



Imagen de [ccordoba](#) bajo licencia Creative Commons

En la sociedad actual en la que vivimos optimizar, maximizar beneficios y minimizar costos, es una expresión cotidiana en el mundo laboral y empresarial; que afecta de manera directa e importante a nuestras vidas.



Imagen de la [University of St. Andrews](#), Scotland

A las empresas de distribución de mercancías (materias primas, productos de consumo), reparto de paquetería, transporte de viajeros,... se les plantea el problema diario de la logística, es decir, asignar conductores, vehículos, rutas, horarios, mercancías, ... y conseguir la distribución óptima, puede suponer un ahorro importante de dinero y por lo tanto un mayor beneficio empresarial.

Este problema, que en algunas empresas forma parte de su organización diaria, puede llegar a tener un número muy alto de variables (miles en algunos casos) y las matemáticas nos ayudarán a resolverlo.

A esta rama de las matemáticas se le llama Programación Lineal y está contenida dentro de otra más amplia denominada Investigación Operativa, encargada básicamente de ayudar en la toma de decisiones utilizando métodos cuantitativos.

Aunque ya se habían estudiado problemas de optimización con anterioridad, podemos decir que la Programación lineal surge durante la Segunda Guerra Mundial. Las matemáticas ayudan al ejército a la hora de la intendencia, minimizando costes; así como a entorpecer este reparto en las filas enemigas.

En 1947 George Bernard Dantzig, matemático americano, ideó el método del SIMPLEX para resolver los problemas de programación lineal usando un algoritmo que es posible implementarlo en ordenadores.

Para saber más

Como ves la historia de la programación lineal es bastante reciente. Aquí tienes dos enlaces que te ampliarán un poco más sus comienzos.

[Origen de la programación lineal](#)

[Wikipedia](#)

Curiosidad

Un hecho real en la vida de Dantzig dio origen a una famosa leyenda urbana en 1939, mientras él era un estudiante graduado en Berkeley. Cerca del comienzo de una clase a la que Dantzig llegaba tarde, el profesor Jerzy Neyman escribió en la pizarra dos ejemplos famosos de problemas estadísticos no resueltos. Cuando Dantzig llegó más tarde a clase, pensó que los dos problemas eran tarea para la casa y los escribió en su cuaderno. De acuerdo con Dantzig, los problemas "le parecieron ser un poco más difíciles de lo normal", pero unos pocos días después obtuvo soluciones completas para ambos, aún creyendo que estos eran tareas que debía entregar. Seis semanas después, Dantzig recibió la visita de un excitado profesor Neyman, quien había preparado una de las soluciones de Dantzig para ser publicada en una revista matemática. Años después otro investigador, Abraham Wald, se preparaba para publicar un artículo en el que llegaba a la conclusión del segundo problema, y en este artículo incluyó a Dantzig como coautor.

Esta historia comenzó a difundirse, y fue usada como una lección motivacional demostrando el poder del pensamiento positivo. A través del tiempo el nombre de Dantzig fue removido y los hechos fueron alterados, pero la historia básica persiste en la forma de un mito urbano.





Imagen modificada de [Contando Estrellas](#) bajo licencia Creative Commons

La programación lineal es uno de los casos prácticos más evidente en la resolución de inecuaciones lineales, en nuestra empresa TRANSVELOX la utilizamos para resolver cuestiones tan distintas como:

- Reparto de la mercancía en los distintos tipos de vehículos disponibles.
- Compra de vehículos, según ofertas del mercado
- Asignación de personal a puestos de trabajo.
- Aprovechamiento del espacio a la hora del almacenaje de paquetes.

La semana pasada recibimos la siguiente propuesta de una empresa que tenía que transportar 600 paquetes, todos de las mismas dimensiones y peso.



El envío se hacía desde Jerez de la Frontera a Sevilla.

Nosotros disponemos de dos tipos de furgonetas. La furgoneta mayor (Tipo I) tiene capacidad para 50 paquetes, mientras que en la más pequeña (Tipo II) caben 30.

Los costes que nos supondrán enviar las furgonetas del tipo I son de 120 €, mientras que con la del tipo II el coste es de 60 €.

Para el día solicitado tenemos disponibles 10 furgonetas de cada tipo. Se nos plantean dos cuestiones: ¿Cuál es la distribución óptima para conseguir que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste?

1.1. ¡Que lío!, vamos a organizarnos

Lo primero que hacemos es organizar los datos en una tabla.

Furgoneta	N.º de Furgonetas	N.º de Paquetes transportados	Costes
Tipo I	x	50 x	120x
Tipo II	y	30 y	60y
Total		50x + 30y	120x+60y

Nuestro objetivo es minimizar el coste total de la operación, para ello nos fijamos en la casilla correspondiente, que este caso es Total-Costes **120x+60y**.

A esta expresión la denominaremos **función objetivo** del problema: **$F(x,y)=120x+60y$**

A continuación enumeramos **las restricciones** que se nos imponen en el problema:

- El número de furgonetas del Tipo I tiene que ser mayor o igual a cero y, para ese día, tenemos disponibles 10 furgonetas de ese tipo. Lo podemos representar en una desigualdad doble como: **$0 \leq x \leq 10$** .
- Lo mismo ocurre con las furgonetas del Tipo II, también disponemos de 10 unidades como máximo para ese día. Lo podemos representar con la misma desigualdad, lo que ocurre es que en este caso la variable es "y": **$0 \leq y \leq 10$** .
- Por último tenemos que enviar un número suficiente de unidades para que quepan todos los paquetes, aunque alguna furgoneta no vaya completamente cargada, para ello la capacidad total debe ser igual o mayor a los 600 paquetes que hay que transportar: **$50x+30y \geq 600$** .

Si lo expresamos de forma matemática nuestro problema quedará planteado de la siguiente forma:

Min $120x+60y$

Sujeto a

$0 \leq x \leq 10$

$0 \leq y \leq 10$

$50x+30y \geq 600$



Imagen del [Banco de Imágenes y Sonidos del ITE](#) con licencia Creative Commons

Importante

Un problema de programación lineal con dos variables, x e y, trata de **optimizar** (maximizar o minimizar) una función llamada **función objetivo** que tiene la forma:

Optimizar $F(x,y)=ax+by$

sujeta a unas **restricciones** dadas mediante un sistema de inecuaciones del tipo:

$$a_1x + b_1y \leq c_1$$

$$a_2x + b_2y \leq c_2$$

.....

$$a_nx + b_ny \leq c_n$$

Ejercicio resuelto

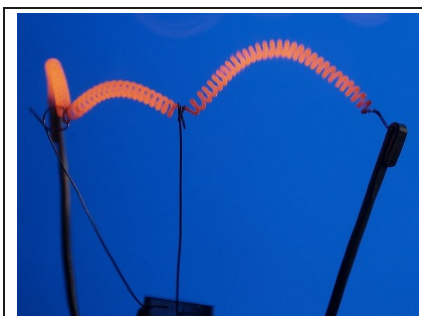


Imagen de [Wikimedia Commons](#) con licencia Creative Commons

Tenemos que comprar bombillas para iluminar un nuevo almacén de paquetes de nuestra empresa TRANS VELOX. Necesitamos que las bombillas sumen un total de 1440 vatios como mínimo. Hemos recibido la oferta de dos tipos de bombillas:

- Bombillas incandescentes tradicionales de 90 vatios al precio de 1 €.
- Bombillas de bajo consumo de 9 vatios (equivalentes a 60 vatios) al precio de 5 €.

