Álgebra: Inecuaciones

Matemáticas I

1º Bachillerato

Contenidos

Álgebra

Inecuaciones

1. Introducción a las inecuaciones

En nuestra vida diaria establecemos comparaciones de manera natural. Es algo intrínseco a la naturaleza humana. Dados dos objetos cualesquiera, no hay cosa que genere más curiosidad en nosotros que establecer comparaciones entre ellos.

El Universo, según palabras del propio Galileo Galilei, está escrito en el lenguaje de las matemáticas. Por tanto, las matemáticas no podían quedar al margen de estas comparaciones.

Acabamos de ver en el tema anterior cómo obtener los valores que hacen cierta una igualdad entre los dos miembros de una ecuación.

Dicho de otro modo, hemos encontrado el valor númerico (llamado solución de la ecuación) que al sustituirlo por la incógnita (la letra de la ecuación) hace que ambos miembros valgan lo mismo y se mantengan como *una balanza en posición de equilibrio*.

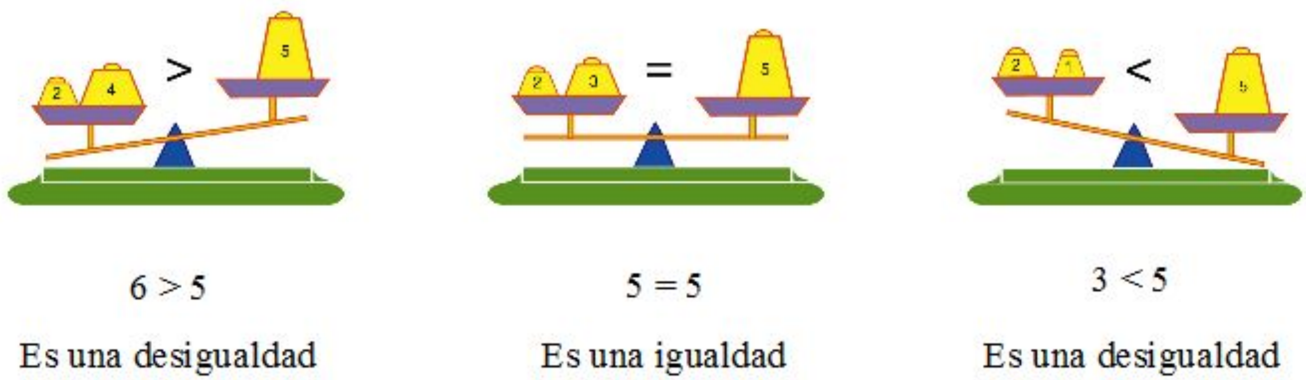
A partir de ahora nos vamos a dedicar a intentar encontrar aquellos valores de la incógnita que *rompen el equilibrio*.

Es decir, buscaremos los valores numéricos de la letra, que hacen que *la balanza se incline hacia uno u otro lado* (hacia uno u otro miembro) generando una desigualdad.

Imagen de maxmann en Pixabay. Licencia Pixabay

1.1. Desigualdades y propiedades

Con las siguientes imággenes puedes entender la diferencia entre una igualdad y una desigualdad:



Fuente propia realizada bajo Dominio público

Importante

Dados dos números reales cualesquiera, a y b, se pueden dar estas tres relaciones entre ellos:

- a < b ; a menor que b. A la expresión la llamamos desigualdad
- a = b ; a igual que b. A la expresión la llamamos igualdad
- a > b ; a mayor que b. A la expresión la llamamos desigualdad

La segunda relación se denomina igualdad y cuando aparecen letras además de cifras numéricas, dan origen a las ecuaciones.

Las relaciones primera y tercera se denominan desigualdades y cuando aparecen letras además de cifras numéricas, dan origen a las inecuaciones. Con ellas trabajaremos en este tema.

Por otro lado estas propiedades que cumplen todos los números reales, hace que su conjunto, el conjunto de los números reales, sea totalmente ordenado . Hablamos entonces, del orden de los números reales .

Estas relaciones numéricas la aplicamos de manera insconciente en multitud de situaciones. Veamos los siguientes ejemplos ejemplos de aplicación.

Comprueba lo aprendido

En el día de ayer, las temperaturas medias en cinco capitales europeas fueron:

Capital	Madrid	Londres	Berlín	Moscú	Roma
Temperatura (°C)	16	8	-1	-5	8

Indica la veracidad o falsedad de la siguientes afirmaciones:

En Madrid hace más calor que en Londres.

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Porque 16 > 8

En Berlín hace más frío que en Moscú.

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Porque -5 < -1 . Recuerda que, dados dos números negativos , el que tenga mayor valor absoluto es el menor de los dos.

En Londres hace la misma temperatura que en Roma.

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Porque 8 = 8

Ordena la lista de temperaturas de la tabla anterior, en orden ascendente (y luego en orden descendente), colocando entre cada dos valores el signo <, =, >, que corresponda.

En orden ascendente (de menor a mayor): ☐ ☐ ☐ < 8 ☐ ☐ ☐ ☐

En orden descendente (de mayor a menor): 16 > ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Caso de estudio

Escribe las siguientes informaciones utilizando las desigualdades: (comprueba las soluciones)

a. He sacado en el último control de matemáticas, al menos un 7.

$x \geq 7$

b. La tarifa de mi móvil es plana desde las 10 de la mañana hasta las 6 de la tarde.

$10 \leq x \leq 18$

c. La edad del seleccionador español Vicente Del Bosque es 59 años, cifra que supera las edades de Busquet y Javi Martínez (ambos tienen 21)

59 > 21 + 21

d. Como todo el mundo sabe el valor del número real π es menor que 4.

$\pi < 4$

Importante

Propiedades de las desigualdades

Sean a, b y c tres números reales.

1. Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$ para cualquier número c.
2. Si $a<b$, entonces $a\cdot c<b\cdot c$ para cualquier número $c>0$.
3. Si $a<b$, entonces $a\cdot c>b\cdot c$ para cualquier número $c<0$.

Las desigualdades no se comportan igual que las igualdades cuando multiplicamos ambos términos por un mismo número.

Las propiedades de arriba pueden enunciarse de la siguiente manera:

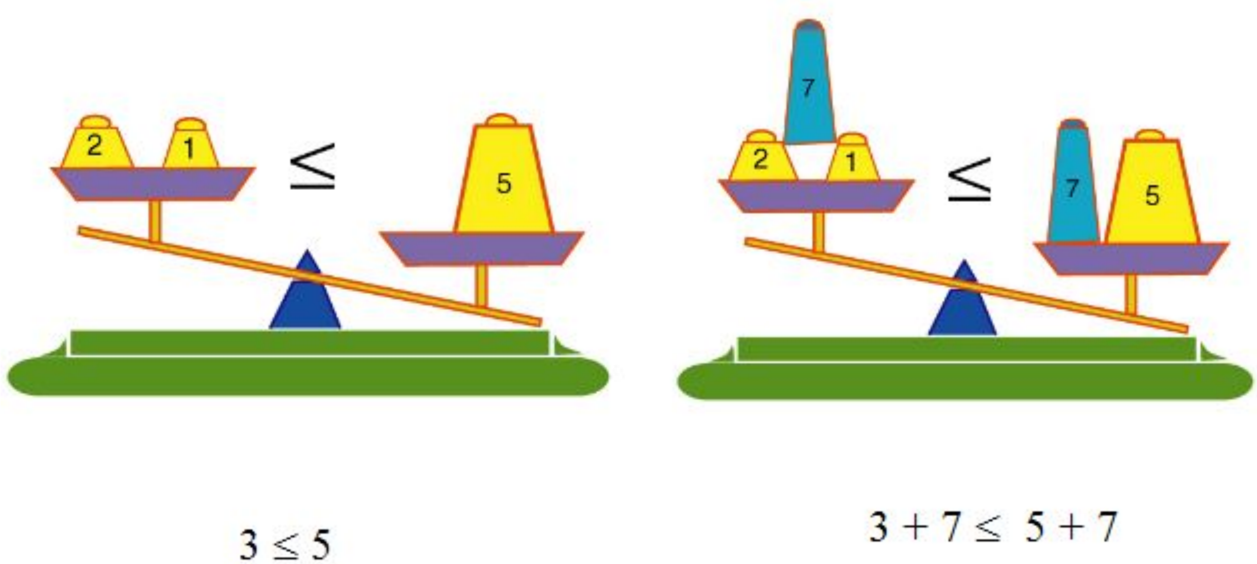
- Si a los dos miembros de una desigualdad se le suman o restan un número positivo, la desigualdad no cambia de sentido.

