

MT1 - Tema 4.4: Análisis I: Funciones exponencial y logarítmica. Funciones trigonométricas. Composición de funciones



Análisis I: Funciones exponencial y logarítmica. Funciones trigonométricas. Composición de funciones

Matemáticas I

1.º Bachillerato

Contenidos

Análisis I

Funciones exponencial y logarítmica. Funciones trigonométricas. Composición de funciones

1. Introducción

Desde que a Newton le cayera en la cabeza, la ciencia ha avanzado mucho. Quizás algunos de nosotros hayamos hecho nuestros primeros pinitos en la ciencia con juegos. Te propongo que nos adentremos en la piel de un científico, dejemos al lado herramientas como las probetas y microscopios y utilicemos otro tipo de utensilios, las funciones.



Imagen Peggy_Marco en [Pixabay](#). [Pixabay License](#)

2. Funciones exponenciales

En temas anteriores hemos estudiado la función $f(x)=x^2$, es un tipo de función donde interviene una potencia, siendo la base una variable y el exponente una constante (en este caso dos). La llamábamos función cuadrática. ¿Pero qué ocurre si cambiamos los papeles y la base es una constante y el exponente una variable? Obtendríamos una función $g(x)=2^x$, llamada **función exponencial**.



Importante

Las funciones del tipo $f(x)=a^x$; donde a es un número real positivo ($a>0$) y distinto de 1, se llaman **funciones exponenciales**.



Comprueba lo aprendido

Vamos a comparar la función cuadrática anterior $f(x)$, con la función exponencial $g(x)$. Rellena los espacios en blanco, con estos valores que le asociamos a la variable independiente x :

x	$f(x)=x^2$	$g(x)=2^x$
0	<input type="text"/>	<input type="text"/>
1	<input type="text"/>	<input type="text"/>
-1	<input type="text"/>	<input type="text"/>
2	<input type="text"/>	<input type="text"/>
10	<input type="text"/>	<input type="text"/>

1. $f(0)=0^2=0$, $g(0)=2^0=1$
2. $f(1)=1^2=1$, $g(1)=2^1=2$
3. $f(-1)=(-1)^2=1$, $g(-1)=2^{-1}=1/2^1=0,5$ (¡Recuerda las potencias de exponente negativo!)
4. $f(2)=2^2=4$, $g(2)=2^2=4$
5. $f(10)=10^2=100$, $g(10)=2^{10}=1024$



Comprueba lo aprendido

La siguiente escena de GeoGebra permite representar las funciones exponenciales $f(x)=a^x$. Ayúdate de ella para completar los siguientes espacios en blanco, donde se expresan algunas propiedades de este tipo de funciones.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/C8ptvSKQ/width/356/height/298/border/888888/rc/false/ai/false/sdz>



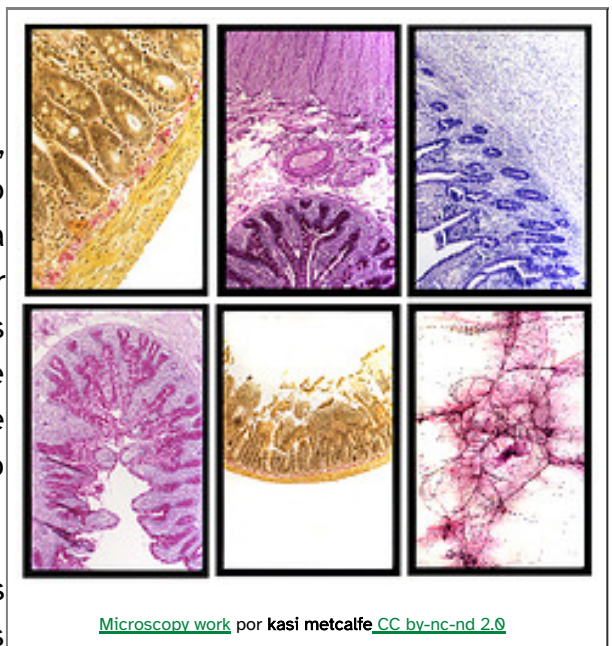
1. Para que f sea una función exponencial a no puede ser ni 0 ni , pues para esos valores la función es una semirecta y una recta respectivamente.
2. El dominio de la función exponencial no depende de a y es
3. La imagen de 0 siempre vale
4. La función es creciente si a es mayor que
5. La función es decreciente si a es menor que
6. f tiene una asíntota horizontal en .



Caso práctico

Algunas bacterias se reproducen por mitosis, es decir, se dividen en dos cada pequeño intervalo de tiempo, dejando la misma carga de ADN en ambas partes. Vamos a imaginar que trabajamos en un laboratorio y estamos estudiando este tipo de bacterias. No es que la vida de millones de personas dependa de nosotros, pero formamos parte de un proyecto secreto...

Si estas bacterias se dividen cada 15 minutos y al principio del día sólo hay una ¿cuántas habrá al final del día?



[Microscopy work](#) por [kasi metcalfe](#) [CC BY-NC-ND 2.0](#)

Lo primero es saber cuántos periodos de 15 minutos, hay en un día. Para ello, las 24 horas las pasamos a minutos, multiplicando por 60: $60 \times 24 = 1440$ minutos.

Minutos	15	30	45	...	1440
Nº Bacterias	2	4	8	...	?

Si dividimos entre 15 obtenemos los periodos de 15 minutos, que serían 96.

Luego tendremos $2^{96} = 7,9 \cdot 10^{28}$ bacterias.

