INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

2º de Bachillerato

# Matemáticas II

## Contenidos

## Integrales:
## Integral definida

# 1. La integral definida

Hay veces que nos interesa saber cuánto mide el área de una superficie que está limitad por líneas curvas y nos encontramos con la dificultad de no poder triangularizar la figura para hallar su medida por métodos clásicos. Por ejemplo si queremos hallar la superficie máxima que ocupa una fuente no rectangular. Para resolver ese problema surgió la integral definida.

*Imagen de elaboración propia*

En el tema anterior has visto una de las herramientas más potentes, junto con la derivada, dentro del cálculo infinitesimal: la integral indefinida. Pero esa herramienta surgió como necesidad para resolver un problema ya existente, el cálculo del área de un superficie irregular. Tal como hemos comentado en al apartado anterior que ocurre a menudo, la integral indefinida surgió como herramienta para poder resolver ese problema más general, aunque normalmente se suele conocer antes que la expresión que nos va a permitir hallar la superficie de un recinto irregular.

En el siguiente vídeo podrás ver un problema real de hallar cuánta pintura necesitamos para pintar una piscina irregular y como vamos aproximando por áreas fáciles de encontrar hasta acercarnos al valor. Ese será el método que usaremos en nuestro caso.


*Exploración Básica del Cálculo Integral*

*Vídeo alojado en Youtube*

# 1.1. Interpretación geométrica

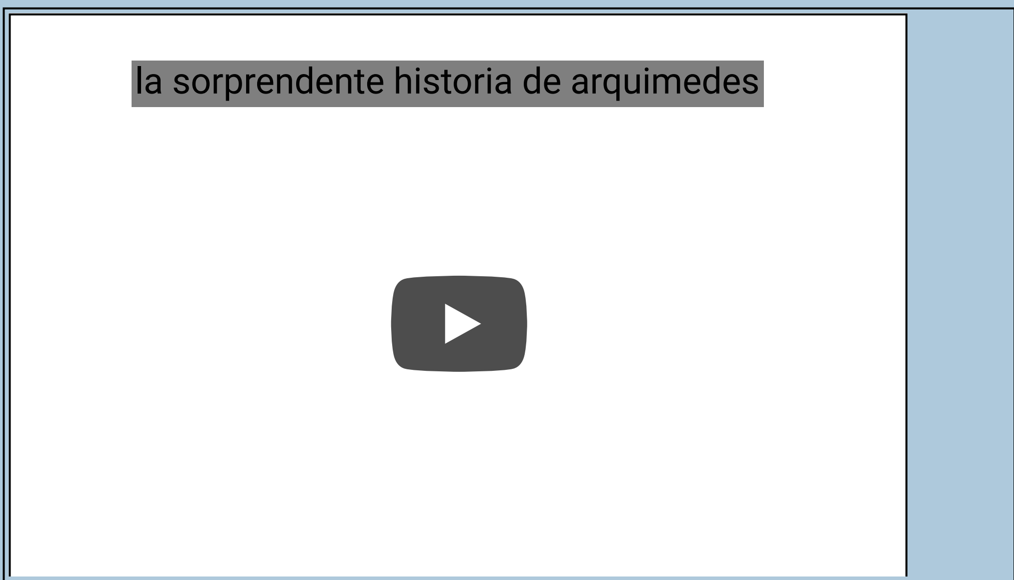
En el vídeo anterior has visto un método de aproximación a una cantidad desconocida acotando por valores superiores e inferiores. Aunque creas que es algo raro la verdad es que es corriente que utilicemos cantidades aproximadas para acercarnos al valor real. Seguro que has visto muchas veces noticias en los medios sobre alguna manifestación, como la de repulsa por los atentados del 11-M que puedes ver en la imagen. Cuando se habla de la cantidad de personas que han ido a alguna de esas manifestaciones suele haber disparidad de cantidades, en algunos casos desorbitantes, pero debe de estar claro que la cantidad real de asistentes debe estar entre los valores más pequeños y otros más grandes.