- Si a los dos miembros de una desigualdad se le suman o restan un número negativo, la desigualdad no cambia de sentido.

- Si se multiplican o dividen por un número positivo los dos miembros de una desigualdad, entonces la desigualdad no cambia de sentido.

- Si se multiplican o dividen por un número negativo los dos miembros de una desigualdad, entonces se invierte y cambia de sentido.

Veamos gráficamente qué significan estas propiedades:



Fuente propia realizada bajo Dominio público

¿Te has parado a pensar cómo se comportan las desigualdades numéricas cuando se someten a variaciones (aumento, disminución, ...)? Enseguida lo vas a descubrir.
¿Qué ocurre si aumenta la temperatura 2 °C en Moscú y en Roma? ¿Sigue haciendo más frío en Moscú que en Roma?

- Verdadero
- Falso

Verdadero

La respuesta es afirmativa puesto que $-5 < 8$ (si sumamos 2 a cada miembro) $-3 < 10$, luego la desigualdad no ha cambiado.

Si disminuye 2 °C la temperatura en ambas ciudades, podemos afirmar ahora que hace más frío en Roma que en Moscú.

- Verdadero
- Falso

Falso

Es falso puesto que $-5 < 8$ (y si restamos 2 a cada miembro tendríamos) $-7 < 6$, luego la desigualdad no ha cambiado y sigue haciendo más frío en Moscú que en Roma.

Si se triplica la temperatura en ambas ciudades, hará más calor en Moscú que en Roma.

- Verdadero
- Falso

Falso

Efectivamente, la afirmación es falsa.
No ha cambiado la situación puesto que al triplicar la temperatura lo que ha ocurrido es que se ha hecho aún mayor la diferencia entre ambas ciudades.
Veámoslo. Tenemos que $-5 < 8$ y al multiplicar por 3 ambos miembros tendremos que $-15 < 24$.

En las noticias, dan el siguiente titular:

> "Hoy 15 de Diciembre, se aprecian los efectos del cambio climático en las temperaturas de ciertas capitales europeas. Se ha invertido la situación, Moscú presenta una temperatura atípica para estas fechas con 10 °C. Al mismo tiempo una ola de frío se encuentra situada sobre Roma donde se han alcanzado temperaturas de - 16 °C".

Por tanto, podemos afirmar que ahora sí que hace más calor en Moscú que en Roma.

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Veremos de manera detallada lo que ha ocurrido.
¿Qué significa que se ha invertido la situación? Pues que ahora hace más calor en Moscú que en Roma.
Tenemos la siguiente relación: $-16 < 10$, cuando antes teníamos: $-5 < 8$.
Si observas las temperaturas actuales: $10 = (-2) \cdot (-5)$ y $-16 = (-2) \cdot 8$, se obtienen multiplicado las anteriores por un número negativo, en este caso -2, pero al hacer esta operación la desigualdad ha cambiado de sentido, la balanza se ha desequilibrado para el otro lado.

Caso de estudio

Vamos a estudiar cómo se comporta el orden de los números reales y la suma. Para ello, vamos a realizar varios ejercicios, de manera que sumemos tanto números positivos como negativos a una desigualdad, para comprobar si se mantiene la desigualdad una vez hayamos realizado la suma.
Aplica a la desigualdad $3 < 5$, las siguientes transformaciones.

a. Suma 2 a cada uno de los miembros de la desigualdad y comprueba si es cierta.
b. Suma ahora 1,72 a cada miembro y comprueba.
c. Suma esta vez -5 a cada miembro, y verifica si se mantiene la desigualdad.

Una vez realizado los tres apartados, debes llegar a una conclusión, y activar la opción "Ver solución" para comprobar que estás en lo cierto.

$$a)\ 3+2<5+2 \Rightarrow 5<7$$
$$b)\ 3+1{,}72<5+1{,}72 \Rightarrow 4{,}72<6{,}72$$
$$c)\ 3-5<5-5 \Rightarrow -2<0$$

Por lo tanto la conclusión a la que llegamos es que si a los dos miembros de una desigualdad se le suma un mismo número positivo o negativo, la desigualdad sigue siendo cierta.

Caso de estudio

A continuación te proponemos una serie de ejercicios que te deben llevar a descubrir dos propiedades de las desigualdades. Lo que debes hacer es multiplicar (o dividir) los dos miembros de una desigualdad, y comprobar si se mantiene o no.
Dada la siguiente desigualdad: 2 < 5. Realiza:

a. Multiplica los dos miembros por 3, y comprueba si se mantiene la desigualdad.
b. Multiplica ahora por 4,5 y vuelve a comprobar.
c. Multiplica esta vez por 1/2, o lo que es lo mismo, divide por 2 ambos miembros, y comprueba la desigualdad.

Una vez hayas hecho los tres apartados y hayas llegado a una conclusión, pincha en "Ver solución" y comprueba.

Efectivamente,

Si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por un número positivo la desigualdad continúa siendo cierta

$$a<b \Leftrightarrow a\cdot c<b\cdot c \text{ con } c>0$$

Veamos ahora que ocurre cuando multiplicamos por un número negativo. Sea la desigualdad: 2 < 4. Realiza:

a. Multiplica por -1, y comprueba a ver si se mantiene la desigualdad o se obtiene otra distinta.
b. Multiplica ahora por -4, y vuelve a comprobar.
c. Divide ahora por -2, a ver que ocurre.

Cuando hayas llegado a una conclusión, pincha en "Ver solución", y obtén la propiedad adecuada.

En este caso, tenemos:

Si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido

$$a>b \Leftrightarrow a\cdot c>b\cdot c \text{ con } c<0$$

2. Inecuaciones con una incógnita

Si eres un buen conductor seguro que sabes que en las autopistas españolas debemos circular a una velocidad inferior o igual a 120 km/h.

Imagen de qimono en [Pixabay](). Licencia [Pixabay]()

Si llamamos v, a la velocidad en kilómetros por hora a la que conducimos, la expresión algebraica que representa esa situación vendría dada por: $v \leq 120$.

Si circulamos a velocidad superior a 120 km/h estaremos poniendo en peligro nuestra seguridad y seremos sancionados. En este caso la expresión algebraica sería: $v > 120$.

2.1. Lineales

Las dos expresiones anteriores se denominan inecuaciones o desigualdades.
Lo primero que llama la atención de las inecuaciones es que tienen infinitas soluciones. Esa es una característica esencial de las inecuaciones.

Imagen de Tama66 en Pixabay. Licencia Pixabay

Trabajaremos exclusivamente con inecuaciones de una incógnita.

Importante

Una inecuación es una desigualdad ($<, \leq, >, \geq$) entre letras y números, relacionados mediante operaciones aritméticas. A las letras las llamaremos incógnitas.

Recordemos que las operaciones aritméticas son las siguiente: suma, resta, producto, división y potenciación.

Una inecuación respeta todas las propiedades vistas para las desigualdades numéricas, que son:

- No cambia de sentido, si se suman o restan números a ambos miembros, ya sean positivos o negativos.

- Tampoco cambia de sentido, si se multiplican o dividen ambos miembros por un número positivo.

- Cambia de sentido, se desequilibra hacia el otro lado, si se multiplican o dividen ambos miembros por un número negativo.

Una inecuación lineal (o de primer grado) con una incógnita es una inecuación con una sola incógnita, y cuyo exponente es necesariamente 1.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} 2x-5 & < & 7 \\ 3-x & > & 2x-5 \end{array}$$

Llamaremos soluciones de una inecuación a todos los números reales que verifican la inecuación cuando sustituimos su valor en la incógnita de la misma.

Ejemplo:

En la inecuación 2x-5 < 7, el número 3 verifica la inecuación, ya que: 2·3-5 = 1 que es menor que 7.

También el 2 lo verifica, ya que 2·2-5 = -1, que también es menor que 7. Y el 1, y el 0, y el -7, y muchos más, y es que la solución de una inecuación es, generalmente, un conjunto de infinitos números reales.