En lenguaje de funciones, si las bacterias se desarrollan según la función exponencial $f(x) = 2^x$, en un día tendremos $f(96) = 7,9 \cdot 10^{28}$

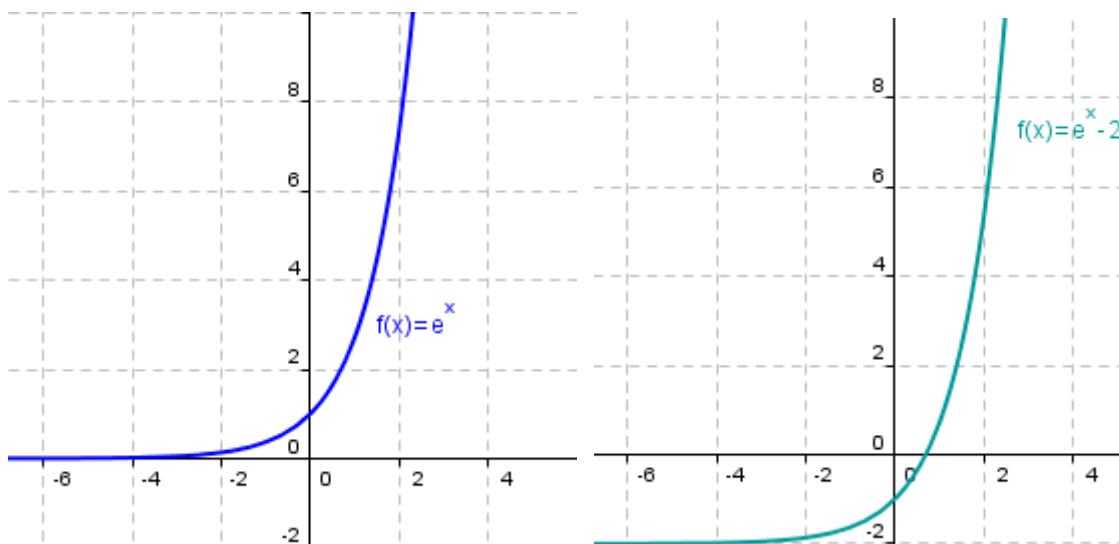


Importante

Una función exponencial muy utilizada es $f(x) = e^x$, siendo $e = 2,718281...$ Estas funciones aparecen con mucha frecuencia en problemas económicos, biológicos, químicos...

En el tema anterior hemos visto la suma de funciones, si una de las funciones es una constante, el efecto que se produce al sumarla a otra función es un desplazamiento o traslación de su gráfica.

En las dos imágenes siguientes se puede apreciar cómo se ha desplazado la gráfica de la función $f(x) = e^x$ al restarle la función constante 2, $g(x) = 2$.





Comprueba lo aprendido

En las siguientes tablas, vamos a recoger algunos valores de las siguientes funciones exponenciales: $y=5^x$, $y=5^x+3$, $y=5^x-2$, $y=5^{x+3}$, $y=5^{x-2}$.

x	$y=5^x$	$y=5^x+3$	$y=5^x-2$
-2	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
-1	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
0	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
1	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
2	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

x	$y=5^x$	$y=5^{x+3}$	$y=5^{x-2}$
-2	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
-1	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
0	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
1	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
2	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Al representar las funciones $y=5^x+3$ e $y=5^x-2$ se observa que son traslaciones de la gráfica $y=5^x$.

Al representar las funciones $y=5^{x+3}$ e $y=5^{x-2}$ se observa que son traslaciones de la gráfica $y=5^x$.

Puedes ayudarte de la escena de GeoGebra de más arriba para completar los espacios en blanco.



Para saber más

El número **e** es un número especial, aunque aquí lo vemos asociado a la función exponencial, su nombre no viene de la inicial de esta palabra. Recibe su nombre del famoso matemático [Leonhard Euler](#).



Curiosidad

[Albert A. Barlett](#) (1923) eminente profesor de Física de la Universidad de Colorado aseguró en cierta ocasión

"El mayor defecto de la raza humana es nuestra incapacidad para comprender la función exponencial"



Curiosidad

¿Recordáis la película de Jurassic Park? Unos científicos obtuvieron ADN de dinosaurios de unos mosquitos de la época de los grandes reptiles, conservados en ámbar. Pero... ¿cómo sabían que los mosquitos eran de esa época? Si se tratara de un estudio real, podríamos suponer que habrán utilizado métodos de datación como el de **carbono 14**. Precisamente este método (junto con otros métodos de datación radiactiva) siguen una función exponencial, con un parámetro diferente para cada elemento radiactivo, pero similares en su estructura:

$$N=N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

donde t sería el tiempo, en tanto que N y N_0 son variables dependientes de número de átomos en cada momento.

3. Funciones logarítmicas

Hay observatorios dedicados a recoger la intensidad de los terremotos, laboratorios con instrumentos capaces de medir la intensidad del sonido que percibe el oído humano, observatorios astronómicos con avanzados telescopios que captan la débil luminosidad de las estrellas más lejanas... Pero nosotros podemos desarrollar todas estas actividades a la vez, gracias a una herramienta muy particular: **la función logarítmica**.