Debido a la estructura del almacén el número total de bombillas no puede ser superior a 20. Por otra parte, las normas del ayuntamiento imponen que, para este tipo de salas el número de bombillas de bajo consumo no puede ser inferior a la mitad del de bombillas tradicionales.

Lo primero que tenemos que hacer es organizar los datos en una tabla:

	N.º Bombillas	N.º Vatios	Precio
Incandescentes	x	90x	x
Bajo Consumo	y	60y	5y
Total	x+y	90x+60y	x+5y

Nuestro objetivo es minimizar el coste, por lo tanto, tendremos que minimizar el Precio total: **Min $F(x,y)=x+5y$**

Las restricciones las sacamos de la tabla:

La primera es obvia $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

El número total de bombillas debe ser inferior a 20: $x+y \leq 20$

El número total de vatios tiene que ser superior a 1440: $90x+60y \geq 1440$

Además el ayuntamiento impone que el número de bombillas de bajo consumo no puede ser inferior (tiene que ser igual o superior) a la mitad de las bombillas tradicionales, es decir,

$$y \geq \frac{x}{2} \Rightarrow 2y \geq x \Rightarrow 0 \geq x-2y \Rightarrow x-2y \leq 0$$

Por lo que el planteamiento del problema queda así:

Min $F(x,y)=x+5y$

Sujeto a

$x \geq 0, y \geq 0$

$x+y \leq 20$

$90x+60y \geq 1440$

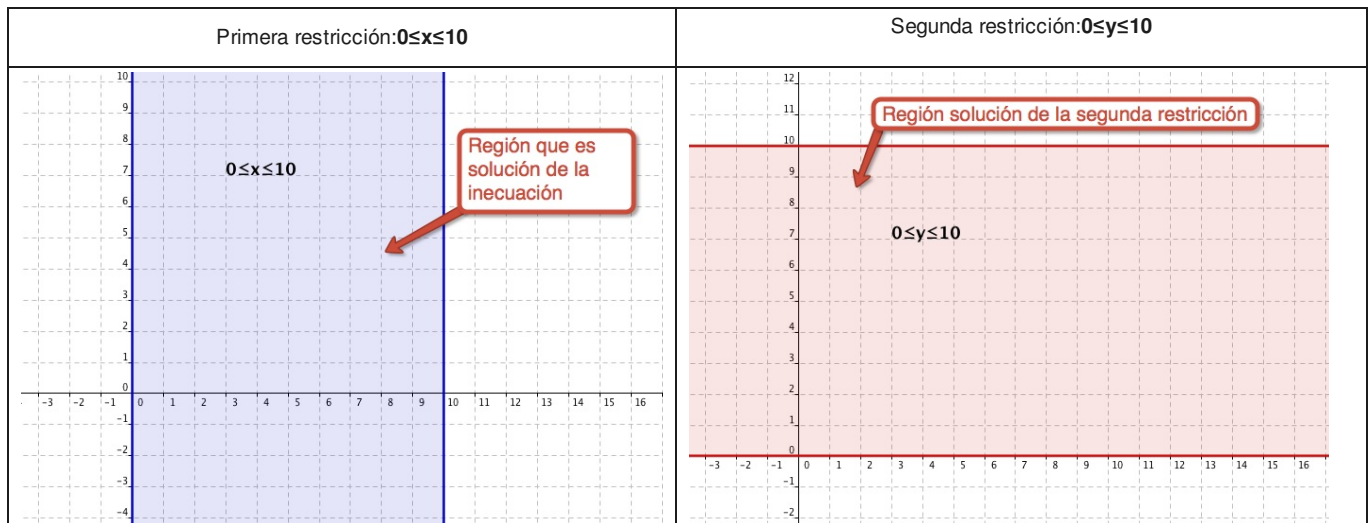
$x-2y \leq 0$

1.2. Buscamos la solución



Para resolver nuestro problema lo primero que haremos será representar gráficamente las restricciones en unos ejes de coordenadas:

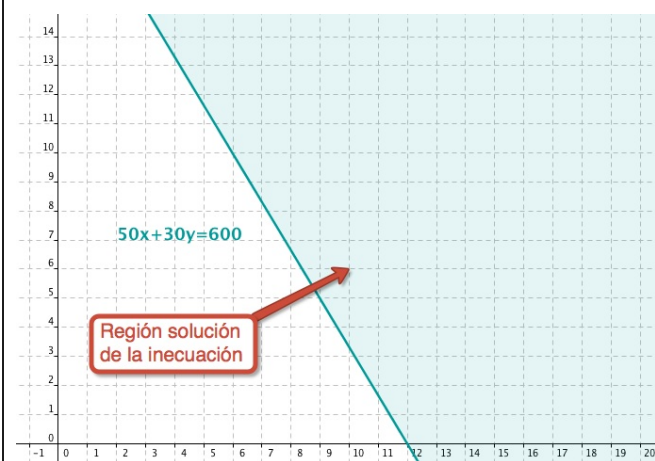
1) Resolvemos cada inecuación por separado



Los puntos que verifican $0 \leq x \leq 10$, son aquellos que están a la derecha de la recta $x=0$ y al mismo tiempo están a la izquierda de la recta $x=10$.

Los puntos que verifican $0 \leq y \leq 10$, son aquellos que están por encima de la recta $y=0$ y al mismo tiempo están por debajo de la recta $y=10$.

Tercera restricción: $50x + 30y \geq 600$



Con este vídeo puedes recordar como representar una recta en el plano:

En este caso lo primero que hacemos es representar la recta $50x + 30y = 600$. Una vez representada basta sustituir un punto, el $(0,0)$ por ejemplo, para saber cual es el semiplano solución. Si sustituimos $(0,0)$ en $50x + 30y \geq 600$ obtenemos:

$$50 \cdot (0) + 30 \cdot (0) \geq 600 \Rightarrow 0 \geq 600$$

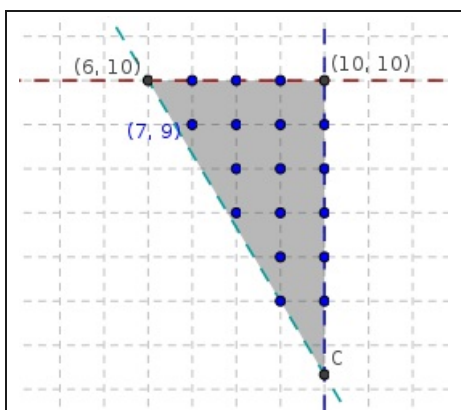
Que es falso, por lo tanto, el semiplano solución es el que no contiene al origen de coordenadas.