Comprueba lo aprendido

Tenemos la siguiente inecuación:

$$1-\frac{x-5}{2} \geq 3x$$

¿Cuáles de los siguientes valores son solución de esa inecuación?

- [ ] x=0
- [ ] x=3
- [ ] x=-2
- [ ] x=1/2

Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto
4. Correcto

Comprueba lo aprendido

Contesta Verdadero o Falso:

Si $x \geq -2$, entonces $x-5 \leq -7$

Verdadero Falso

Falso

Si sumamos un número a ambos lados, la desigualdad no tenía que variar.

Si $x > 3$, entonces $-5x < -15$

Verdadero Falso

Verdadero

Si multiplicamos ambos lados de la desigualdad por un número menor que cero, el signo de la desigualdad cambia.

Si $3-x \leq 4$, entonces $x \geq -1$

Verdadero Falso

Verdadero

Sumamos -3, la desigualdad se mantiene: -x≤1. Multiplicamos por -1, la desigualdad cambia: x≥-1.

Importante

Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de números reales que cumplen la desigualdad. Este conjunto infinito de soluciones será un intervalo de la recta real.

El proceso de resolución consiste en realizar tranformaciones (suma, resta, multiplicación o división) de una misma cantidad a ambos miembros de una inecuación, hasta llegar a una inecuación en la que la incógnita esté sóla en uno de sus miembros, en el otro haya un número y, entre ambos, uno de los signos de desigualdad.

El objetivo de estas transformaciones es llegar a obtener uno de los siguientes modelos (donde *x* es la incógnita y *s* un número real)

$$x<s \quad x\leq s \quad x>s \quad x\geq s$$

Finalmente, la solución de la inecuación vendrá dada por los infinitos valores que verifican esta última desigualdad. Es decir, todos los puntos del intervalo que tienen por extremo inicial (o final) al valor s.

- Si el símbolo de desigualdad de la ecuación es estricto, es decir, es un $<$ o un $>$. entonces el extremo numérico de la semirrecta no es una solución de la inecuación.
- Si el símbolo de desigualdad de la ecuación no es estricto, es decir, es un $\leq$ o un $\geq$. entonces el extremo numérico de la semirrecta si es una solución de la ecuación.

El procedimiento de resolución de una inecuación es en principio igual al de una ecuación como se puede ver en los siguientes ejemplos.

Caso de estudio

La única diferencia que hay al resolver una inecuación en comparación con la resolución de las ecuaciones es que hay que tener cuidado cuando multiplicamos por un número negativo (o bien pasamos un número negativo que esta multiplicando a la incógnita al otro miembro), puesto que en tal caso la desigualdad cambia de sentido.

Resuelve esta inecuación de dos maneras diferentes: una primera en la que te lleves las incógnitas x al segundo miembros (la resolverás sin problemas, porque no tendrás que dividir por un número negativo); y una segunda, donde deberías traer las incógnitas al primer miembro, y tendrás que aplicar lo dicho anteriormente, y después pincha en "Mostrar retroalimentación", para comprobar que la hiciste bien.

La inecuación a resolver es:

$$2x - 3 < 4x + 5$$

La primera forma podría ser esta

$$\begin{array}{ccc} 2x-3 & < & 4x+5 \\ -3-5 & < & 4x-2x \\ -8 & < & 2x \\ \frac{-8}{2} & < & x \\ -4 & < & x \\ x & > & -4 \end{array}$$

Y la segunda

$$\begin{array}{ccc} 2x-3 & < & 4x+5 \\ 2x-4x & < & 5+3 \\ -2x & < & 8 \\ x & > & -4 \end{array}$$

En ambos casos obtenemos la misma solución $x > -4$, que corresponde al intervalo $(-4, +\infty)$

A continuación presentamos un problema que sin la ayuda de las inecuaciones sería imposible de resolver.

Jesús es el chico de mayor edad de un equipo de fútbol de categoría infantil. Es un poco bromista y además está bien preparado en Matemáticas.

Ante la pregunta realizada por el nuevo entrenador: "¿cuántos años tienes?" le responde: “El doble de mi edad más dos años es mayor que mi edad más 14 años”.

Con esta pista el nuevo entrenador no puede obtener la edad de Jesús, pero ¿puede averiguar que edad como mínimo tiene Jesús?

Llamemos x a su edad.

Entonces:

$2x + 2 > x + 14$

$2x - x > 14 - 2$

$x > 12$

Luego Jesús es mayor de 12 años.

Comprueba lo aprendido

Indica si es Verdadero o Falso el intervalo solución propuesto para cada una de las siguientes inecuaciones.

(a) $3x+5\leq 8$ Solución: $(-\infty,1)$

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Solución: $x\leq 1$, que expresado en forma de intervalo sería: $(-\infty,1]$

(b) $5x>9-x-3$ Solución: $(1,+\infty)$

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

(c) $-3x+5\geq 10+x-25$ Solución: $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Solución: $x\leq 5$, que expresado en forma de intervalo sería: $\left(-\infty,5\right]$

Comprueba lo aprendido

Indica si son Verdaderos o Falsos los intervalos que se dan como soluciones de las dos inecuaciones siguientes.

Puedes ayudarte del applet de Geogebra para comprobar tus cálculos. Ten en cuenta que antes de poder utilizar este applet, debes realizar algunas transformaciones en las dos inecuaciones.
El intervalo $\left(-\infty,4\right]$ es la solución de $2x-3<x+1$

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Veámoslo:

$2x-3<x+1$
$2x-x<1+3$
$x<4$

El valor x = 4 no entra en el conjunto de soluciones de la inecuación puesto que si sustituimos x= 4, quedaría 5 < 5, que no es cierto.

Por tanto, la solución de la inecuación viene dada por el intervalo abierto $(-\infty,4)$

La solución de $3(x+1)\geq-2(2x-3)$ es el intervalo $[\frac{3}{7},+\infty)$

- ○ Verdadero
- ○ Falso

Verdadero

Si resolvemos la inecuación, paso a paso, vemos que:

$$3(x+1)\geq-2(2x-3)$$
$$3x+3\geq-4x+6$$
$$3x+4x\geq6-3$$
$$7x\geq3$$
$$x\geq\frac{3}{7}$$

Es decir, cualquier valor mayor o igual que {{3} \over {7}} verifica la inecuación. La solución es el intervalo: $[\frac{3}{7},+\infty)$

Comprueba lo aprendido

¿Cuáles de las siguientes inecuaciones, tienen como solución la siguiente representación gráfica?

Fuente propia realizada bajo Dominio público

- ☐ $2x+1\geq3$
- ☐ $3(x+2)\geq0$
- ☐ $2(x+5)\geq2-2x$

Solución

1. Correcto
2. Correcto
3. Correcto

Ejercicio Resuelto

Resuelve la siguiente inecuación

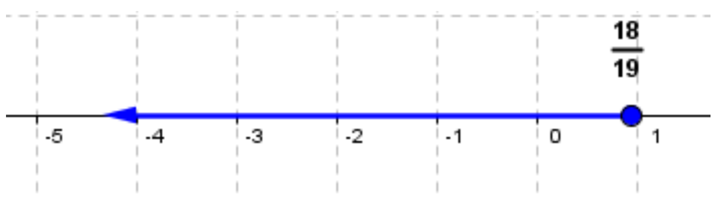
$$2(4x-3)-\frac{3x-1}{5}\leq 4(x-1)+\frac{3x}{2}$$

Hallamos el mínimo comúm múltiplo de los denominadores.

$$\mathrm{mcm}(5,\ 2)=10$$

Multiplicamos cada miembro de la desigualdad por 10 para que de esta forma desaparezcan los denominadores.

$$\begin{gathered}10\left(2(4x-3)-\frac{3x-1}{5}\right)\leq 10\left(4(x-1)+\frac{3x}{2}\right)\\ 20(4x-3)-\frac{10(3x-1)}{5}\leq 40(x-1)+\frac{30x}{2}\\ 80x-60-6x+2\leq 40x-40+15x\\ 80x-6x-40x-15x\leq 60-2-40\\ 19x\leq 18\\ x\leq\frac{18}{19}\\ Solucion\\ \left(-\infty,\frac{18}{19}\right]\end{gathered}$$



Fuente propia realizada bajo Dominio público

2.2. Cuadradas

Al igual que pasaba con las ecuaciones, también podemos hablar de inecuaciones de grado superior a 1. Veamos en este apartado las de grado 2:

Imagen de _Alicja_ en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

Inecuaciones cuadráticas

Son aquellas que adoptan las siguientes formas:

$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$
$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$

Siendo a, b y c números reales cualesquiera.

