x+4| = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad 2x+4 \geq 0 \\ -2x-4 & \text{si} \quad 2x+4 < 0 \end{cases}$$

Ahora bien, 2x+4 < 0 equivale a decir que 2x < - 4, o lo que es lo mismo que x<-2. Por tanto, nuestra función queda así:

$$f(x)=|2x+4|=\begin{cases} 2x+4 & \text{si } \ x\geq -2 \\ -2x-4 & \text{si } \ x<-2 \end{cases}$$

O de manera ordenada:

$$f(x)=|2x+4|=\begin{cases} -2x-4 & \text{si } \ x<-2 \\ 2x+4 & \text{si } \ x\geq -2 \end{cases}$$

Una vez más, insistimos en que el signo = de la desigualdad da lo mismo donde se coloque, con el < o con el >.

Como segundo ejemplo, vamos a transformar en función a trozos la función y = |-3x + 1|

Empezaríamos de la misma forma:

$$f(x)=|-3x+1|=\begin{cases} -3x+1 & \text{si } \ -3x+1\geq 0 \\ 3x-1 & \text{si } \ -3x+1<0 \end{cases}$$

Y ahora, a ver a qué equivale -3x+1<0. Despejamos y nos queda -3x<-1 y pasando el -3 dividiendo, x>1/3. (Ojo, hay que recordar que cuando se dividía o se multiplicaba por un número negativo, la desigualdad cambiaba de sentido). Así que nos queda:

$$f(x)=|-3x+1|=\begin{cases} -3x+1 & \text{si } \ x\leq \frac{1}{3} \\ 3x-1 & \text{si } \ x>\frac{1}{3} \end{cases}$$

Comprueba lo aprendido

Transforma a trozos la función y = | 4x - 12 | y haz su gráfica.

La función a trozos debe salirte así:

Y su gráfica:

Gráfica del valor absoluto de 4x-12

Para saber más

Si tenemos otro tipo de función la forma de pasarla a trozos es similar. Únicamente varía la forma de transformar los dominios. Por ejemplo, si tenemos $y = |x^2 - 5x + 6|$, empezamos igual:

$$y = \begin{cases} x^2-5x+6 & \text{si } x^2-5x+6 \geq 0 \\ -x^2+5x-6 & \text{si } x^2-5x+6 < 0 \end{cases}$$

Ahora, para ver esa inecuación $x^2-5x+6<0$, resolvemos la ecuación $x^2-5x+6=0$ (aplicando la fórmula) y obtenemos como resultado 2 y 3.

Hacemos una tabla y vemos los signos de la función en cada intervalo:

(-∞ , 2)	**(2 , 3)**	**(3 , + ∞)**
+	-	+

Para completar los signos, le hemos dado un valor a x dentro de ese intervalo, lo hemos sustituido en la función y hemos visto el signo del resultado.
Entonces nuestra función a trozos queda:

$$y=\begin{cases} x^2-5x+6 & \text{si } x\leq 2 \\ -x^2+5x-6 & \text{si } 2<x\leq 3 \\ x^2-5x+6 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

Resumen

Importante

En el siguiente pdf puedes pinchar, para ver un resumen de las principales funciones definidas a trozos:

funciones a trozos >> Documento de descarga