Recuerda que para saber el semiplano solución de una inecuación basta con sustituir un punto, el $(0,0)$ por ejemplo si no pertenece a la recta. Si el punto verifica la inecuación, el semiplano que contiene el punto es la solución, en caso contrario es el otro semiplano.

2) Calculamos la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones

Representamos las tres regiones en la misma gráfica, la región intersección será el lugar donde se encuentre la solución que buscamos. Marca la casilla correspondiente para ver su solución.

La solución a nuestro problema debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta región recibe el nombre de **región factible**.



En nuestro caso la región factible está acotada, es decir, es un polígono. Hay problemas donde la región no está acotada. En cualquier caso siempre es un polígono o una región **convexa**.

Nos falta añadir una condición. No podemos enviar 6,5 furgonetas, por lo tanto, el número de furgonetas de cada tipo han de ser números enteros. Por lo tanto, la solución la buscaremos entre los puntos que están dentro de la región factible y sus coordenadas son números enteros. En nuestro caso hay 20 posibles soluciones.

Habrà que averiguar en cuál de ellos la función $F(x,y)=120x+60y$ toma un valor menor. Por ejemplo para el punto (7,9), que nos indica 7 furgonetas del tipo I y 9 furgonetas del tipo II, le corresponde un gasto de $F(7,9)=120 \cdot (7)+60 \cdot (9)=840+540=1380$ €.

¿Podemos mejorarlo?

Imagínate que en vez de 20 posibles soluciones hubiera 15000. Vamos a buscar un método en el que podamos resolver el problema sin necesidad de ir calculando punto a punto hasta ver cuál es el coste mínimo.

Importante

La solución de un problema de programación lineal se encuentra en una región poligonal, esta región viene determinada por la solución de todas las restricciones de nuestro problema. A esta región se le denomina **región factible**.

Esta región factible puede ser acotada o no acotada. Si la región es acotada el problema siempre tiene solución. Si no es acotada puede que no tenga solución.

Además, la solución puede ser discreta (sólo podemos tomar valores enteros) o continua (puede tomar cualquier valor dentro de la región).

Ejercicio resuelto

¿Recuerdas el ejercicio resuelto del apartado anterior donde ayudábamos a plantear el problema de las bombillas necesarias para el nuevo almacén de TRANS VELOX?

Su planteamiento nos había quedado así:

$$\text{Min } F(x,y)=x+5y$$

Sujeto a

$$x \geq 0, y \geq 0$$

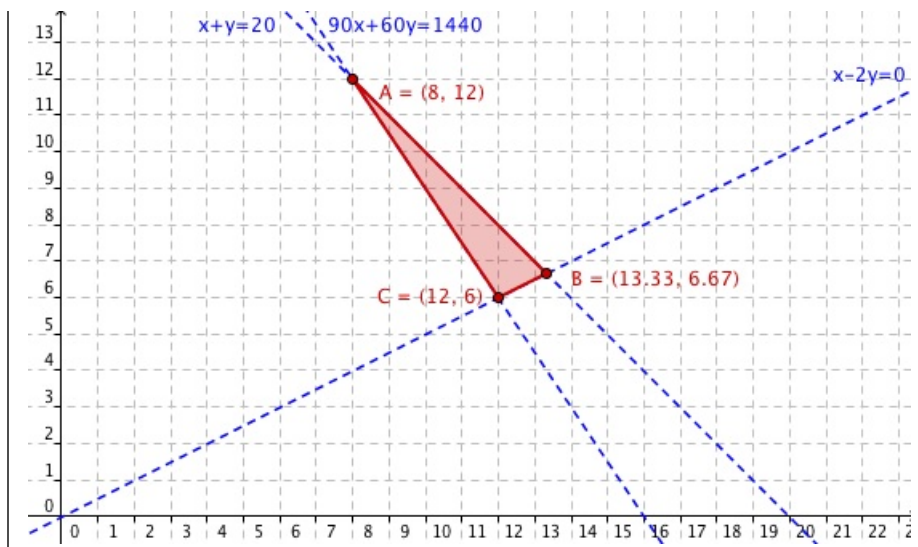
$$x+y \leq 20$$

$$90x+60y \geq 1440$$

$$x-2y \leq 0$$

Ayúdanos a representar la región factible

La región factible del problema es:



Comprueba lo aprendido

La función que tenemos que maximizar o minimizar se denomina:

Sugerencia

- ☐ Función Factible
- ☐ Función Objetivo
- ☐ Función Restrictiva
- ☐ Función Óptima

Creo que no, que lo que es factible es la región donde están las soluciones

Muy bien

Tiene restricciones, pero no la función sino el problema

No. No es la mejor función.

Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Opción correcta (Retroalimentación)
3. Incorrecto (Retroalimentación)
4. Incorrecto (Retroalimentación)

¿Qué punto pertenece al semiplano dado por la inecuación $2x+y \leq -5$?

Sugerencia

- ☐ A(-1,3)
- ☐ B(3,-8)
- ☐ C(-2,-3)
- ☐ D(-3,5)

No, 1 no es menor que -5.

No, -2 no es menor que -5


Muy bien, -7 es menor que -5.

No, -1 no es menor que -5.

Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)
3. Opción correcta (Retroalimentación)
4. Incorrecto (Retroalimentación)

Las siguientes restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 2$ delimitan:

 [Sugerencia](#)

- ☐ Una región acotada.
- ☐ Una región no acotada.
- ☐ Una región minimizada.
- ☐ No representa ninguna región.

Creo que no la has representado bien. Inténtalo de nuevo.

Muy bien.

Minimizada, ¿estás seguro? Yo creo que no.

Sí, sí que representa una región.

Solución

1. [Incorrecto \(Retroalimentación\)](#)
2. [Opción correcta \(Retroalimentación\)](#)
3. [Incorrecto \(Retroalimentación\)](#)
4. [Incorrecto \(Retroalimentación\)](#)

1.3. Lo resolvemos

Para encontrar la solución nos vamos a ayudar de la función objetivo $F(x,y)=120x+60y$. ¿Cómo?, representando en primer lugar la recta $120x+60y=0$, y a partir de ella iremos trazando rectas paralelas hasta que llegemos a la región factible.

Recuerda que todas las rectas que son paralelas a $120x+60y=0$ son aquellas que tienen la forma $120x+60y=k$, donde k puede tomar cualquier valor.