Su solución puede facilitarse considerando la función $y=ax^2+bx+c$ y resolviendo la ecuación $ax^2+bx+c=0$; se presentan los siguientes casos:

CASO I

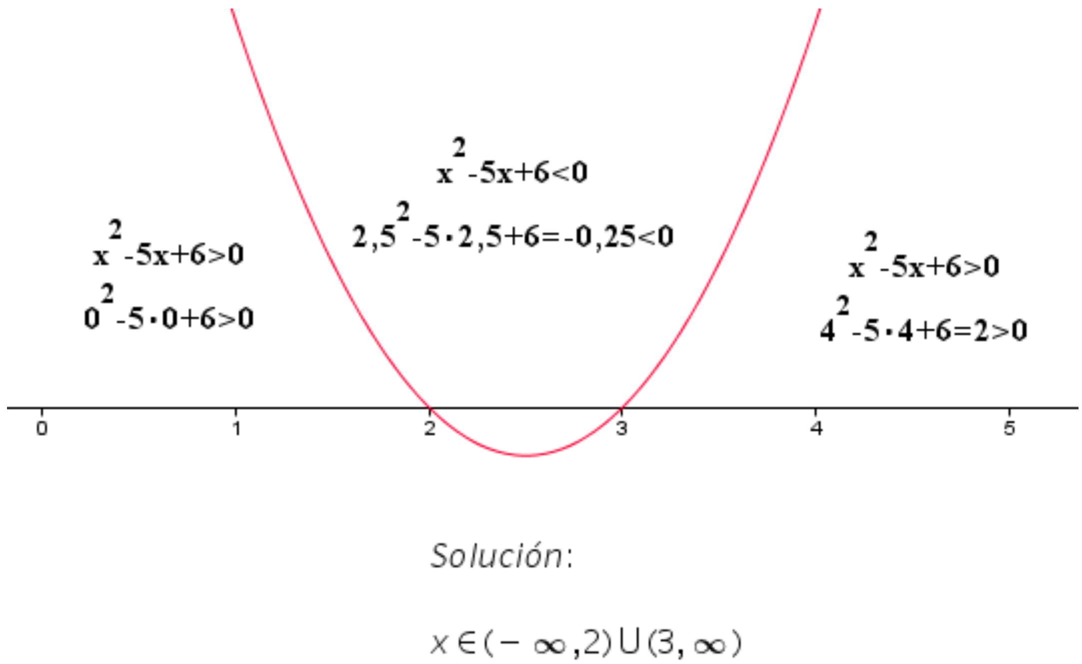
La ecuación $ax^2+bx+c=0$ admite dos raíces reales distintas x_1 y x_2.

En este caso la solución viene dada por el signo que adopta la función a la derecha y a la izquierda de los valores x_1 , x_2.

Veamos el siguiente ejemplo:

Resolver la inecuación $x^2-5x+6>0$.

Resolvemos la ecuación $x^2-5x+6=0$ y obtenemos como solución de la misma $x_1=2\ y\ x_2=3$. El procedimiento de resolución de la inecuación se explica en la siguiente imagen.



Fuente propia realizada bajo Dominio público

Comprobamos el signo de la función $y=x^2-5x+6$ (cuya representación gráfica es una parábola, tal como aparece en rojo en la imagen de arriba) a la derecha e izquierda de los valores 2 y 3. Empezamos con el 2.

Probamos un valor cualquiera que se encuentre a la izquierda del 2 (o sea menor que este) por ejemplo el 0. Si le damos a la x este valor, la función $y=x^2-5x+6$ vale 6. Al ser 6>0 eso quiere decir que todos los valores menores de 2 son solución de nuestra inecuación por lo que ya tenemos un primer conjunto de valores de x que vienen representados por el intervalo: $(-\infty,2)$.

Vamos ahora a comprobar los valores a la derecha del 2 (mayores que este) pero menores que 3 (que era la otra solución que nos daba la ecuación $x^2-5x+6=0$). Para ello elegimos un valor cualquiera que cumpla esta condición, por ejemplo x=2,5. Para este valor nuestra función vale y=-0,25 lo cual no cumple la condición de la inecuación (

$x^2-5x+6>0$) por lo que el intervalo de valores (2,3) no sería solución de la inecuación.

Pasemos ahora a probar los valores a la derecha del 3 (mayores que este) ya que los que se encuentran a la izquierda ya están comprobados. Si probamos con x=4, la función toma como valor y=2, lo cual cumple la condición de nuestra inecuación. Esto va a ocurrir para cualquier valor mayor que 3 de ahí que el otro intervalo de valores solución de nuestra inecuación es $(3,\infty)$.

La solución final es el conjunto de valores de x que pertenece a la unión de los intervalos hallados más arriba y viene representada de la siguiente forma $x\in(-\infty,2)\cup(3,\infty)$.

CASO II

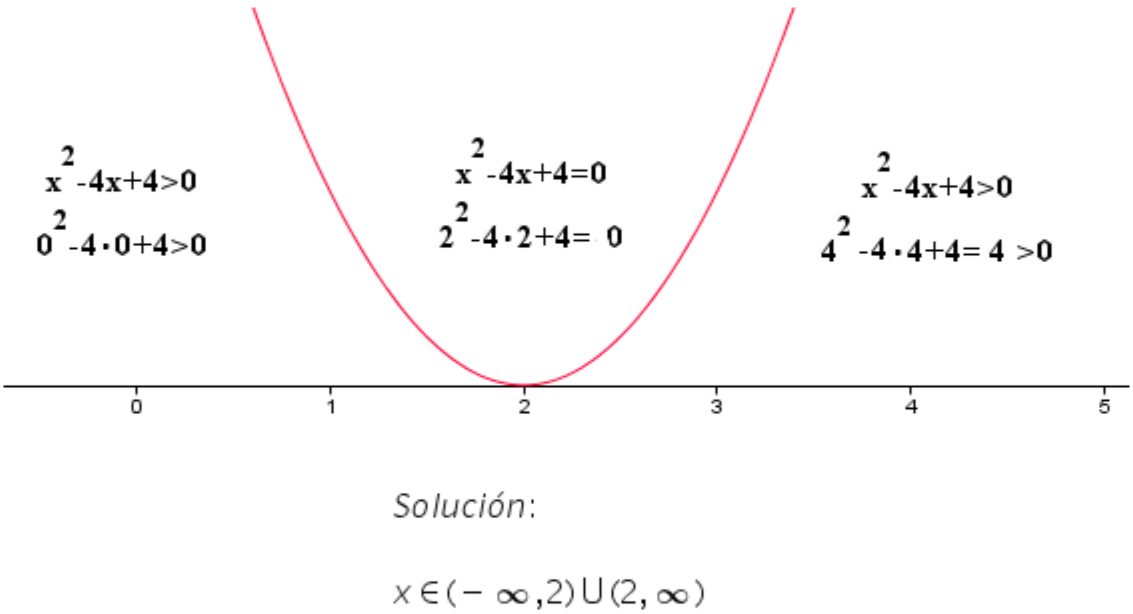
La ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene solo dos raices reales coincidentes, es decir $x_1=x_2$.

En este caso la solución viene dada por el signo que adopta la función a la derecha y a la izquierda del valor x_1 o x_2.

Veamos el siguiente ejemplo:

Resolver la inecuación $x^2-4x+4>0$.

Resolvemos la ecuación $x^2-4x+4=0$ y obtenemos como solución de la misma $x_1=x_2=2$. El procedimiento de resolución de la inecuación se explica en la siguiente imagen.



Fuente propia realizada bajo Dominio público

Podemos apreciar que la inecuación $x^2-4x+4>0$ se cumple para cualquier valor de x, excepto para la raíz x=2, para la cual el valor de la inecuación es 0 de ahí que la solución de la misma sea: $x\in(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.