*Imagen del Banco de Imágenes del ITE de Luana Fischer Ferreira*

Ese método de ir aproximando por valores más pequeños y más grandes recibe el nombre de exhausción y ya fue utilizado por el gran matemático Arquímedes.

## Curiosidad

Arquímedes de Siracusa fue un matemático griego que dejó para la posteridad frases muy famosas como "Eureka, lo encontré" o "Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo". En el siguiente vídeo puedes ver algunos datos sobre su vida y parte de su impresionante legado científico, entre los que se encuentra el cálculo de superficies, origen del concepto de integral.




*Vídeo de Biografías e historias alojado en YouTube*

El procedimiento que vamos a utilizar es aproximar el área que queremos medir mediante rectángulos que son, por un lado menores, y por otro mayores que el valor buscado. Algo parecido al acercamiento a la superficie de la piscina que vimos en el vídeo del apartado anterior.

Iremos dividiendo el intervalo, en el que queremos encontrar el área, en partes iguales y en ellas calcularemos la suma de áreas de rectángulos inferiores y superiores a la función en ese intervalo. En la siguiente ventana interactiva puedes apreciar cuánto va variando esa suma de intervalos a medida que vamos aumentando el número de ellos. Para verlo sólo tienes que aumentar el valor del contador n.

*Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC*

Si tenemos una función f(x) definida en un intervalo [a,b] podemos construir los rectángulos inferiores y superiores, tal como hemos visto en el caso anterior. En ese caso, las sumas de las áreas de los rectángulos reciben el nombre de suma inferior y suma superior de Riemann. Y se verifica que si hallamos el límite de esas sumas, es decir, el valor hacia el que tienden a medida que el número de rectángulos tiende a infinito, ambos límites coinciden y su valor recibe el nombre de **Integral Definida** de la función f(x) entre los valores a y b. Se suele representar por la expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

## Comprueba lo aprendido

En la función que aparece en la ventana, ¿hacia donde tiende el valor de la integral definida en el intervalo [0,3] representado?

Sugerencia

- a) 6,80
- b) 6,96
- c) 7,05

Un poco bajo

Exacto

Todavía baja un poco más.

**Solución**

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

## Importante

La integral definida de una función representa la región limitada por la función entre los extremos del intervalo siempre que la función sea continua y positiva. Si no es así, puede suceder que el valor de la integral sea, por ejemplo, negativo, por lo que no tendría sentido hablar de área limitada. En el próximo tema veremos qué ocurre con la integral de una función cuando no es positiva. De momento seguiremos trabajando simplemente con la integral definida sin fijarnos en su interpretación geométrica.

Estamos seguros de que en muchas situaciones cotidianas te has encontrado con el concepto de la media. Cuando estudias los gastos medios que has tenido en un mes o el número medio de horas que debes dedicarle a la limpieza de la casa para que esté a tu gusto, o el número medio de mensajes sms que recibes en tu móvil al año.

*Imagen de elaboración propia*

Si consideramos, por ejemplo, la producción de setas en la última década, seguro que tendremos un número medio anual. Ese número medio que, lógicamente, se encontrará entre la mayor producción y la menor, equivale a que si todos los años se hubiese obtenido la misma cantidad, al final de la década se tendría tanta cantidad como la obtenida en conjunto en los diez años.

Algo parecido nos va a ocurrir con la integral definida.

### Importante

Consideremos una función f(x) continua en el intervalo [a,b], existe un punto c, interior al intervalo, en el que se verifica.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

La igualdad anterior equivale a decir que el valor de la integral definida coincide con el área de un rectángulo de base la amplitud del intervalo y cuya altura es el valor de la función en el punto intermedio c.

Este resultado se conoce como **TEOREMA DE LA MEDIA** o del Valor Medio.

En la siguiente ventana puedes observar este resultado. Basta que muevas el botón azul, que está sobre el eje X, y observa como puedes encontrar un punto interior en el que los valores de la integral definida y el área del rectángulo coinciden.