Vamos a verlo gráficamente. Para ello, en la siguiente escena, mueve el punto k , que está sobre el deslizador rojo. Llévalo a cero y aumenta su valor hasta que toques con el primer punto factible. Este punto será la solución de nuestro problema.

Como podemos observar en la escena anterior el primer punto de la región con el que "tropieza" la recta es el punto $(6,10)$. Este punto es la solución pues, de todos los puntos factibles, en este es donde la función objetivo toma el valor más pequeño, es decir, es el punto de menor coste para la empresa. Esto quiere decir que la solución óptima consiste en enviar 6 furgonetas del tipo I y 10 furgonetas del tipo II.



Imagen de [Wikimedia Commons](#) con licencia Creative Commons

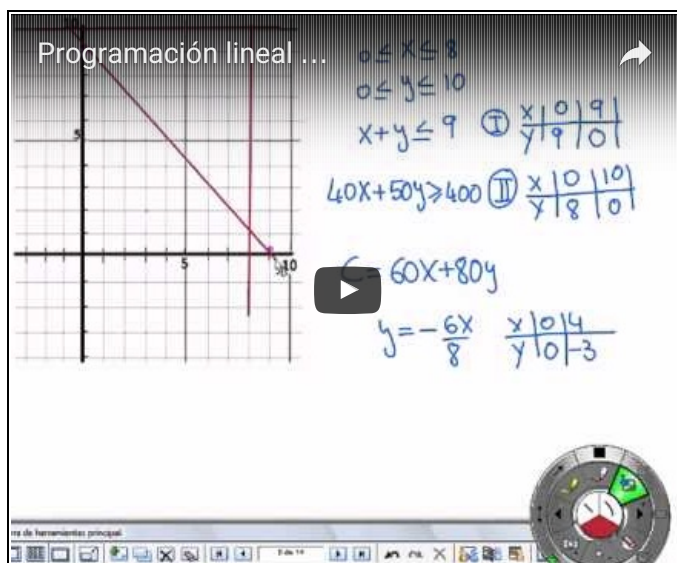
Para este punto la función objetivo toma un valor de 1320, es decir, $F(6,10)=120 \cdot 6 + 60 \cdot 10 = 720 + 600 = 1320$. El coste de enviar las furgonetas es de 1320€.

Conclusión:

Tenemos que enviar 6 furgonetas del Tipo I y 10 furgonetas del tipo II. El coste de la operación es de 1320€.

Después de ver el resultado parece lógico pensar que tenemos que enviar el mayor número de furgonetas del tipo II disponibles, ya que su coste es justo la mitad de las del tipo I y dos furgonetas del tipo II (coste 120€) transportan 60 paquetes, 10 más que una sola del tipo I (coste 120€). Es decir, a igual coste es mejor enviar 2 del tipo II, que una del tipo I.

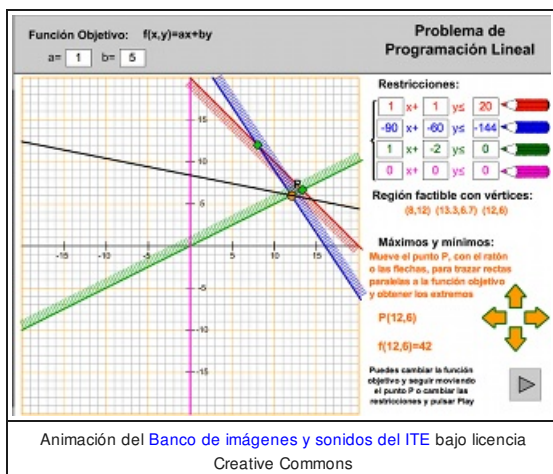
Con este vídeo podrás repasar todo el proceso de construcción de un problema de programación lineal a partir del planteamiento del problema. Pertenece a una serie llamada Programación lineal que consta de 11 videos, te pueden ser de gran ayuda:



Importante

- La solución para un problema de programación lineal, si existe, siempre se alcanzan en los vértices de la región factible.
- Si el valor óptimo se alcanza en dos de los vértices de la región factible A y B, entonces también son solución todos los puntos del segmento AB, es decir, el que corresponde a un lado de la región factible.

Ejercicio resuelto



Bueno, vamos a terminar el problema de las bombillas. Para ello puedes ayudarte de una herramienta (haz clic en la imagen) que resuelve problemas de programación lineal una vez que los tenemos planteados.

Sólo tenemos que escribir los coeficientes de la función objetivo y de las restricciones (cómo máximo admite 4 restricciones)

Vamos pulsando el botón que hay en la parte inferior derecha y vemos como se van dibujando cada una de las restricciones y la función objetivo.

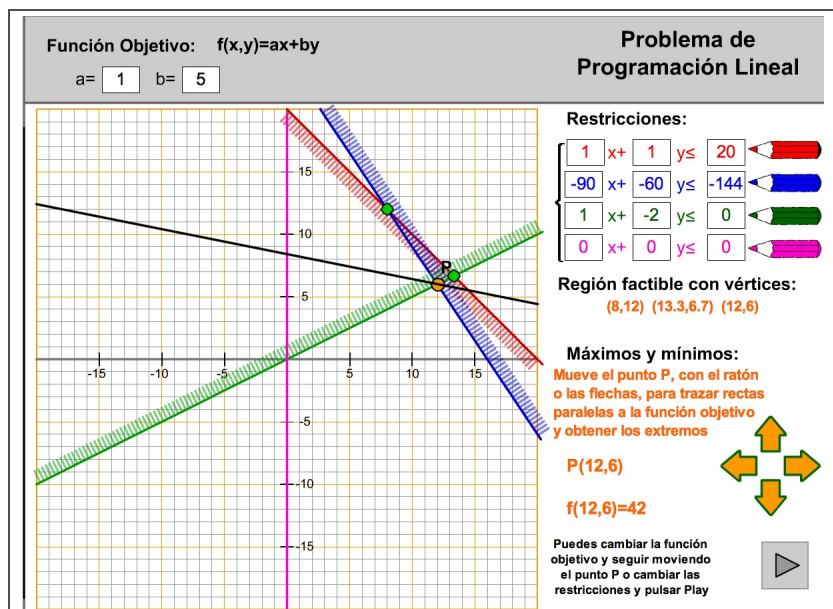
Una vez que termina la representación puedes mover el punto amarillo con el ratón o con los cursores que hay en la parte inferior derecha.

Justo al lado de los cursores está el punto representado y el valor de la función objetivo para ese punto.

Te recuerdo que el valor óptimo, si existe, está en los vértices de la región factible.

En nuestro caso, las restricciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$ son redundantes, es decir, no son necesarias para resolver el problema.