CASO III

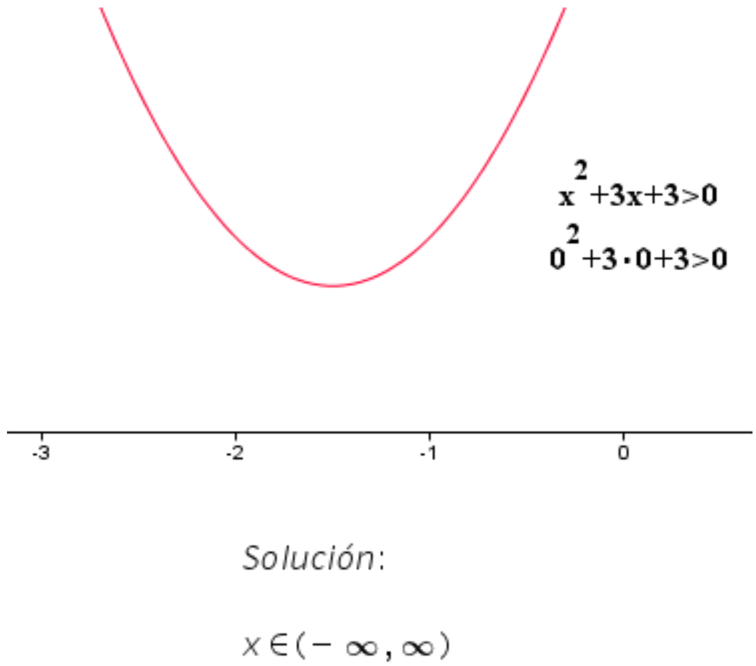
La ecuación $ax^2+bx+c=0$ no tiene raíces reales.

En este caso la solución viene dada por el signo que adopta la función para cualquier valor.

Veamos el siguiente ejemplo:

Resolver la inecuación $x^2+3x+3>0$.

Resolvemos la ecuación $x^2+3x+3=0$ y vemos que no tiene solución. El procedimiento de resolución de la inecuación se explica en la siguiente imagen.

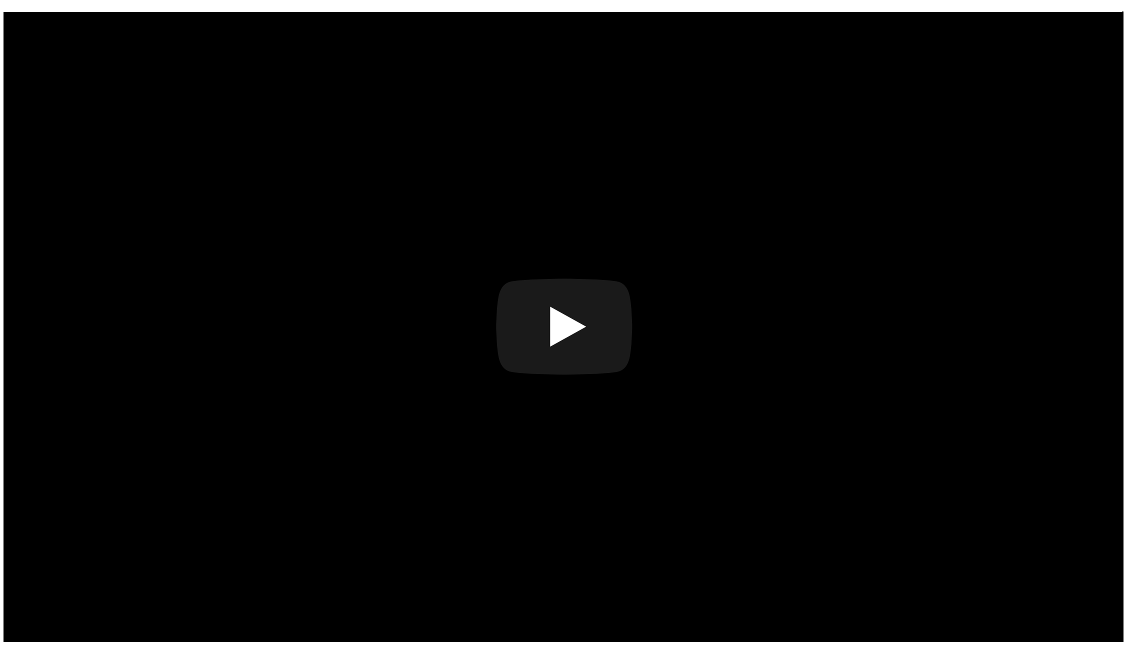


Fuente propia realizada bajo Dominio público

La representación gráfica de la función $y=x^2+3x+3$, está por encima del eje x, lo que indica que adopta valores positivos (>0) para cualquier valor de x de ahí que la solución de la inecuación sea $x\in(-\infty,\infty)$.

En cambio la inecuación $x^2+3x+3\leq 0$ carece de solución.

Si todavía te queda alguna duda puedes visualizar el siguiente vídeo.



Vídeo de Tutomate alojado en Youtube

La solución de la inecuación $x^2-7x+6\leq 0$ es:

- $(-\infty,2)$
- $(-2,2)$
- $[1,6]$

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

¡Correcto!

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

La solución de la inecuación $x^2+6x+8\geq 0$ es:

- $(-\infty,-4]\cup[-2,\infty)$
- $(-\infty,2]$
- $(4,\infty)$

¡Correcto!

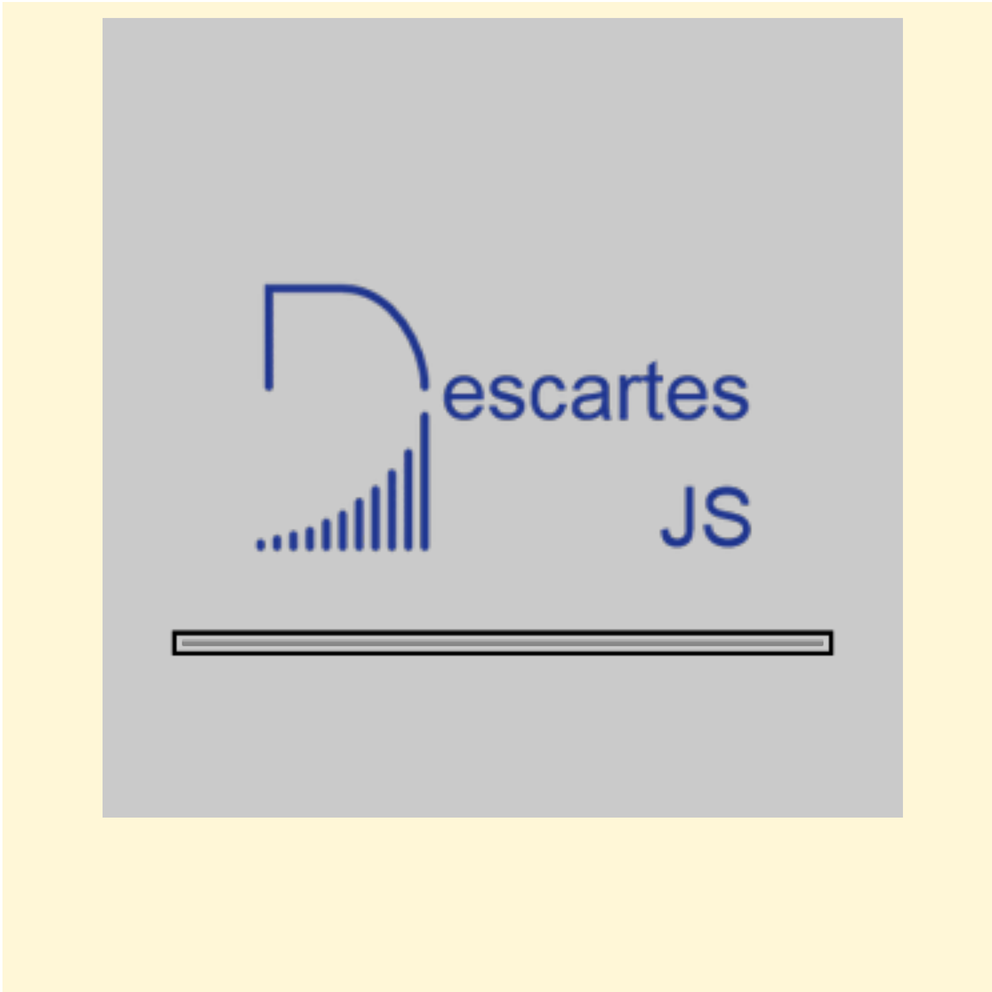
¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Comprueba lo aprendido



Escena de José Luis Alonso Borrego en Proyecto Descartes. Licencia CC

2.3. Racionales

Importante

Inecuaciones racionales

Vamos a ver, como caso más sencillo, aquellas que adoptan la forma:

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{ax+b}{cx+d}>0;\ \frac{ax+b}{cx+d}\geq 0\\ \frac{ax+b}{cx+d}<0;\ \frac{ax+b}{cx+d}\leq 0\end{array}}$$

Siendo a, b, c y d números reales cualesquiera.