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 7.39$$

*Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC*

## Reflexiona

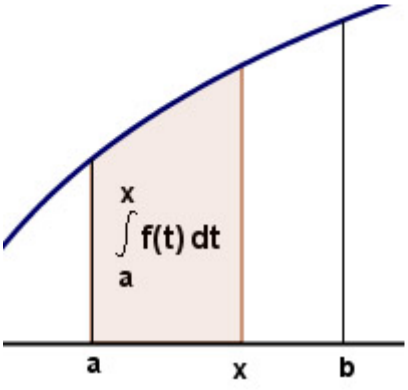
Utiliza la ventana anterior para probar el Teorema del Valor Medio en el intervalo [0,3] para la función *f(x)* e indica aproximadamente en qué punto intermedio c se cumple.

**Mostrar retroalimentación**

Si movemos el punto por el eje x nos va apareciendo el área del rectángulo sombreado. Hay que buscar el punto en el que ese área coincide con la de la integral que ahí aparece.

Si elegimos un punto x, interior al intervalo [a,b] en que está definida la función, y hallamos la integral definida entre el extremo a y ese punto x, su valor depende de ese valor x, por lo que entonces la integral definida se convierte en una función de x que recibe el nombre de **Función Integral**. Se suele representar por la misma letra que la función integrando, pero en mayúscula. En nuestro caso hablaremos de la función F(x) que será

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



## Importante

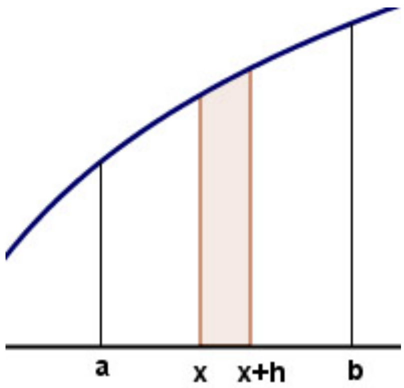
La derivada de la función integral es igual a la función integrando.

Es decir, si $F(x)=\int_a^x f(t)\ dt$ entonces $F'(x)=f(x)$. Esto equivale a decir que la función integral es una primitiva de la función f(x).

Este resultado se conoce como **Teorema Fundamental del Cálculo**.

Lo anterior es muy fácil deducirlo utilizando el Teorema de la Media visto anteriormente. La derivada de la función F(x), según la definición, sería: $F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

El numerador equivaldría a $\int_x^{x+h} f(t)\ dt$, y utilizando el Teorema del valor medio existirá un valor $c\in(x,x+h)$ que verifica que $\int_x^{x+h} f(t)\ dt=f(c)\cdot(x+h-x)=f(c)\cdot h$.




Por tanto $F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c)\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0}f(c)$ y como $c\in(x,x+h)$, al tender h a 0, c debe tender a x.

Luego obtenemos que $F'(x)=f(x)$.

# 1.3. Regla de Barrow

Imagina que una persona aficionada a la repostería (quizás tú valgas como ejemplo) quiere hacer un pastel o un dulce que esté horneado. Para ello necesita los ingredientes y por supuesto una herramienta que le permita cocinar lo que desea. En nuestro caso deberá utilizar un horno que le permita cocinar lo que tiene en la cabeza. A nosotros nos pasa algo parecido.

Ya hemos visto cuál es la interpretación de la integral definida y hemos relacionado, en el apartado anterior, la función integral con la otra gran herramienta del cálculo infinitesimal: la derivada. Pero ahora necesitamos una herramienta que nos permita hallar el valor de la integral definida. Y para ello contamos con la Regla de Barrow.