El mínimo se alcanza en el punto $(12,6)$ y el valor de la compra de las bombillas es de 42 €, como podemos ver en la siguiente captura de pantalla:



Comprueba lo aprendido

1. Un problema de Programación Lineal consiste en:

- ☐ Encontrar unas restricciones
- ☐ Representar una región factible
- ☐ Optimizar una función objetivo sujeta a unas restricciones
- ☐ Calcular el valor mínimo de una función a partir de una región factible

No, esto sólo es una parte del problema

No, esto sólo es una parte del problema

Opción correcta

Bueno, también puede ser máximo, y la región factible la tenemos que construir a partir de los datos del problema.

Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)
3. Opción correcta (Retroalimentación)
4. Incorrecto (Retroalimentación)

2. La región factible determinada por las restricciones:

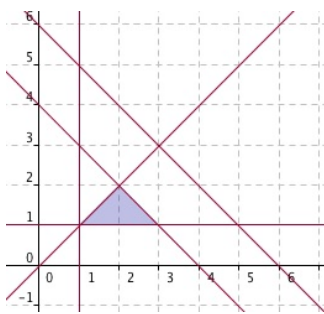
$$2x+2y \leq 8$$

$$x+y \leq 6$$

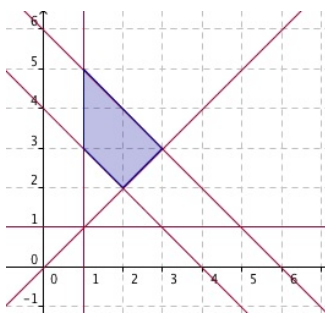
$$y \geq x$$

$$x \geq 1, y \geq 1$$

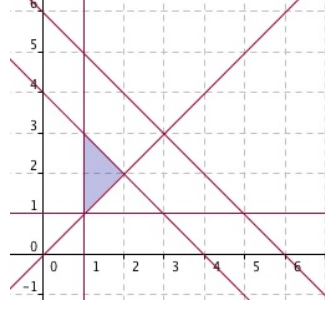
es una de las siguientes:



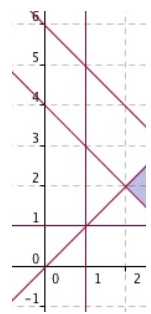
Región 1



Región 2



Región 3



Región 4

Sugerencia

- ☐ Región 1
- ☐ Región 2
- ☐ Región 3
- ☐ Región 4

Esta no cumple $y \geq x$

Esta no cumple $2x+2y \leq 8$

Muy bien, esta es.

Esta no cumple ni $y \geq x$, ni $2x+2y \leq 8$

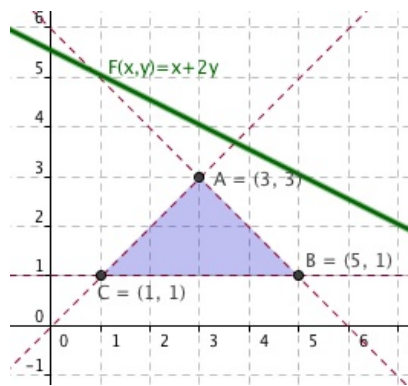
Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)
3. Opción correcta (Retroalimentación)
4. Incorrecto (Retroalimentación)

3. La siguiente imagen representa la región factible de un problema de programación lineal, junto con una de las representaciones de la función objetivo $F(x,y)$.

Sugerencia

- ☐ El valor mínimo de la función objetivo se alcanza en el punto B(5,1)
- ☐ El valor máximo de la función objetivo se alcanza en cualquier punto del segmento AB
- ☐ El valor mínimo de la función objetivo se alcanza en el punto (3,2)



☐ El valor mínimo de la función objetivo se alcanza en el punto C(1,1)

No, para ese punto el valor de la función objetivo es $F(5,1)=(5)+2\cdot(1)=7$, y para el punto (2,1), que también está en la región factible es $F(2,1)=(2)+2\cdot(1)=4$

Aunque en el punto A se alcanza el máximo de la función objetivo, para que la solución fuese todo el segmento AB, tendría que tomar en B el mismo valor que en A, y esto no es así. También tendría que ocurrir que la función objetivo fuera paralela a la recta que contiene a los puntos A y B, y esto tampoco es así

No, para este punto el valor de la función objetivo es $F(3,2)=(3)+2\cdot(2)=7$, y, para el punto de la región factible (2,2) el valor es menor $F(2,2)=(2)+2\cdot(2)=6$

Muy bien, para ese punto el valor de la función objetivo es $F(1,1)=(1)+2\cdot(1)=1+2=3$

Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)
3. Incorrecto (Retroalimentación)
4. Opción correcta (Retroalimentación)

2. Aplicamos lo aprendido



Existen tres grandes problemas clásicos que la programación lineal intentó resolver en un principio (haz clic sobre la siguiente presentación para ir pasando las páginas):

Vamos a ver cada uno de ellos por separado.



Imagen modificada de [yuichi.sakuraba](#) bajo licencia CC

La confitería "Tartasoro" es famosa por sus dos especialidades en tartas: la Tarta Imperial y la Tarta de Lima.

La Tarta de Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 16€. La tarta de Lima necesita 1 Kg de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de 20€. En el almacén quedan 10 Kilos de azúcar y 120 huevos.

Vamos a ayudarles para saber cuantas unidades de cada especialidad tienen que hacerse para obtener el mayor ingreso por ventas.

1. Organizamos los datos

Lo primero que haremos es organizar los datos en una tabla.

Tartas	Número	Azúcar	Huevos	Ganancias
Imperial	x	0,5x	8x	16x
Lima	y	1y	8y	20y
Total		0,5x+y	8x+8y	16x+20y

Nuestro objetivo es maximizar las ganancias, por lo tanto, nuestro objetivo es maximizar la función $F(x,y)=16x+20y$

Las restricciones a nuestro problema son:

1. Tanto x como y tienen que ser positivas o nulas, es decir: $x \geq 0$, $y \geq 0$.
2. La cantidad de azúcar total no puede ser superior a 10 kg: $0,5x+y \leq 10$.
3. La cantidad de huevos tiene que ser inferior a 120 unidades: $8x+8y \leq 120$.

Por lo tanto, el planteamiento de nuestro problema será:

Máx $F(x,y)=16x+20y$

Sujeto a

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

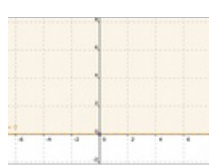
$$0,5x+y \leq 10$$

$$8x+8y \leq 120$$

2. Representamos la región factible

En este caso tenemos 4 desigualdades. Vamos a ayudarnos del programa Geogebra para hallar la región factible de nuestro problema.

En la siguiente galería tienes las 4 imágenes correspondientes a la solución de cada una de las desigualdades.



3. Resolvemos el problema

En la siguiente escena de Geogebra podemos ver la región factible (Intersección de todas las restricciones). Moviendo el deslizador k , vemos como va variando la función objetivo y su valor.

4. Conclusión

En el punto $Q(10,5)$ se obtiene el máximo valor de la función objetivo, que en este caso es 260.