Su resolución es muy parecida a los sistemas de inecuaciones con una incógnita. Veamos el siguiente ejemplo.

$$\frac{3x-6}{x}>0$$

Para que la anterior fracción sea mayor que cero se han de dar los siguientes casos:

1. Numerador mayor que cero y denominador mayor que cero.

En este caso la resolución de la inecuación es equivalente a resolver el siguiente sistema.

$$\begin{cases}3x-6>0\\ x>0\end{cases}$$

Si seguimos los pasos estudiados en el apartado 4.2 de este tema la solución del mismo sería x>2.

2. Numerador menor que cero y denominador menor que cero.

En este caso la resolución de la inecuación es equivalente a resolver el siguiente sistema.

$$\begin{cases}3x-6<0\\ x<0\end{cases}$$

Si seguimos los pasos estudiados en el apartado 4.2 de este tema la solución del mismo sería x<0.

Conjugando ambas soluciones x>2 y x<0 tenemos que la solución de la inecuación es: $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.

Puede darse el caso de que la inecuación venga expresada de una forma parecida a la siguiente.

$$\frac{x-4}{3x+2}\leq 1$$

Para reducirla a la forma $\frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$ vista más arriba podemos operar sobre la misma:

$$\frac{x-4}{3x+2}\leq 1$$
$$\frac{x-4}{3x+2}-1\leq 0$$
$$\frac{x-4-3x-2}{3x+2}\leq 0$$
$$\frac{-2x-6}{3x+2}\leq 0$$

Para que la anterior fracción sea menor o igual que cero se han de dar los siguientes casos:

1. Numerador mayor o igual que cero y denominador menor que cero.

En este caso la resolución de la inecuación es equivalente a resolver el siguiente sistema.

$$\begin{cases}-2x-6\geq 0\\ 3x+2<0\end{cases}$$

Si seguimos los pasos estudiados en apartados anteriores de este tema, la solución del mismo sería $x\leq -3$.

2. Numerador menor o igual que cero y denominador mayor que cero.

En este caso la resolución de la inecuación es equivalente a resolver el siguiente sistema.

$$\begin{cases}-2x-6\leq 0\\ 3x+2>0\end{cases}$$

Si seguimos los pasos estudiados en el apartado 6.2 de este tema la solución del mismo sería $x>-\frac{2}{3}$.

Conjugando ambas soluciones $x\leq -3$ y $x>-\frac{2}{3}$ tenemos que la solución de la inecuación es: $(-\infty,-3]\cup(-\frac{2}{3},\infty)$.

Comprueba lo aprendido

La solución de la inecuación $\frac{x-2}{x-4}\geq 0$ es:

- $(0,\infty)$
- $(-\infty,2]\cup(4,\infty)$
- $(-\infty,0]\cup(2,\infty)$

¡Incorrecto!

¡Correcto!

¡Incorrecto!

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

La solución de la inecuación $\frac{x+3}{x-2}<2$ es:

- $(-\infty,2)\cup(7,\infty)$
- $(-\infty,1)\cup(0,\infty)$
- $(-\infty,0)\cup(3,\infty)$

¡Correcto!

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Ejercicio Resuelto

Halla todos los valores de x para los que $\frac{2x+3}{x-2} \leq 0$

1. Numerador mayor o igual que cero y denominador menor que cero

$2x+3 \geq 0$ $\quad x \geq \frac{-3}{2}$

$x-2<0$ $\quad x<2$

Solución: $[\frac{-3}{2}, 2)$

2. Numerador menor o igual que cero y denominador mayor que cero.

$2x+3 \leq 0$ $\quad x \leq \frac{-3}{2}$

$x-2>0$ $\quad x>2$

No tiene solución

Por lo tanto, la solución de la inecuación inicial es: Solución: $[\frac{-3}{2}, 2)$

3. Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

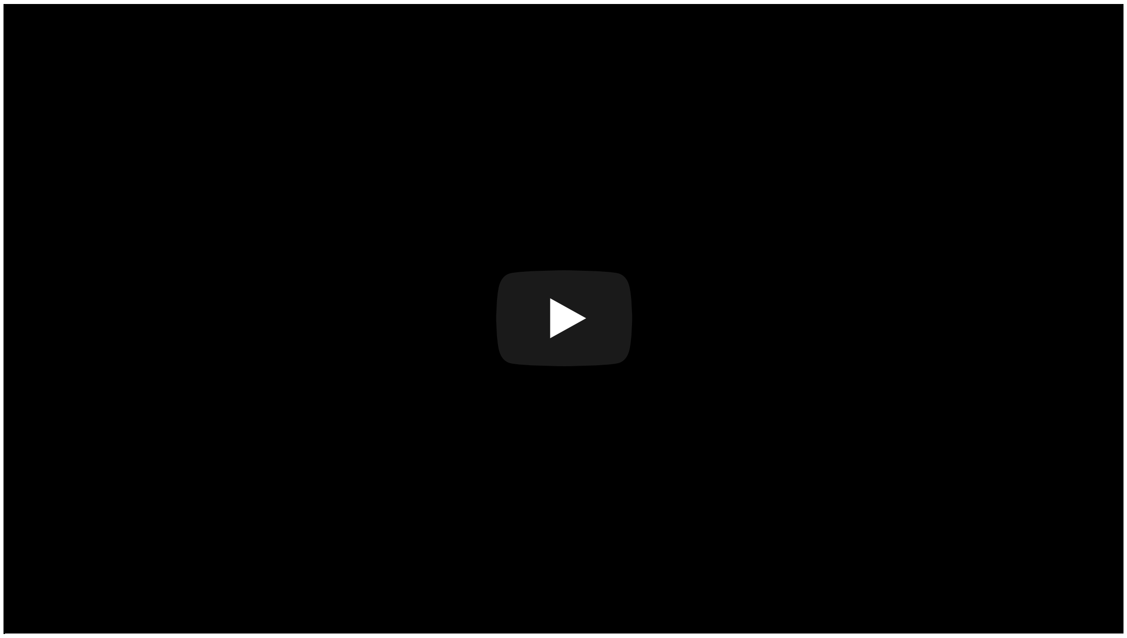
Una vez que ya sabemos resolver inecuaciones lineales con una incógnita el siguiente paso será resolver sistemas de inecuaciones lineales.

Importante

Los pasos a seguir para resolver sistemas de inecuaciones lineales son los siguientes:

1. Resolvemos cada inecuación por separado.
2. La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones por separado.

En el siguiente vídeo puedes ver la resolución de un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita.