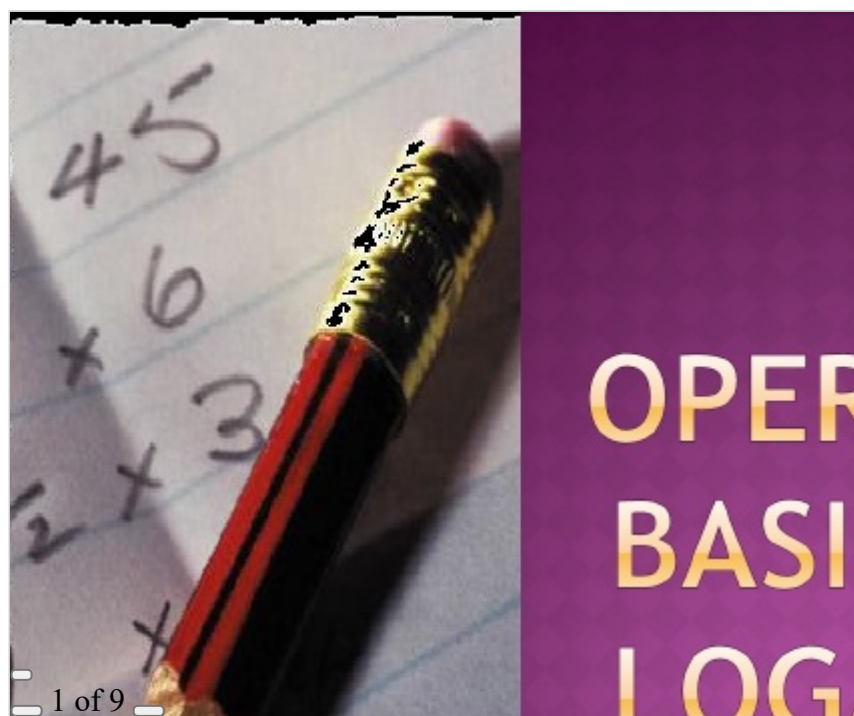


Importante

Las **funciones logarítmicas** son funciones del tipo $f(x) = \log_a x$, donde a es un número real positivo ($a > 0$) y distinto de 1 ($a \neq 1$)

Vemos en la definición y como su propio nombre indica, que esta noción de función se basa en el logaritmo, luego deberíamos repasar este concepto y sus propiedades:

http://www.slideshare.net/slideshow/embed_code/key/M8atjVZNqCHQ45



[Operaciones Basicas 1](#) from [penny224](#)



Comprueba lo aprendido

Manipulemos la siguiente escena de Geogebra para descubrir las principales características de la función logarítmica:

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/b6nrh7DJ/width/415/height/338/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/>



1. El de la función logarítmica es $(0, +\infty)$
2. La función logaritmo siempre pasa por los puntos (,) y $(a, \text{ })$
3. Si $a > 1$, la función es
4. Si $a < 1$ la función es
5. Tiene una asíntota vertical en .

Las cosas se ponen serias, no siempre podemos percibir la belleza de la unión de Naturaleza y Matemáticas, a veces la realidad es más macabra. Estas son las dos caras de una misma moneda:

[Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/bqexucgG1o?rel=0](http://www.youtube.com/embed/bqexucgG1o?rel=0)

Vídeo de AGENCIA EFE alojado en [Youtube](#)

Precisamente la famosa escala de Richter, por la que se miden la intensidad de los terremotos obedece a la siguiente función logarítmica:

$$M = 0.67 \log (0.37E) + 1.46$$

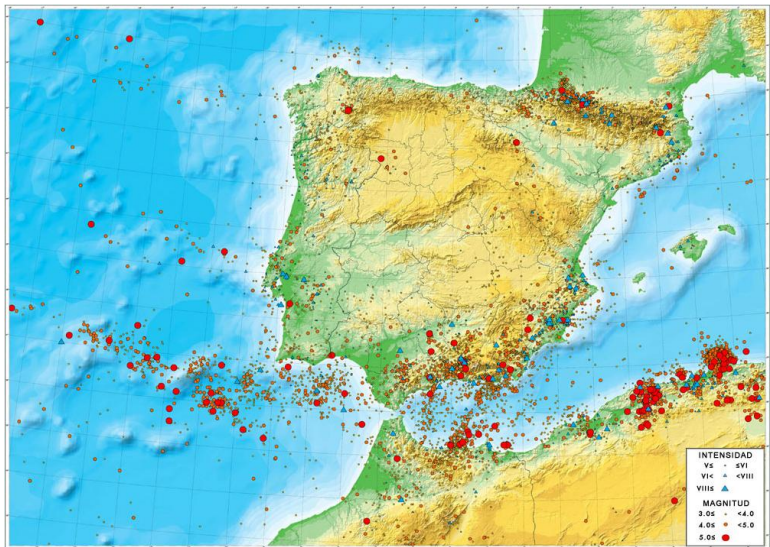
donde E es la energía del Seísmo en kw/hora, y log representa el logaritmo en base 10 (es decir, logaritmo decimal).



Caso práctico

La magnitud M de la escala Richter, se clasifica de la siguiente manera:

- **Menos de 3.5:** Generalmente no se siente, pero es registrado.
- **3.5-5.4:** A menudo se siente, pero sólo causa daños menores.
- **5.5-6.0:** Ocasiona daños ligeros a edificios.
- **6.1-6.9:** Puede ocasionar daños severos en áreas muy pobladas.
- **7.0-7.9:** Terremoto mayor. Causa graves daños.
- **8 o mayor:** Gran terremoto. Destrucción total a comunidades cercanas.



Mapa de Sismicidad de la Península Ibérica de www.fomento.es

Esta escala es "abierta", de modo que no hay un límite máximo teórico, salvo el dado por la energía total acumulada en cada placa, lo que sería una limitación de la Tierra y no de la Escala. A continuación, puedes ver un mapa de las zonas más "conflictivas" en la Península.

Si en la provincia de Granada, se registró un terremoto de 8117274 kw/h:

1. ¿Cuál es su magnitud en la escala de Richter?
2. ¿Qué efectos causa en el medio y en la población?