Esto quiere decir que el máximo beneficio, 260 €, se obtiene cuando fabrican 10 Tartas Imperiales y 5 Tartas de Lima.

Reflexiona

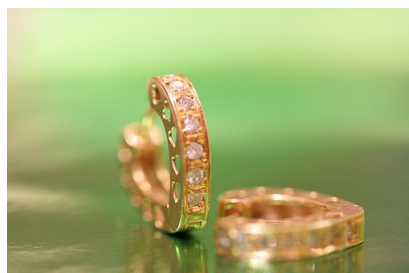


Imagen de [Rubyan](#) bajo licencia Creative Commons

En la joyería "Mibrillante" fabrican pendientes y sortijas.

Para hacer unos pendientes se usan 2 gramos de oro y 1 gramo de plata, mientras que para hacer las sortijas necesitan 2 gramos de oro y 3 gramos de plata.

Los pendientes los venden a 50€ y las sortijas a 60€.

Disponen de 400 gramos de oro y 400 gramos de plata.

Ayuda a los joyeros a decidir cuántas joyas tienen que fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio.

Lo primero que tenemos que hacer es organizar los datos en una tabla:

	N.º Joyas	Gramos de Oro	Gramos de Plata	Ganancias
Pendientes	x	$2x$	x	$50x$
Sortijas	y	$2y$	$3y$	$60y$
Total	$x+y$	$2x+2y$	$x+3y$	$50x+60y$

Nuestro objetivo es maximizar las ganancias, por lo tanto, tendremos que maximizar las Ganancias-Total: $\text{Max } F(x,y)=50x+60y$

Si consideramos como unidad monetaria 10€ la función objetivo queda como: **Max $F(x,y)=5x+6y$** . Solo hay que recordar que cuando demos la respuesta tenemos que multiplicar por 10 el valor de la función objetivo para saber cuántos euros son.

Las restricciones las sacamos de la tabla:

- La primera es obvia $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
- Los gramos de oro utilizados en la fabricación de las joyas deben ser inferior a 400 gr: $2x+2y \leq 400$. Podemos

simplicar la inecuación por 2 y nos queda: $x+y \leq 200$

● Los gramos de plata que son utilizados para la fabricación de joyas han de ser menor a 400 gr: $x+3y \leq 400$.

Por lo que el planteamiento del problema queda así:

$$\text{Max } F(x,y)=5x+6y$$

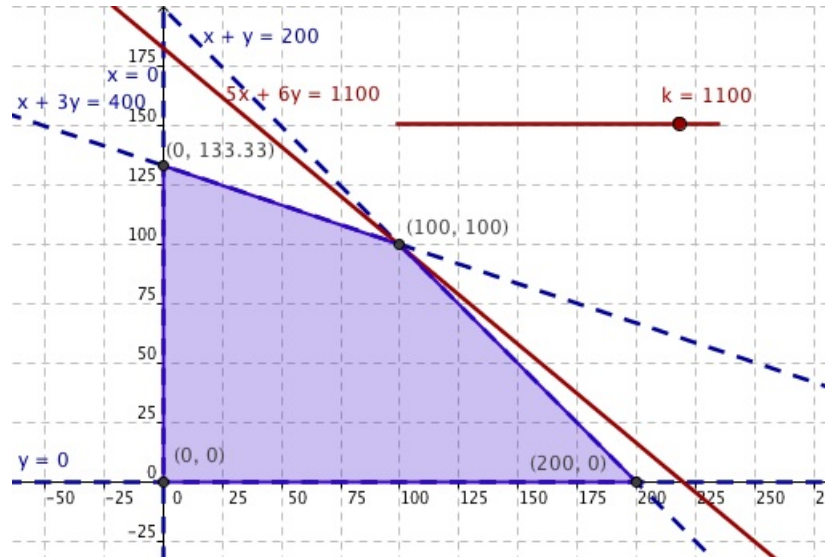
Sujeto a

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$x+y \leq 200$$

$$x+3y \leq 400$$

Una vez planteado el problema, representamos la región factible y calculamos el valor máximo. En la siguiente gráfica puedes ver el resultado:



Conclusión.

El máximo valor de la función objetivo se alcanza para el punto (100, 100) y toma un valor de 1100. Si lo traducimos al planteamiento de nuestro problema, nos indica que hay que fabricar 100 pendientes y 100 sortijas, y el precio total de la venta es de 11.000 €. Recuerda que teníamos que multiplicar por 10 el valor de la función objetivo.

Imagen de [Natalia Lobato](#) bajo licencia Creative Commons

La empresa "Mi Mascota, S.A." se dedica a la elaboración de comida para mascotas. Están trabajando en la elaboración de un nuevo producto para la alimentación de perros teniendo en cuenta que tiene que cubrir sus necesidades mínimas con 3 vitaminas V_1 , V_2 y V_3 al menor coste posible.

Cuenta con dos tipos de pienso P_1 y P_2 que quieren mezclar en las proporciones adecuadas.

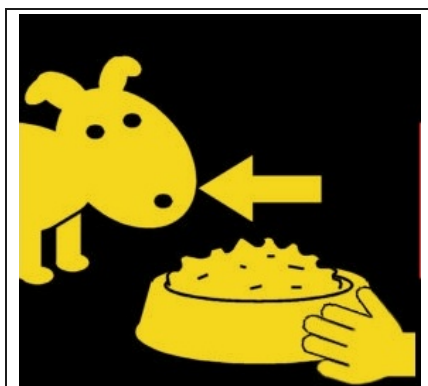
La siguiente tabla muestra las dosis de cada vitamina que tienen 1 Kg de cada uno de los dos tipos de pienso:

	V_1	V_2	V_3
P_1	4	2	1
P_2	1	1	2

Para que el alimento mezclado sea adecuado a las necesidades del perro debe contener, como mínimo, 8 dosis de V_1 , 6 de V_2 y 6 de V_3 .

El coste de cada Kg de P_1 es de 20 €, y el de cada Kg. de P_2 de 10 €.

Vamos a ayudarles para saber en que cantidades tienen que mezclar los dos tipos de piensos para obtener un producto adecuado al menor coste posible. Sabemos que los dos tipos de pienso se venden por Kg, no pudiendo comprarse fraccionadamente, por lo que la solución debe ser de valores enteros.

Imagen modificada de [cony.fu](#) bajo licencia Creative Commons

1. Organicemos los datos

Vamos a llamar x a la cantidad de pienso P_1 e y a la de pienso P_2 . Ponemos todos los datos en una tabla:

	Cantidad	V_1	V_2	V_3	Coste
P_1	x	$4x$	$2x$	x	$20x$
P_2	y	y	y	$2y$	$10y$
Total		$4x+y$	$2x+y$	$x+2y$	$20x+10y$

Nuestro objetivo es minimizar los costes, por lo tanto, habrá que minimizar $F(x,y)=20x+10y$

Vamos con las restricciones. Las dos primeras son obvias: $x \geq 0$ e $y \geq 0$, es decir, la cantidad de cada una de los piensos debe ser positiva o nula.