*Imagen de elaboración propia*

## Importante

**REGLA DE BARROW**

Sea f(x) una función definida en el intervalo [a,b] y sea F(x) una primitiva de dicha función. Se verifica que la integral definida, entre a y b, es igual a la diferencia de la función primitiva en los extremos del intervalo. Es decir,

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

La forma de deducir esta regla es muy simple. Sabemos que la integral indefinida de una función está formada por todas sus primitivas. Es decir, es igual a una primitiva cualquiera más cualquier constante que queramos añadir. Esto lo vimos en el tema anterior. Por ello, $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$

Si sustituimos x por a, obtendríamos el área limitada por la función entre ese valor y él mismo, que lógicamente es cero. Por tanto:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0 \quad \rightarrow \quad C = -F(a)$$

Y en $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ basta sustituir x por b para obtener la Regla de Barrow.

## Ejercicio resuelto

Halla el valor de la integral $\int_0^6 x^2 \, dx$ .

**Mostrar retroalimentación**

Basta que encontremos una primitiva de la función x². Sabemos, por el tema anterior que una primitiva es $\frac{x^3}{3}$ . Por lo tanto:

$$\int_0^6 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 72$$

En el siguiente enlace tienes más ejercicios de integral definida resueltos utilizando la Regla de Barrow.

Ejercicios resueltos

## Reflexiona

Calcula el valor de la integral $\int_0^4 e^{\frac{x}{2}} \, dx$ .

**Mostrar retroalimentación**

Una primitiva de la función $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ es la función $F(x) = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$ .

Por tanto $\int_0^4 e^{\frac{x}{2}} \, dx = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}}]_0^4 = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^0 \approx 12{,}78$

## Comprueba lo aprendido

Escribe el valor de las siguientes integrales (con un máximo de dos decimales).

a) $\int_1^5 x \, dx$ = ☐

b) $\int^2 1 \quad dx$ = ☐

b) $\int_0 \frac{\quad}{x+2}\,dx =$ ______

Enviar

## Ejercicio resuelto

Calcula $\displaystyle\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})\,dx$

Sugerencia: Efectúa el cambio de $\sqrt{x}=t$ .

**Mostrar retroalimentación**

Hacemos el cambio indicado que es equivalente a $x=t^2$.

Podemos hacer dos cosas: hallar primero una primitiva de la función y después sustituir en los límites de integración, o bien, al hacer el cambio también adecuamos los límites de integración. Hagamos esto último.

$$\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})\,dx = \int_0^{\pi} sen(t)\cdot 2t\,dt$$

La integral resultante debemos hacerla por partes:

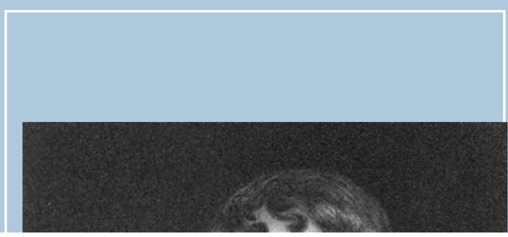
Elegimos $u(t)=2t$ ; $dv(t) = sen(t)\,dt$. Por lo tanto $du(t)=2\cdot dt$ y $v(t)=-\cos(t)$

$$\int_0^{\pi} sen(t)\cdot 2t\,dt = \left[-2t\cdot\cos(t)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\cos(t)\,dt = \left[-2t\cdot\cos(t)\right]_0^{\pi} + \left[2sen(t)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[-2\pi\cos(\pi)-0\right]+\left[2sen(\pi)-2sen(0)\right] = 2\pi$$

## Curiosidad

Ya en el vídeo introductorio del tema, al hablar de los precursores del Cálculo, se citó el nombre de Isaac Barrow, matemático, profesor y teólogo inglés del siglo XVII. Fue profesor de la cátedra Lucasiana en Cambridge, cátedra que cedió en 1669 a uno de sus discípulos, Sir Isaac Newton.



Muchos historiadores consideran que podría haber descubierto el cálculo diferencial antes que Newton y Leibniz si no hubiese tenido tanto apego a los aspectos geométricos de las matemáticas.

Precisamente en 1669 publicó sus *Lectiones Opticae et Geometricae* en el que se presenta métodos para hallar tangentes a curvas cualesquiera y plantea que la diferenciación e integración son procesos inversos. Este libro fue revisado y corregido por el propio Newton. También publicó ediciones comentadas de libros de Euclides, Apolonio y Arquímedes, entre otros.