1. Calculamos el valor de la función anterior en 8117274, $M=0,67 \cdot \log(0,37 \cdot 8117274) + 1,46 = 5,8$ aproximadamente.
2. Este terremoto podría ocasionar daños ligeros en algunos edificios



Curiosidad

Los logaritmos están presentes en la Naturaleza a través de la [espiral logarítmica](#). Pero... ¿puede ser una espiral una función? Podemos anticipar que no, pero para dar una explicación quizás debamos repasar la noción de relación funcional entre dos variables del tema 1.



Imagen de Raúl Villalón en [Flickr](#). Licencia [CC by-nc-nd 2.0](#)



Para saber más

Todas las calculadoras científicas disponen de teclas específicas para calcular el logaritmo.



Por ejemplo, una tecla similar a la de la imagen izquierda, nos permite calcular el logaritmo en cualquier base de un número. Para ello, debemos pulsar la tecla, después la base, y a continuación el número. Es decir, si queremos saber el $\log_3 81$, pulsamos la tecla **logaritmo**, después **3**, a continuación **81**, y la calculadora nos devolverá el número **4**.

Para los logaritmos en bases 10 y e, las calculadoras suelen tener unas teclas específicas. En las dos imágenes siguientes aparecen representadas dichas teclas.

logaritmo decimal, base 10	logaritmo neperiano, base e

4. Funciones trigonométricas

El siguiente vídeo (aunque parezca increíble) no tiene nada que ver con los terremotos, esta vez es la fuerza del viento la que nos pone en órbita, pero nada de huracanes, un viento de 65 km/hora:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/SzObC64E2Ag](https://www.youtube.com/embed/SzObC64E2Ag)

Puente de Tacoma (efecto de resonancia)

Vídeo de Rubén M.Cenzano alojado en [Youtube](#)

Supongo que has observado el movimiento que describe el puente antes de derrumbarse. Esto es debido a un fenómeno llamado resonancia. Pero vayamos a cuestiones más sencillas, este movimiento de tipo ondulatorio podemos representarlo en los ejes coordenados a través de una familia de funciones llamadas **funciones trigonométricas**. A pesar de que esta familia es más extensa, nosotros estudiaremos únicamente la función seno, la función coseno y la función tangente.



Importante

- La función seno es aquella función que a un número real x , le asocia el seno de ese número, es decir **$f(x)=\text{sen } x$** .
- La función coseno es aquella función que a un número real x , le asocia el coseno de ese número, es decir **$f(x)=\text{cos } x$** .
- La función tangente es aquella función que a un número real x , le asocia la tangente de ese número, es decir **$f(x)=\text{tg } x$** .

Recordamos que la tangente de un ángulo se podía definir como el cociente entre el seno y el coseno de ese ángulo. Con las funciones ocurre lo mismo. Ya vimos en el tema anterior que podíamos calcular el cociente entre dos funciones. Hay que tener en cuenta que este tipo de funciones sólo estaba definida para aquellos puntos en los que la función que se encuentra en el denominador sea distinta de cero. Por eso, antes de estudiar la función tangente nos detendremos en las funciones seno y coseno.



Importante

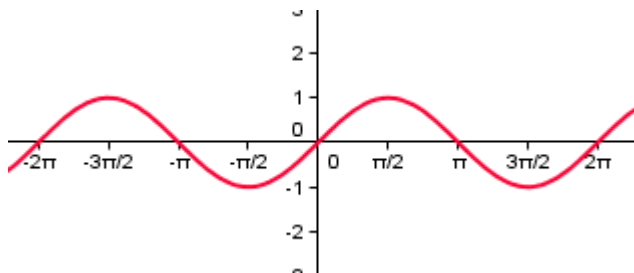
Si nos fijamos en el movimiento que describe el puente parece que se repite cada cierto tiempo. En las funciones también puede ocurrir. Si en la gráfica de una función

observamos que los valores se repiten siempre cada cierto intervalo, decimos que la **función** es **periódica**, y a la longitud de este intervalo se le llama **periodo**. Es decir, si T es el periodo $f(x)=f(x+T)$.

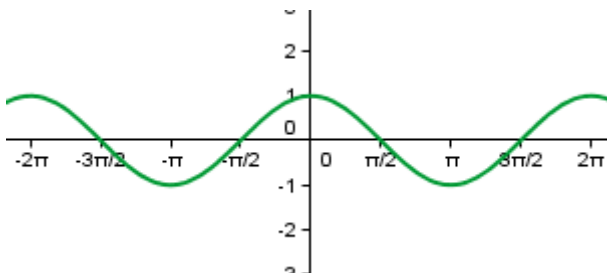


Comprueba lo aprendido

Estudia estas dos gráficas:



$f(x)=\text{sen}(x)$



$g(x)=\text{cos}(x)$

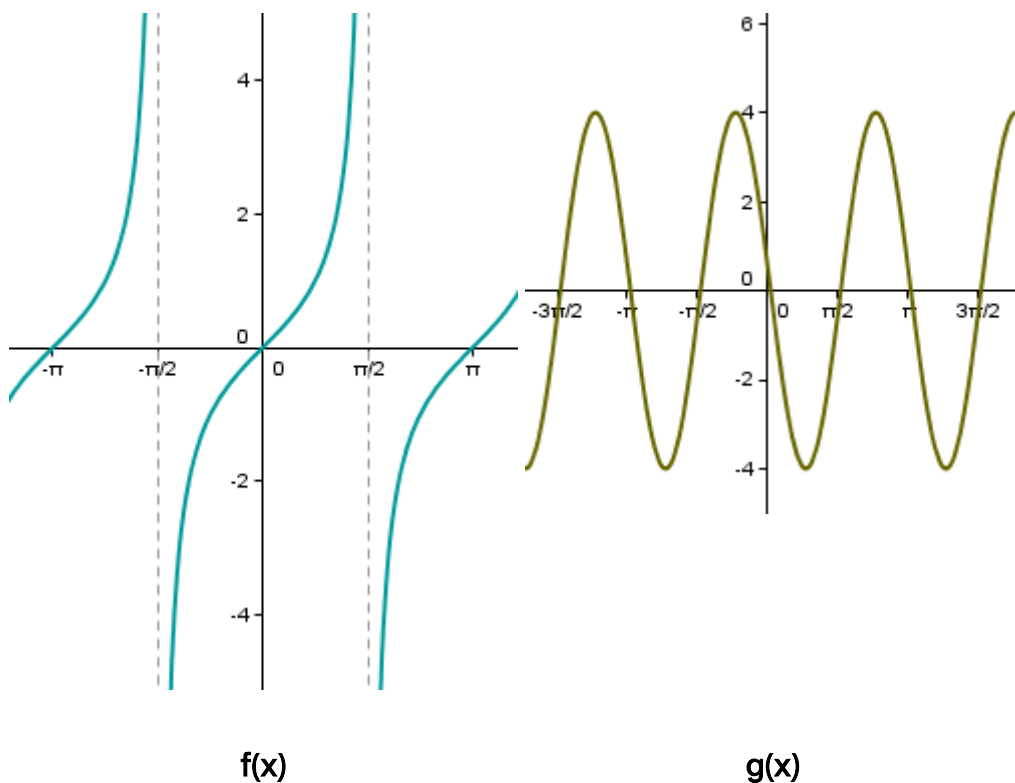
Y completa sus propiedades con los siguientes términos: decreciente, par, creciente, periódicas, -1 , R , impar, 1 .

1. El dominio de ambas funciones coincide y es .
 2. El recorrido de ambas es , .
 3. Son de periodo 2π .
 4. Monotonía: La función seno, es en los intervalos $[0, \pi/2]$ y $[3\pi/2, 2\pi]$, y en $[\pi/2, 3\pi/2]$. La función coseno es de $[\pi, 2\pi]$ y de $[0, \pi]$.
 5. Simetría: La función seno tiene una simetría y la coseno una simetría .
-



Comprueba lo aprendido

Observa las siguientes funciones:



Una de estas gráficas corresponde a la tangente, ¿cuál? Recuerda que la tangente es el cociente entre el seno y el coseno.

- ☐ La función f
- ☐ La función g

¡Muy Bien! La función tangente no existe en los puntos donde el coseno se anula: $\pi/2, 3\pi/2...$

¡Falso! El dominio de la función tangente no puede ser todo \mathbb{R} , pues hay puntos donde el coseno se anula ($\pi/2, 3\pi/2...$) y que no pertenecen a su dominio.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

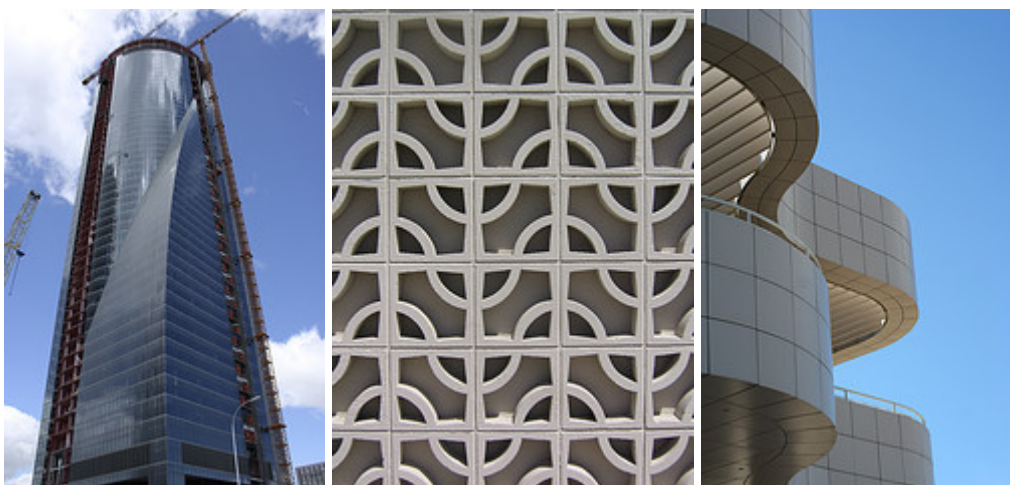
Hemos estudiado ya las funciones seno y coseno, ahora se nos presenta la función tangente. Fíjate cómo tiene asíntotas verticales en aquellos puntos donde la función coseno se hacía 0. Pero empecemos por el principio:

- El **dominio** de esta función son los números reales excepto los múltiplos de $\pi/2$.
- Su **recorrido**, todos los números reales.

- Es **periódica** de periodo 2π .
- Es **creciente** en todo su dominio.
- Tiene una **simetría impar**.

Desde el punto de vista matemático las gráficas de las funciones seno y coseno son formas perfectas, paradigmáticas, de bellas y armoniosas ondas. A partir de ellas se construyen los demás movimientos “armónicos”. Destacan por su periodicidad y repetición cíclica.

Muchos fenómenos que se observan en la naturaleza son periódicos y revisten carácter cíclico. La vida está medida y gobernada por la sucesión de días y noches, veranos, inviernos, años... El cuerpo humano está constantemente animado por ritmos fisiológicos, latidos, respiraciones... Las máquinas que el hombre inventa están gobernadas por la repetición a intervalos regulares de tiempo, incluso la actividad social, como la música, o las elecciones democráticas tienen también su ritmo cíclico.