Las otras tres restricciones saldrán de las cantidades mínimas de cada vitamina:

Vitamina 1 : $4x+y \geq 8$ Vitamina 2: $2x+y \geq 6$ Vitamina 3: $x+2y \geq 6$

Con lo que el planteamiento del problema será:

Min $F(x,y)=20x+10y$

Sujeto a
 $x \geq 0$, $y \geq 0$
 $4x+y \geq 8$
 $2x+y \geq 6$
 $x+2y \geq 6$

2. Representamos la región factible y resolvemos el problema

Como podemos ver en la siguiente escena de Geogebra la región factible es no acotada. Mueve el deslizador k para ver como se desplaza la función objetivo según el valor de ese número k .

3. Conclusión

Hay dos vértices $B(1,4)$ y $C(2,2)$ donde la función objetivo alcanza el mínimo. Como la solución tiene que ser entera, en ese segmento sólo están estos dos puntos con coordenadas enteras.

Si esto no fuera así serían solución todos los puntos del segmento BC . Observa que esto ocurre así porque la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

Por lo tanto, en nuestro problema hay dos posibles soluciones:

- $B(1,4)$ en esta primera posibilidad hay que mezclar 1 kg del Pienso 1 con 4 kg del Pienso 2. El coste es de 60 €.
- $C(2,2)$ en este caso hay que mezclar 2 kg de Pienso 1 con 2 kg de Pienso 2. El coste es también de 60 €.

Reflexiona



Imagen del Banco de Imágenes y sonidos del ITE

La empresa de *catering* "Kerrico S. A." está diseñando un menú para un comedor escolar. El colegio les informa de que la dieta debe cumplir los siguientes requisitos:

- El número de calorías no ha de ser inferior a 2000.
- Debe contener un total de, al menos, 60 gr. de proteínas.
- Debe contener un total de, al menos, 80 gr. de grasas.

Para ello dispone de dos tipos de platos con las siguientes características:

	Calorías	Proteínas	Grasas
Primer Plato (100 gr.)	250	10	15
Segundo Plato (100 gr.)	800	15	20

El precio de 100 gramos del primer plato es de 1 € y del segundo plato de 2 €.

Ayuda a esta empresa a calcular cuántos gramos se deben servir de cada plato para que el coste sea mínimo y cuál es ese coste.

Lo primero que tenemos que hacer es organizar los datos en una tabla:

	Gramos de comida(x100)	Calorías	Proteínas	Grasas	Costes
Primer Plato (100 gr.)	x	$250x$	$10x$	$15x$	x
Segundo Plato (100 gr.)	y	$800y$	$15y$	$20y$	$2y$
Total	$x+y$	$250x+800y$	$10x+15y$	$15x+20y$	$x+2y$

Nuestro objetivo es minimizar los costes, por lo tanto, tendremos que minimizar la celda Costes-Total: $\text{Min } F(x,y)=x+2y$

La función objetivo nos queda como: **Min $F(x,y)=x+2y$.**

Las restricciones las sacamos de la tabla:

- La primera es obvia $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
- Las calorías no deben ser inferiores a 2000: $250x+800y \geq 2000$. Podemos simplificar la inecuación dividiendo toda la expresión por 50 y nos queda: $5x+16y \geq 40$
- Debe contener un total de, al menos, 60 gr. de proteínas: $10x+15y \geq 60$. Dividimos ahora por 5 para simplificar la inecuación: $2x+3y \geq 12$.
- Debe contener un total de, al menos, 80 gr. de grasas: $15x+20y \geq 80$. Simplificamos de nuevo dividiendo los dos términos de la inecuación por 5: $3x+4y \geq 16$

Por lo que el planteamiento del problema queda así:

Min $F(x,y)=x+2y$

Sujeto a

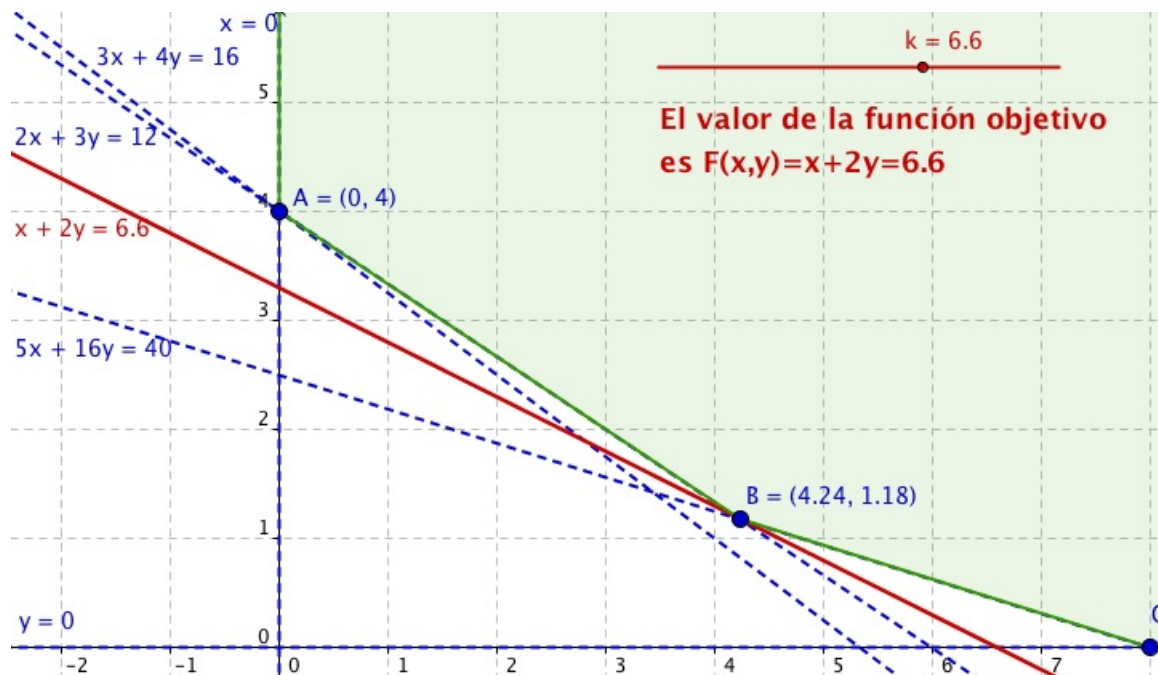
$x \geq 0, y \geq 0$

$5x+16y \geq 40$

$2x+3y \geq 12$

$3x+4y \geq 16$

Una vez planteado el problema, representamos la región factible y calculamos el valor máximo. En la siguiente gráfica puedes ver el resultado:



Conclusión:

El mínimo valor de la función objetivo se alcanza para el punto $B(72/17, 20/17)$, dividiendo $B(4.24, 1.18)$ y toma un valor de 6.6.