Vídeo de Tutomate alojado en Youtube

Ejercicio Resuelto

Vamos a resolver los siguientes sistemas de inecuaciones

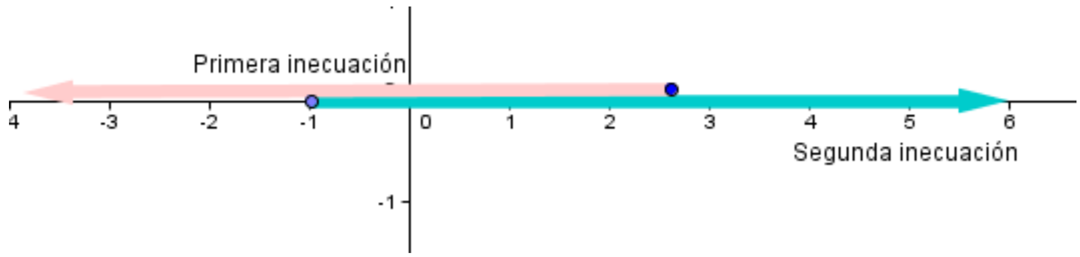
a) $\begin{cases} 4x-6 \leq x+2 \\ 2+3x \geq x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+\frac{1}{5}<3 \\ x<\frac{4-2x}{5} \end{cases}$

a)

	Primera inecuación: $4x-6 \leq x+2$	Segunda inecuación: $2+3x \geq x$
Pasamos las incógnitas a un lado y los números a otro Sumamos o restamos los términos Despejamos x:	$\begin{array}{rcl} 4x-x & \leq & 2+6 \\ 3x & \leq & 8 \\ x & \leq & \frac{8}{3} \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 3x-x & \geq & -2 \\ 2x & \geq & -2 \\ x & \geq & \frac{-2}{2} \\ x & \geq & -1 \end{array}$

Si representamos gráficamente las dos soluciones, obtenemos:



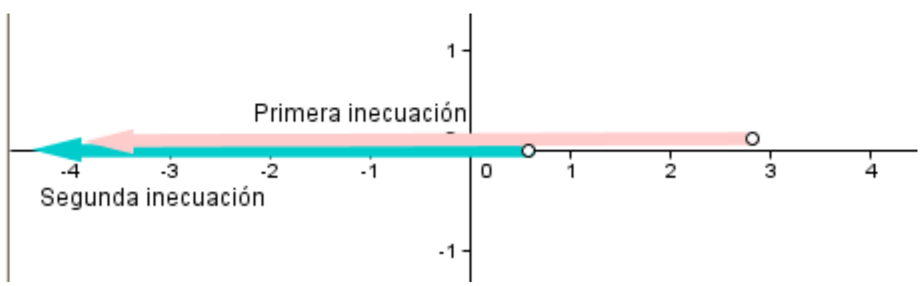
Fuente propia realizada bajo Dominio público

Luego la solución es el intervalo $\left[-1,\frac{8}{3}\right]$

b) Hacemos lo mismo con el segundo sistema:

	Primera inecuación: $x+\frac{1}{5}<3$	Segunda inecuación: $x<\frac{4-2x}{5}$
Eliminamos denominadores reduciendo a común denominador. Pasamos las incógnitas a un lado y los números a otro. Sumamos o restamos los términos. Despejamos x:	$\begin{aligned} 5x+1 &< 15 \\ 5x &< 15-1 \\ 5x &< 14 \\ x &< \frac{14}{5} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{5x}{5} &< \frac{4-2x}{5} \\ 5x &< 4-2x \\ 5x+2x &< 4 \\ 7x &< 4 \\ x &< \frac{4}{7} \end{aligned}$

Gráficamente:



Fuente propia realizada bajo Dominio público

Por tanto, la solución es $\left(-\infty,\frac{4}{7}\right)$

Ejercicio Resuelto

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 6x+5(2-x)>3x-8(x+4) \\ x(7-2x)>2x(5-x)+10x \end{cases}$$

Resolvemos en primer lugar la inecuacion:

$$6x+5(2-x)>3x-8(x+4)$$

$$\begin{gathered} 6x+5(2-x)>3x-8(x+4) \\ 6x+10-5x>3x-8x-32 \\ 6x-5x-3x+8x>-32-10 \\ 6x>-42 \\ x>\frac{-42}{6} \\ x>-7 \end{gathered}$$

La solución puede venir representada por el siguiente intervalo: $(-7,\infty)$. Gráficamente se representaría de la siguiente forma:

Fuente propia realizada bajo Dominio público

Vamos a continuación a proceder a resolver la segunda inecuación:

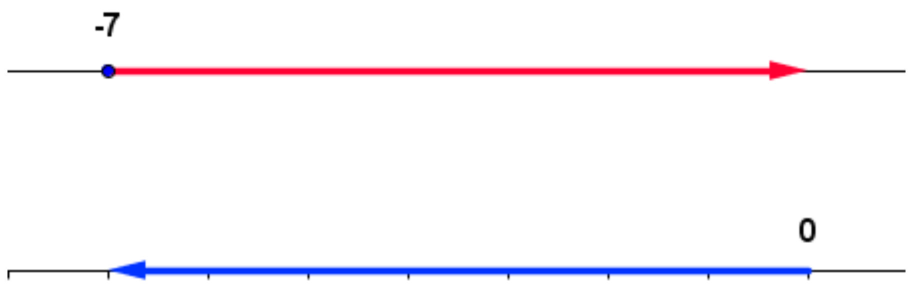
$$x(7-2x)>2x(5-x)+10x \begin{matrix} 2x-5 & < & 7 \\ 3-x & > & 2x-5 \end{matrix}$$

$$\begin{gathered} x(7-2x)>2x(5-x)+10x \\ 7x-2x^2>10x-2x^2+10x \\ 7x-10x-10x>0 \\ -13x>0 \\ x<\frac{0}{-13} \\ x<0 \end{gathered}$$

La solución puede venir representada por el siguiente intervalo: $(-\infty,0)$. Gráficamente se representaría de la siguiente forma:

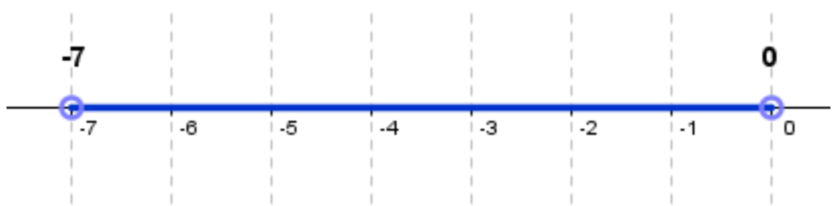
Fuente propia realizada bajo Dominio público

Ahora vamos a hallar los puntos de los intervalos que son comunes a ambas inecuaciones, gráficamente podemos comprobar donde se encuentra la intersección de ambos intervalos.



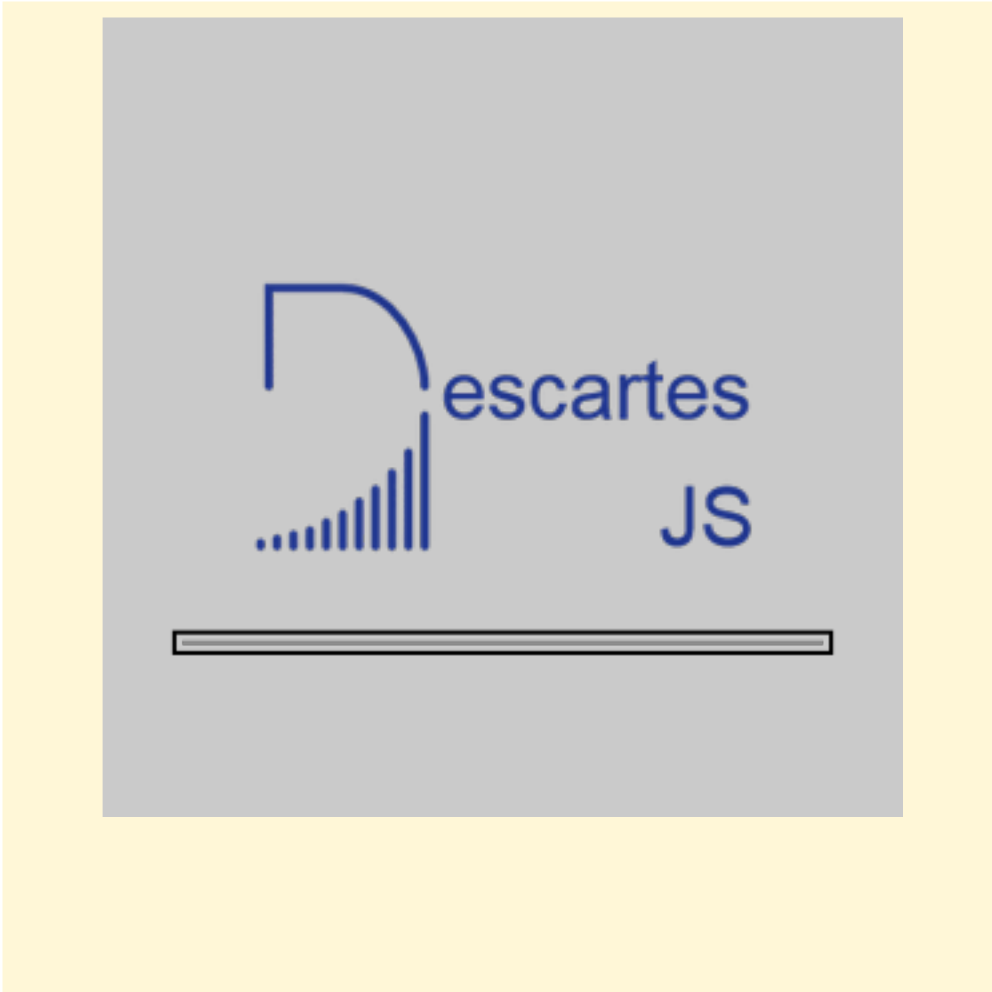
Fuente propia realizada bajo Dominio público

Podemos apreciar que los puntos de la recta real entre -7 y 0 son soluciones comunes a ambas inecuaciones de ahí que la solución del sistema sea: $(-7,0)$.