[y=cos\(x\)](#) por kenwood
[CC by-nc 2.0](#)

[undulating](#) por shindohd
[CC by-nc-sa 2.0](#)

[undulations](#) por wanderignone
[CC by-nc-nd 2.0](#)



Caso práctico

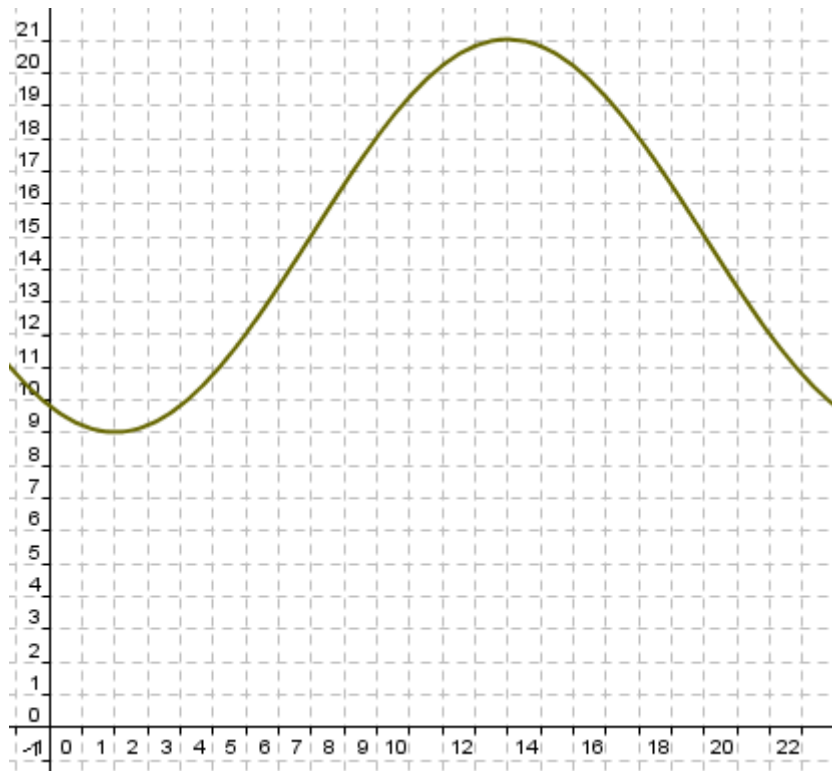
La temperatura del aire, T , en grados centígrados, en una cierta ciudad, en un día de primavera, viene dada por la función:

$$T = 15 + 6\operatorname{sen}\left(\pi\frac{t-8}{12}\right)$$

donde t es el tiempo medido en horas desde la medianoche.

1. ¿Cuál es la temperatura a las 8 h, a las 12 h y a las 6 de la tarde?
2. Representa gráficamente la función.

1. $T(8)=15^{\circ}\text{C}$, $T(12)=20,2^{\circ}\text{C}$, $T(18)=18^{\circ}\text{C}$
2. La siguiente gráfica representa la temperatura en un día:



Curiosidad

Fíjate en las tres fotos anteriores, y en sus títulos. En las dos últimas se aprecia claramente la relación existente entre ellas y las funciones trigonométricas, sin embargo la primera que a priori es diferente tiene un título más explícito... ¿cuál será la relación existente entre esta imagen y nuestra función coseno?

La respuesta la encontramos en el siguiente [artículo](#) del diario [el Mundo](#):

*"Desde abajo, la torre arranca con una base cuadrada y a medida que se eleva va perdiendo sección, esa pérdida va generando una curva que matemáticamente representa la función **y=coseno de x**"*

Por cierto, igual has reconocido en esta foto al edificio madrileño Torre Espacio.

5. Composición de funciones

¿En qué tipo de laboratorio estaríamos si no hiciéramos mezclas o composiciones explosivas? Sabemos que el nuestro es algo particular pero... ¿qué ocurriría si hiciéramos una de estas "composiciones" con las funciones?

Vamos a trabajar la siguiente escena de Geogebra para hacernos una idea de la noción del concepto composición de funciones.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/j3335wmK/width/679/height/373/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/true/>



Importante

Dadas dos funciones, f y g , se llama función compuesta de f con g a la función

$$(g \circ f)$$

que cumple que:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

La expresión $(g \circ f)(x)$ la leemos como f compuesta con g de x . Para nombrarla comenzamos por la función que se encuentra a la derecha, más cerca de la x , porque es la primera que actúa sobre esta variable.

Cuando vamos a realizar la composición de varias funciones debes tener presente:

El dominio

No es que nosotros tengamos funciones que no se puedan componer unas con otras, pero sí tenemos puntos donde la composición no tiene sentido.

La composición de funciones en general no es conmutativa:

En nuestro caso, el orden de los factores sí altera el producto.

En el siguiente ejercicio resuelto, puedes observar el porqué de estas dos advertencias...



Ejercicio Resuelto

Si tenemos las funciones,

$$f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 3}$$

$$g(x) = 3x + 2$$

Vamos a calcular $f \circ g, g \circ f$

Observa con detenimiento el siguiente vídeo

[Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/2ICR830CkPg?rel=0](http://www.youtube.com/embed/2ICR830CkPg?rel=0)



Caso práctico

Un concesionario oficial de coches ofrece un descuento a los jóvenes menores de 30 años que adquieran un vehículo en sus dependencias. El importe de dicha ayuda está supeditado a los ingresos del comprador.

La ayuda está dividida en tramos. Los tramos vienen definidos por la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1000 \\ 2 & \text{si } 1000 < x \leq 2000 \\ 3 & \text{si } 2000 < x \leq 3000 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Una vez conocido el tramo, la cuantía de la ayuda se obtiene dividiendo 800 euros entre el número de tramo, es decir, si x es el tramo, la ayuda será:

$$g(x) = \frac{800}{x}$$

Determina la función a trozos que nos da directamente la cuantía de la ayuda, conocido el sueldo de la persona.

Observa que la función que estamos buscando no es más que la composición de f y g , es decir $g \circ f$.

Antes de dar la solución, veamos qué ocurre con un sueldo de 1200 euros.

$f(1200)=2$ y $g(2)=400$, por tanto si llamamos $h=g \circ f$, $h(1200)=400$.

Si piensas un poco, te darás cuenta que la función h es:

$$f(x) = \begin{cases} 800 & \text{si } x \leq 1000 \\ 400 & \text{si } 1000 < x \leq 2000 \\ 266,67 & \text{si } 2000 < x \leq 3000 \\ \dots & \dots \end{cases}$$



Ejercicio Resuelto

En este enlace a la página [vadenumeros](#) tenemos más actividades para practicar la composición

6. Función inversa



Imagen de Jasoon en [Flickr](#). Licencia [CC by 2.0](#)

¡Ya está bien de experimentar! Pero antes de colgar el cartel de cerrado al laboratorio, quizás deberíamos devolver las cosas a su forma primitiva. Si la base de todos nuestros experimentos era la variable independiente x , ¿sería posible después de tantas composiciones volverla a su "identidad"?

Para ello debemos hacer una última mezcla...



Importante

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que cumplen que

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$$

Entonces decimos que f y g son inversas. A la función g la representaremos como f^{-1} y a la función composición la llamaremos identidad.

Gráficamente una función es inversa de otra función cuando sus respectivas gráficas son inversas, es decir, son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Observemos la siguiente escena de Geogebra, en ella aparecen dos funciones muy conocidas $f(x)=e^x$ y $g(x)=\ln(x)$. Otra forma de averiguar que dos funciones son inversas es comprobando que si el punto (a,b) pertenece a la gráfica de la primera función, entonces (b,a) pertenecerá a la gráfica de la segunda.

Esto quiere decir que para calcular la inversa de una función, tenemos que despejar la variable independiente en función de la variable dependiente.



Ejercicio Resuelto

Calcula la función inversa de $f(x)=3x+2$

En el siguiente video, puedes ver cómo se calcula la inversa de esta función polinómica.

[Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/ryPxtjVD3p8?rel=0](http://www.youtube.com/embed/ryPxtjVD3p8?rel=0)



Reflexiona

¿Recuerdas el ejercicio resuelto de las bacterias que se reproducían por mitosis? Sí, aquellas que se dividían cada 15 minutos. En aquel ejercicio vimos que, el número de bacterias que había, pasado un tiempo, se podía expresar mediante la función $f(x)=2^x$, donde x representaba los cuartos de hora que habían transcurrido desde el principio del día.

Nos preguntamos, ¿cuántos cuartos de hora habrán pasado si el número de bacterias que hay es 32768? ¿Y en el caso de que hayan y bacterias, cuántos cuartos de hora habrán transcurrido? Por último, ¿cuál es la función inversa de $f(x)$?

Para la primera pregunta tenemos que contestar a la siguiente cuestión, ¿cuánto vale x si $f(x)=2^x=32768$? Es decir, ¿a qué número hay que elevar 2 para obtener 32768? Y eso no es más que $\log_2(32768)=15$.

La segunda cuestión es similar a la anterior, queremos saber cuánto vale x si $f(x)=y$, es decir $2^x=y$. Buscamos entonces, a qué número hay que elevar 2 para obtener y bacterias. Es decir, el logaritmo en base 2 de y : $x=\log_2 y$.

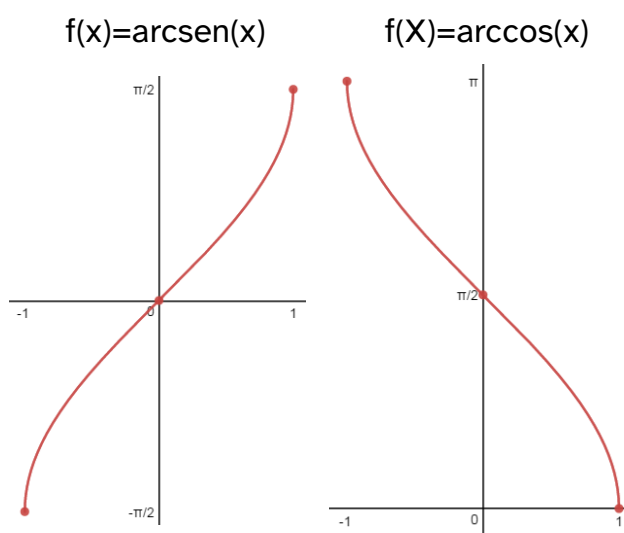
Y de lo anterior, deducimos la última pregunta. Si tenemos y bacterias, para saber los cuartos de horas transcurridos, lo que aplicamos es el logaritmo en base 2 de y . Por tanto la función inversa de $f(x)=2^x$ no es otra que $f(x)^{-1}=\log_2 x$.

Una vez que ya conoces el concepto de función inversa, nos vamos a detener en tres funciones especialmente importantes, que resultan ser las **inversas de las funciones trigonométricas** que hemos visto en apartados anteriores. Así, las funciones $\text{sen } x$, $\text{cos } x$ y $\text{tg } x$, tendrán sus funciones inversas, siempre y cuando tomemos el dominio adecuado para asegurarnos de que a cada valor de su dominio la función le asocia un único valor del recorrido.



Importante

Las **inversas de las funciones trigonométricas**, se nombran como $\arcsen(x)$, $\arccos(x)$ y $\arctg(x)$:

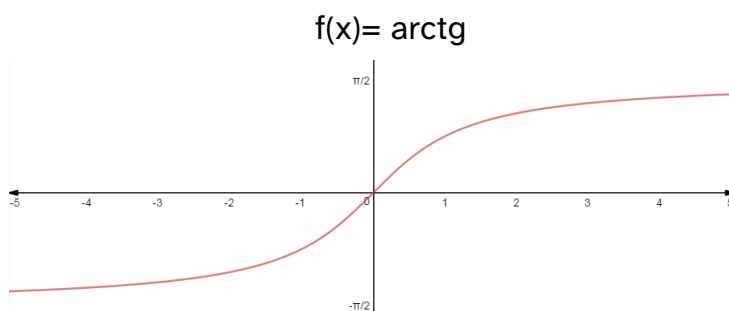


Dominio: $[-1, 1]$

Dominio: $[-1, 1]$

Recorrido: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Recorrido: $[0, \pi]$



Dominio: \mathbb{R}

Recorrido: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Es decir, si queremos calcular $\arccos(x)$, estaríamos buscando un ángulo cuyo coseno fuera x :

$$\arccos(x) = \alpha \Leftrightarrow \cos(\alpha) = x$$



Curiosidad

¿INVERSA?



Debemos diferenciar entre el inverso de un número y la inversa de una función.

Imagen de elaboración propia

En el primer caso si tenemos un número a , su inverso es $1/a$, mientras que si hablamos de la inversa de una función nos referimos a f^{-1} , no a $1/f(x)$.

Resumen



Importante

Las funciones del tipo $f(x)=a^x$; donde a es un número real positivo ($a>0$) y distinto de 1, se llaman **funciones exponenciales**.

Una función exponencial muy utilizada es $f(x)=e^x$, siendo $e= 2,718281...$ Estas funciones aparecen con mucha frecuencia en problemas económicos, biológicos, químicos...



Importante

Las **funciones logarítmicas** son funciones del tipo $f(x)= \log_a x$, donde a es un número real postivo ($a>0$) y distinto de 1 ($a\neq 1$)



Importante

- La **función seno** es aquella función que a un número real x , le asocia el seno de ese número, es decir $f(x)=\text{sen } x$.
- La **función coseno** es aquella función que a un número real x , le asocia el coseno de ese número, es decir $f(x)=\text{cos } x$.
- La **función tangente** es aquella función que a un número real x , le asocia la tangente de ese número, es decir $f(x)=\text{tg } x$.

Si en la gráfica de una función observamos que los valores se repiten siempre cada cierto intervalo, decimos que la **función** es **periódica**, y a la longitud de este intervalo se le llama **periodo**. Es decir, si T es el periodo $f(x)=f(x+T)$.



Importante

Dadas dos funciones, f y g , se llama **función compuesta** de f con g a la función

$$(g \circ f)$$

que cumple que:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que cumplen que

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$$

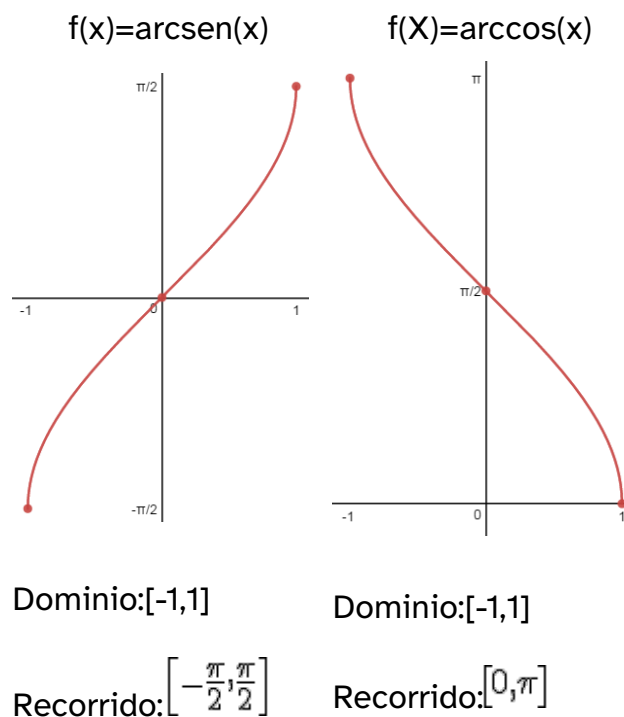
Entonces decimos que f y g **son inversas**. A la función g la representaremos como f^{-1} y a la función composición la llamaremos identidad.

Gráficamente una función es inversa de otra función cuando sus respectivas gráficas son inversas, es decir, son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

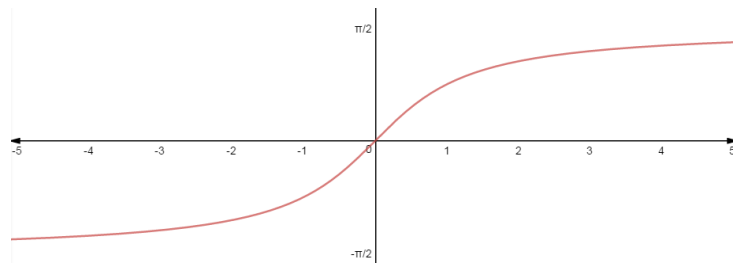


Importante

Las **inversas de las funciones trigonométricas**, se nombran como $\arcsen(x)$, $\arccos(x)$ y $\arctg(x)$:



$$f(x)= \arctg$$



Dominio: \mathbb{R}

Recorrido: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Es decir, si queremos calcular $\arccos(x)$, estaríamos buscando un ángulo cuyo coseno fuera x :

$$\arccos(x) = \alpha \Leftrightarrow \cos(\alpha) = x$$

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.



Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito [NDVA](#).

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

<http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space>