Si lo traducimos al planteamiento hay que servir 424 gramos del primer plato y 118 gramos del segundo, con un coste total de 6 euros y 60 céntimos.

Imagen de [barto](#) bajo licencia Creative Commons

A nuestra empresa TRANS VELOX nos ha llegado la oferta del transporte de pescado a las ciudades de Córdoba, Granada y Sevilla. El origen de la mercancía procede de las ciudades de Málaga y Cádiz.

En la siguiente tabla puedes ver los costes, en euros, de transportar una caja de pescado desde las ciudades costeras a las ciudades interiores:

	Córdoba	Granada	Sevilla
Cádiz	2	3	1
Málaga	1	1	2

La oferta desde la ciudad de Málaga es de 250 cajas, y desde Cádiz es de 150. La demanda desde Sevilla es de 200 cajas, 150 por parte de Córdoba y 50 por parte de Granada.

¿Cuál es la mejor opción para distribuir el pescado de forma que los costes de transporte sean los más bajos posibles y de forma que todas las ciudades de destino sean totalmente abastecidas con las cantidades demandadas?

1. Organizamos los datos

Lo primero que hacemos, como siempre es organizar los datos en una tabla. Haz clic sobre la presentación para ver la construcción de la tabla.

					Vamos a explicar como hemos construido la tabla				
	Córdoba	Granada	Sevilla	Total					
Cádiz	x	y	150-x-y	150					
Málaga	150-x	50-y	x+y+50	250					
Total	150	50	200	400					

La función objetivo será el total del número de cajas enviada entre dos ciudades multiplicado por lo que cuesta cada envío:

$$2x+1(150-x)+3y+1(50-y)+1(150-x-y)+2(x+y+50)=2x+3y+450$$

$$\text{Min } F(x,y)=2x+3y+450$$

Las restricciones del problema salen de obligar a que todas las variables de a tabla anterior sean positivas o nulas.

Por lo tanto, se debe resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Min } F(x,y) = 2x + 3y + 450$$

Sujeto a:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 150 \\ 0 \leq y \leq 50 \\ x+y \leq 150 \\ x+y \geq -50 \end{cases}$$

2. Resolvemos el problema

Como puedes ver en la escena siguiente de Geogebra el valor mínimo de nuestra función objetivo se alcanza en el punto A(0,0) y toma un valor de 450. Puedes mover el deslizador k y ver como va variando el valor de la función objetivo

La restricción $x+y > -50$ es redundante, es decir, no es necesaria; pues, aunque no la incluyamos, la región factible sigue siendo la misma.

3. Conclusión

La solución a nuestro problema, $x=0$ e $y=0$, consiste en enviar 150 cajas a Córdoba desde Málaga, 50 cajas a Granada desde Málaga, 150 cajas a Sevilla desde Cádiz y 50 cajas a Sevilla desde Málaga.

Para saber más

Para acabar el tema te voy a dejar unos enlaces a páginas web donde encontrarás ejercicios resueltos de programación lineal para que puedas seguir practicando:

- Página del ITE creado por [José Álvarez](#) (En la parte izquierda tienes un enlace a Problemas, documento PDF que contiene problemas y sus soluciones)
- En los recursos de Thales tienes la página de [Teodoro Coronado](#) en la que hay [actividades resueltas](#) y [actividades propuestas](#).

Ya hemos terminado la unidad, pero antes de pasar a funciones echemos un vistazo a la PAU. En la prueba nos encontraremos en cada una de las opciones, una actividad referente a todo lo que hemos tratado en esta unidad (matrices, grafos y programación lineal), por eso terminamos con un ejercicio propuesto en el 2004.

Ejercicio resuelto

Una pastelería elabora dos tipos de trufas, dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 g de cacao, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1 euro la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1.3 euros la unidad.

En un día, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10.5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día, para maximizar los ingresos, y determine dichos ingresos.



Chilhood Sugar biscuits por Elena Ho
CC by-nc 2.0

PASO 1: Ordenar la información

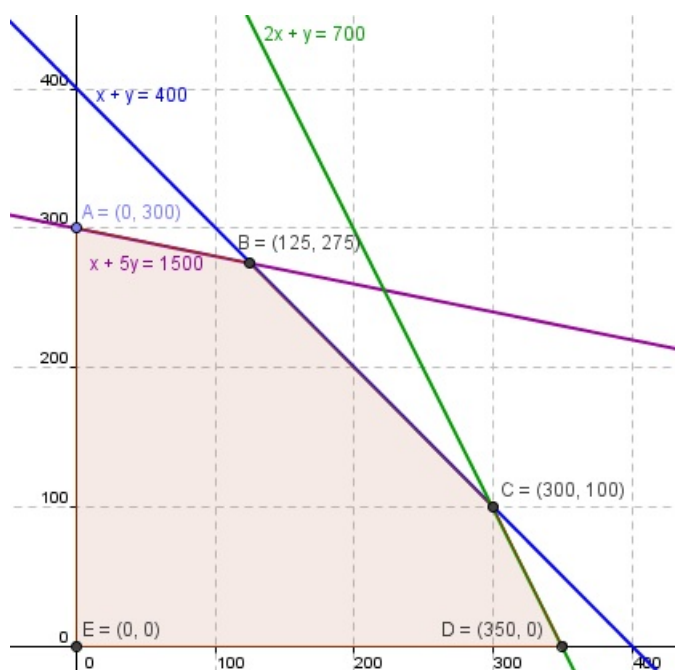
	Cacao (gr)	Nata (gr)	Azúcar (gr)
Trufas dulces (x)	20	20	30
Trufas amargas (y)	100	20	15
TOTAL	30000	8000	10500

Observa como el total que tenemos como máximo de cada producto tiene que tener las mismas unidades, que lo que posee cada unidad (hemos pasado todo a gramos).

PASO 2: Restricciones (simplificadas)

$$\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 5y \leq 1500 \\ x + y \leq 400 \\ 2x + y \leq 700 \end{cases}$$

PASO 3: Representamos la región factible



PASO 4: Posibles soluciones

La región factible no es discreta, por lo tanto puede haber soluciones no enteras. El máximo se dará en alguno de los vértices de la región.

A(0,300), B(125,275), C(300,100), D(350,0), E(0,0)

PASO 5: Función objetivo y máximo.

La función objetivo está relacionada con el dinero que ganamos con cada producto, ya que queremos maximizar el beneficio:

$$F(x,y)=1\cdot x+1,3\cdot y$$

- F(A)=390 €
- F(B)=125+1,3·275= 482,5 €
- F(C)=300+1,3·100= 430 €
- F(D)=350 €
- F(E)=0 €

Luego la solución del problema es 125 trufas dulces y 275 trufas amargas