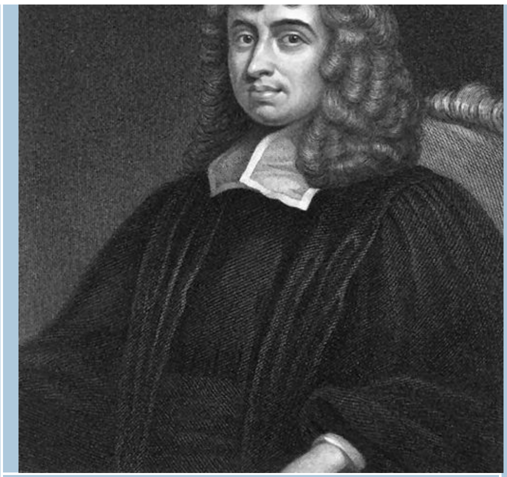


*Imagen de* *Wikimedia Commons*.

# 2. Propiedades de la integral definida

Si tienes en tu casa un robot de cocina, o estás pensando en conseguir uno, seguro que lo primero que te interesó fueron todas las propiedades que tenía dicho aparato. Ver como podía afectar a tus platos tradicionales, qué cosas nuevas podías hacer, como podía simplificarte el trabajo, etc.

*Imagen de elaboración propia*

Esto mismo ocurre con cualquier herramienta nueva con la que entres en contacto, interesa conocer cuáles son sus propiedades fundamentales y como se aplica a elementos ya conocidos. Eso es lo que vamos a hacer en este apartado con la integral definida.

1) La integral definida de una suma (o resta) de funciones integrables es igual a la suma (o resta) de las integrales definidas de cada función.

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

2) La integral definida del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b [c \cdot f(x)]\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

3) Si cambiamos entre sí los límites de integración, el valor de la integral definida cambia de signo.

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

## Comprueba lo aprendido

Si tenemos que $\int_a^b f(x)\, dx = 8$ y $\int_a^b g(x)\, dx = -3$. Se verifica que:

a) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx$ = $\square$

b) $\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$ = $\square$

c) $\int_a^b [3 \cdot f(x)]\, dx$ = $\square$

d) $\int_{a}^{b} [2 \cdot f(x) + 4 \cdot g(x)]\ dx$ = ☐

e) $\int_{b}^{a} [5 \cdot g(x)]\ dx$ = ☐

**Enviar**

4) Si tenemos dos funciones f(x) y g(x) definidas en el intervalo [a,b] y tales que $f(x) \leq g(x)$ :

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx \leq \int_{a}^{b} g(x)\ dx$$

5) Si tenemos un valor c del intervalo [a,b] cualquiera se verifica que:

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx = \int_{a}^{c} f(x)\ dx + \int_{c}^{b} f(x)\ dx$$

Gracias a la propiedad 3) esta propiedad se puede generalizar a cualquier valor c, independientemente de que esté o no dentro del intervalo [a,b], siempre que las funciones sigan teniendo sentido hasta el valor c. Podemos ver aplicada esta propiedad en la siguiente ventana.

*Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC*

## Ejercicio resuelto

Halla el valor de la integral $\int_0^3 (2\cdot x^2 - 2x + 5)\ dx$ .

**Mostrar retroalimentación**

Aplicando las propiedades de las integrales, descomponemos la integral anterior en sumas de varias.

$$\int_0^3 (2\cdot x^2 - 2x + 5)\ dx = 2\int_0^3 x^2\ dx - \int_0^3 2x\ dx + 5\int_0^3 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - \left[x^2\right]_0^3 + 5[x]_0^3 =$$
$$= 2\cdot(9-0) - (9-0) + 5\cdot(3-0) = 24$$

## Ejercicio resuelto

Halla el valor de la integral $\int_0^3 \frac{2x+3}{x+1}\ dx$

**Mostrar retroalimentación**

Lo primero que debemos hacer es hallar una primitiva F(x) de la función $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ .

Como es una función racional de numerador igual al denominador, dividimos para descomponer la fracción. Así tenemos que $\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$ .

Por tanto,

$$\int_0^3 \frac{2x+3}{x+1}\ dx = \int_0^3 \left(2 + \frac{1}{x+1}\right)\ dx = \left[2x + ln|x+1|\right]_0^3 = (6 + ln(4)) - (0 + ln(1)) \approx 7{,}39$$

## Comprueba lo aprendido

Halla el valor de las siguientes integrales:

a) $\int_{1} \frac{1}{x}\ dx = \square$

b) $\int_{2}^{3} (2x+3)\ dx = \square$

**Enviar**

## Ejercicio resuelto

Calcula $\int_{0}^{2} f(x)\ dx$ , siendo $f(x)=\begin{cases} x & si\ x<1 \\ 1+x^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ .

**Mostrar retroalimentación**

Para hallar la integral basta aplicar la propiedad 5 que hemos visto. De esa manera:

$$\int_{0}^{2} f(x)\ dx = \int_{0}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{2} f(x)\ dx = \int_{0}^{1} x\ dx + \int_{1}^{2} (1+x^2)\ dx$$

Resolvemos cada integral por separado:

$$\int_{0}^{2} f(x)\ dx = [x^2]_0^1 + \left[x+\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = (1-0)+\left[\left(2+\frac{8}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{13}{3}$$

En la Unidad anterior vimos unos ejercicios en los que encontrábamos una función que verificaba una serie de condiciones. A veces en esas condiciones se utilizan las integrales definidas. Veamos un ejemplo.

## Ejercicio resuelto

De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida en la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo relativo en x=1, un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_{0}^{1} f(x)\ dx = \frac{5}{4}$ .

Calcula a, b, c y d.

**Mostrar retroalimentación**

Imponemos las primeras condiciones, para ello necesitamos las dos primeras derivadas de la función.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad ; \quad f''(x)=6ax+2b$$

Las primeras condiciones son $\begin{cases} pasa\ por\ (0{,}0) \\ maximo\ en\ x=1 \\ inflexion\ en\ x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0+0+0+d=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 0+2b=0 \end{cases}$

De las igualdades anteriores se tiene que $b=d=0$ y $c=-3a$ .

Por tanto la función es de la forma $f(x)=ax^3-3ax$ .

Vamos a aplicar la última condición.

$\int_0^1 (ax^3-3ax)\ dx=\left[\frac{ax^4}{4}-\frac{3ax^2}{2}\right]_0^1=\frac{a}{4}-\frac{3a}{2}=\frac{a-6a}{4}=\frac{-5a}{4}=\frac{5}{4}$ . Por lo tanto $a=-1$ .

## Ejercicio resuelto

Sea la función $F:[5,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definida como $F(x)=\int_5^x\sqrt{1+e^t}\,dt$.

Calcula $F'(t)$.

**Mostrar retroalimentación**

Si aplicamos el teorema Fundamental del Cálculo sabemos que la derivada de F(x) es igual al integrando.

Por tanto $F'(X)=f(x)=\sqrt{1+e^x}$

## Ejercicio resuelto

Sea la función $F(x)=\int_1^x\cos^2 t\,dt$. Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo $[0,2\pi]$.

**Mostrar retroalimentación**

Como $f(x) = cos^2\, x$ es continua en $[0, 2\pi]$, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo, y así obtenemos la primera derivada de la función $F(x)$:

$$F'(x) = cos^2\, x$$

Esta tiene sus extremos en los valores de $x$ en que $F'(x) = 0$, esto es en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

## Ejercicio resuelto

$$\int^{\Pi^2} sen(\sqrt{x})dx$$

Calcula $\int_0$ haciendo el cambio $\sqrt{x} = t$ .

**Mostrar retroalimentación**

Como el cambio es $\sqrt{x} = t$, vamos a calcular los nuevos límites de integración.