Fuente propia realizada bajo Dominio público

Comprueba lo aprendido



Escena de José Luis Alonso Borrego en [Proyecto Descartes](). Licencia [CC]()

Resumen

Importante

Propiedades de las desigualdades

Sean a, b y c tres números reales.

1. Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$ para cualquier número c.
2. Si $a<b$, entonces $a \cdot c<b \cdot c$ para cualquier número $c>0$.
3. Si $a<b$, entonces $a \cdot c>b \cdot c$ para cualquier número $c<0$.

Las desigualdades no se comportan igual que las igualdades cuando multiplicamos ambos términos por un mismo número.

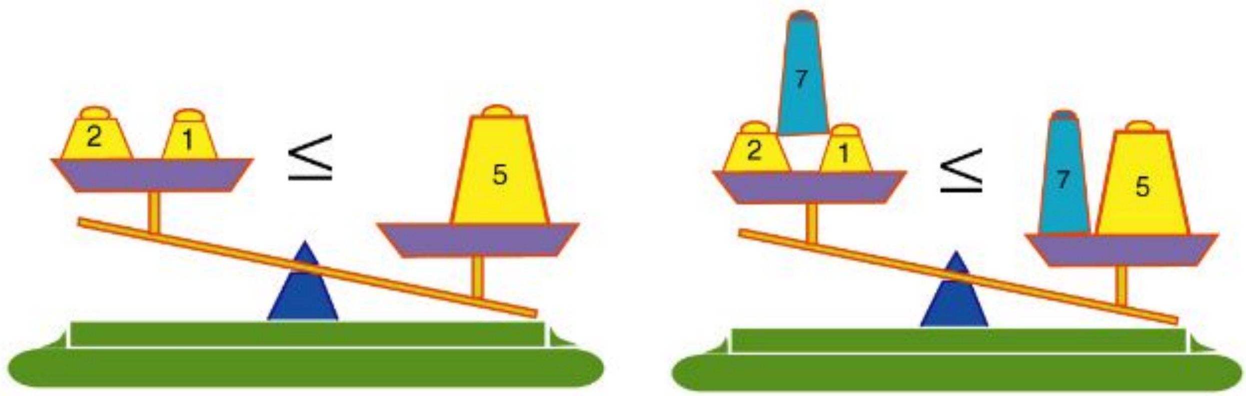
Las propiedades de arriba pueden enunciarse de la siguiente manera:

- Si a los dos miembros de una desigualdad se le suman o restan un número positivo, la desigualdad no cambia de sentido.

- Si a los dos miembros de una desigualdad se le suman o restan un número negativo, la desigualdad no cambia de sentido.

- Si se multiplican o dividen por un número positivo los dos miembros de una desigualdad, entonces la desigualdad no cambia de sentido.

- Si se multiplican o dividen por un número negativo los dos miembros de una desigualdad, entonces se invierte y cambia de sentido.



$3 \leq 5$ $\qquad$ $3 + 7 \leq 5 + 7$

Fuente propia realizada bajo Dominio público

Importante

Dados dos números reales cualesquiera, a y b, se pueden dar estas tres relaciones entre ellos:

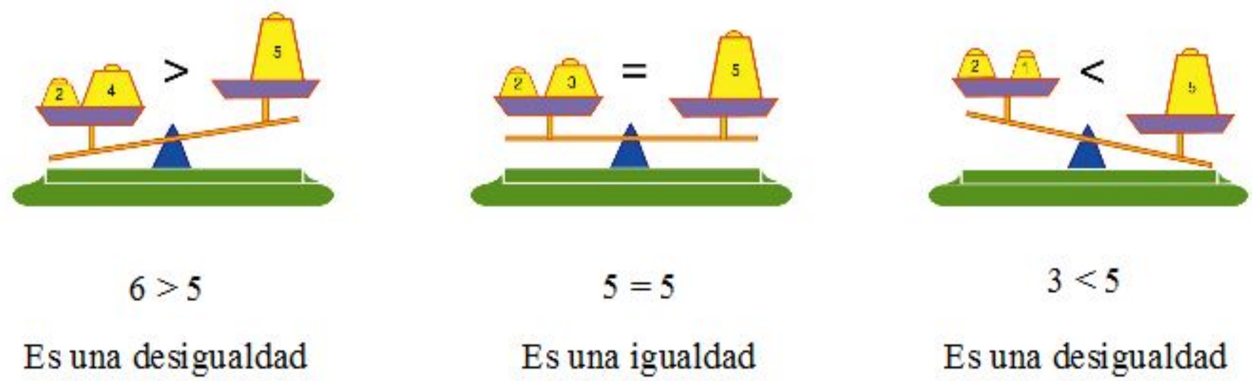
- a < b ; a menor que b. A la expresión la llamamos desigualdad
- a = b ; a igual que b. A la expresión la llamamos igualdad
- a > b ; a mayor que b. A la expresión la llamamos desigualdad

La segunda relación se denomina igualdad y cuando aparecen letras además de cifras numéricas, dan origen a las ecuaciones.

Las relaciones primera y tercera se denominan desigualdades y cuando aparecen letras además de cifras numéricas, dan origen a las inecuaciones. Con ellas trabajaremos en este tema.

Por otro lado estas propiedades que cumplen todos los números reales, hace que su conjunto, el conjunto de los números reales, sea totalmente ordenado . Hablamos entonces, del orden de los números reales .

Otra forma de visualizar las desigualdades y el orden de los números reales sería:



Fuente propia realizada bajo Dominio público

Importante

Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de números reales que cumplen la desigualdad. Este conjunto infinito de soluciones será un intervalo de la recta real.

El proceso de resolución consiste en realizar transformaciones (suma, resta, multiplicación o división) de una misma cantidad a ambos miembros de una inecuación, hasta llegar a una inecuación en la que la incógnita esté sóla en uno de sus miembros, en el otro haya un número y, entre ambos, uno de los signos de desigualdad.

El objetivo de estas transformaciones es llegar a obtener uno de los siguientes modelos (donde *x* es la incógnita y *s* un número real)

$$x<s \quad x\leq s \quad x>s \quad x\geq s$$

Finalmente, la solución de la inecuación vendrá dada por los infinitos valores que verifican esta última desigualdad. Es decir, todos los puntos del intervalo que tienen por extremo inicial (o final) al valor s.

Importante

Ahora que sabemos resolver inecuaciones lineales, vamos a ver cómo se pueden resolver sistemas de dos inecuaciones lineales con una incógnita.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Resolvemos cada inecuación por separado.
2. La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones por separado.

Importante

Inecuaciones cuadráticas

Son aquellas que adoptan las siguientes formas:

$$\begin{array}{|ll|} ax^2+bx+c>0 & ax^2+bx+c\geq 0 \\ ax^2+bx+c<0 & ax^2+bx+c\leq 0 \end{array}$$

Siendo a, b y c números reales cualesquiera.

Inecuaciones racionales

Vamos a ver, como caso más sencillo, aquellas que adoptan la forma:

$$\begin{array}{|l|} \frac{ax+b}{cx+d}>0;\ \frac{ax+b}{cx+d}\geq 0 \\ \frac{ax+b}{cx+d}<0;\ \frac{ax+b}{cx+d}\leq 0 \end{array}$$

Siendo a, b, c y d números reales cualesquiera.

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito NDVA.

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y