Si $x = \pi^2 \Rightarrow \sqrt{\pi^2} = t \Rightarrow t = \pi$

Si $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = t \Rightarrow t = 0$

Vamos a calcular cuanto vale $dx$:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow dx = 2t\,dt$$

Hacemos la integral por partes. Sustituyendo, nos queda:

$$\int_0^\pi 2t \cdot sen\,t\,dt = \left[-2t\cos t + 2\int \cos t\,dt\right] = \left[-2t\cos t + 2\,sen\,t\right]_0^\pi = (-2\pi\cos\pi + 2sen\,\pi) - (2sen\,0) = 2\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 2t;\ du = 2\ dt \\ dv = sen\,t\,dt;\ v = -\cos t \end{array}}$$

## Reflexiona

Calcula $\int_0^1 \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Sugerencia: haz el cambio de variable $1-x^2=t^2$

**Mostrar retroalimentación**

El valor de esa integral es 2/3.

## Ejercicio resuelto

Calcula $\displaystyle\int_1^e x^2 \cdot Ln(x)\ dx$ .

**Mostrar retroalimentación**

Debemos resolver la integral por partes.

Para ello elegimos u(x)=Ln(x) y dv(x)=x² dx. Entonces $du(x)=\frac{dx}{x}$ y $v(x)=\frac{x^3}{3}$ .

$$\int_1^e x^2 \cdot Ln(x)\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\cdot Ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e \frac{x^3}{x}\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\cdot Ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\ dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\cdot Ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \left(\frac{e^3}{3}-0\right)-\left(\frac{e^3}{9}-\frac{1}{9}\right)=\frac{2e^3+1}{9}$$ .

## Reflexiona

Halla el valor de $\displaystyle\int_0^1 x\cdot Ln(x+1)\ dx$ .

**Mostrar retroalimentación**

Se resuelve por partes, como el anterior, y la solución es: 1/4.

## Ejercicio resuelto

Calcula $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2+2x-3}dx$

**Mostrar retroalimentación**

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=1\ ;\ x=-3$

Descomponemos en fracciones simples:

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular $A$ y $B$ sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

$$x=-3 \Rightarrow 1=-4B \Rightarrow B=-\frac{1}{4}$$

Con lo cual:

$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}\frac{1}{x+3}dx=\frac{1}{4}\left[\ln(x-1)\right]_{-2}^{0}-\frac{1}{4}\left[\ln(x+3)\right]_{-2}^{0}=-\frac{\ln 3}{2}$$

## Importante

La integral definida de una función representa la región limitada por la función entre los extremos del intervalo siempre que la función sea continua y positiva. Si no es así, puede suceder que el valor de la integral sea, por ejemplo, negativo, por lo que no tendría sentido hablar de área limitada. En el próximo tema veremos qué ocurre con la integral de una función cuando no es positiva. De momento seguiremos trabajando simplemente con la integral definida sin fijarnos en su interpretación geométrica.

## Importante

Consideremos una función f(x) continua en el intervalo [a,b], existe un punto c, interior al intervalo, en el que se verifica.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

La igualdad anterior equivale a decir que el valor de la integral definida coincide con el área de un rectángulo de base la amplitud del intervalo y cuya altura es el valor de la función en el punto intermedio c.

Este resultado se conoce como **TEOREMA DE LA MEDIA** o del Valor Medio.

## Importante

La derivada de la función integral es igual a la función integrando.

Es decir, si $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ entonces $F'(x)=f(x)$ . Esto equivale a decir que la función integral es una primitiva de la función f(x).

Este resultado se conoce como **Teorema Fundamental del Cálculo**.

## Importante

Actividad

## REGLA DE BARROW

Sea f(x) una función definida en el intervalo [a,b] y sea F(x) una primitiva de dicha función. Se verifica que la integral definida, entre a y b, es igual a la diferencia de la función primitiva en los extremos del intervalo. Es decir,

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

# Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

**Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio**