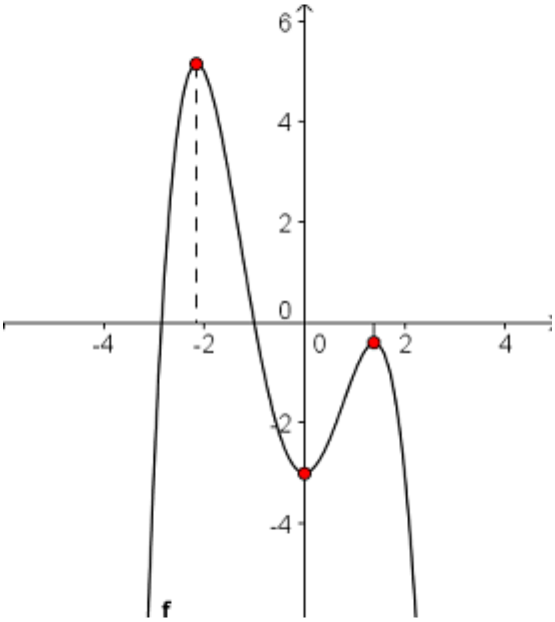
2º de Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

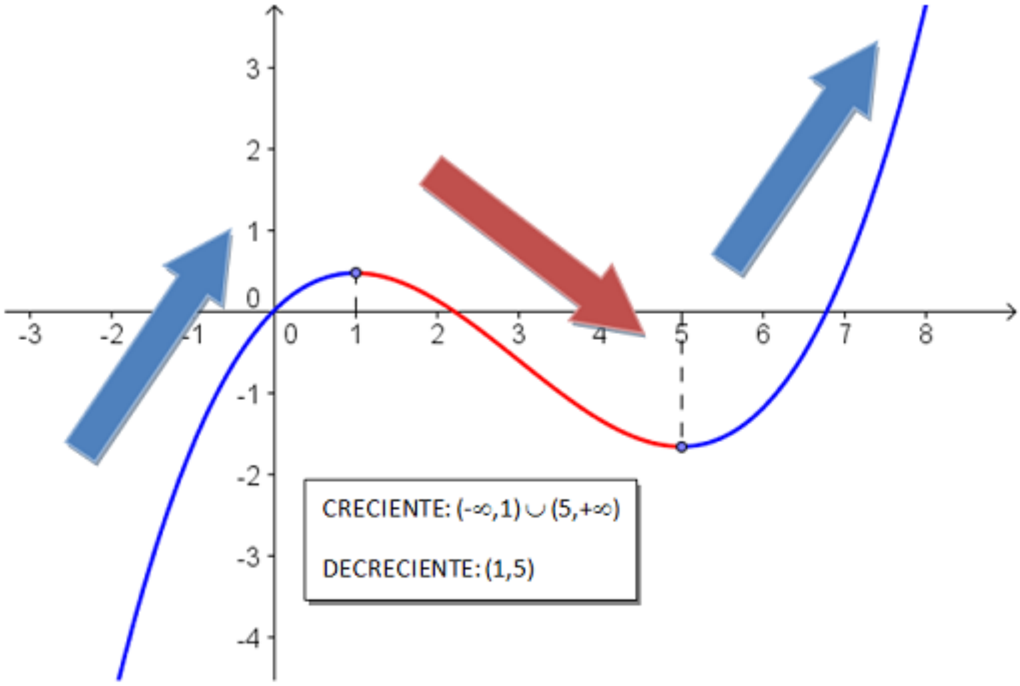
Análisis I:
Aplicaciones de la derivada en el cálculo de la monotonía y extremos relativos.

En el tema anterior has aprendido a derivar una función. Pero ¿para qué sirve derivar? Como has visto a lo largo de todo el curso, hemos intentado enseñarte las aplicaciones prácticas de todo lo que estás estudiando, y esta vez no iba a ser menos.

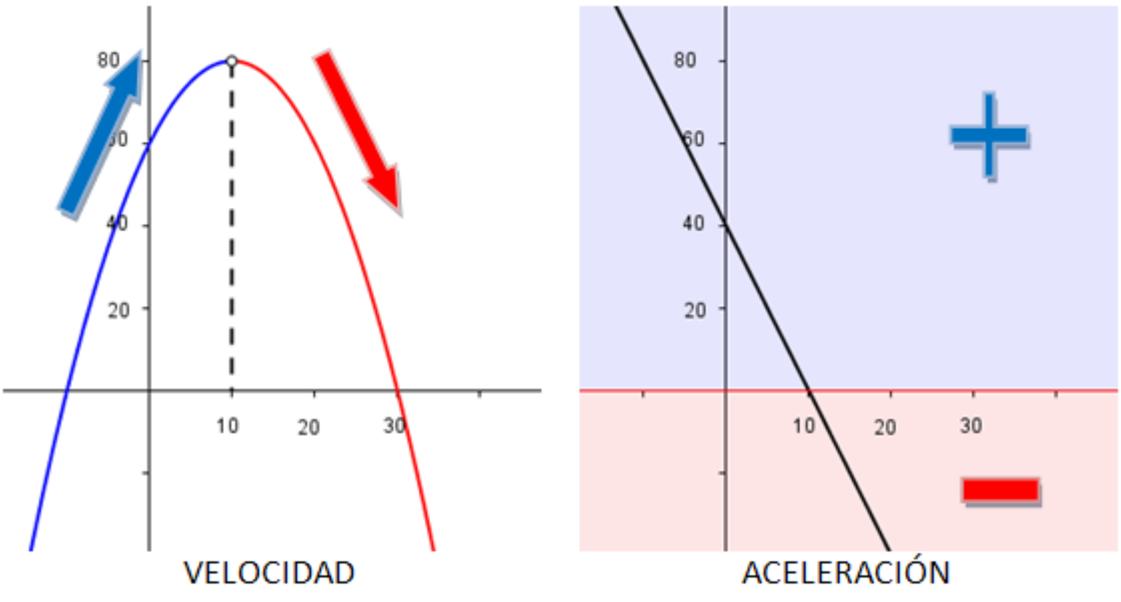


Si ves la gráfica de la derecha podrás decir **aproximadamente** cuándo crece, cuándo decrece, o en qué puntos alcanzo los valores más altos o más bajos. Es algo relativamente sencillo si tenemos la gráfica delante. Pero ¿y si no tuviéramos la gráfica? ¿y si sólo te dijera que esa gráfica corresponde a la función $f(x) = \frac{-x^4 - x^3}{2} + 3x^2$ y te pidiera exactamente el momento en el que se alcanzará el máximo valor? Para ello utilizaremos las derivadas.

El crecimiento y el decrecimiento de una función es algo que ya hemos estudiado antes ¿lo recuerdas? Básicamente una función es **creciente** si, al aumentar la variable independiente, x, también aumenta el valor de la función, f(x). Es **decreciente**, si al aumentar el valor de x, disminuye el de f(x). No olvides que las gráficas se "leen" de izquierda a derecha.



Veamos un ejemplo real: las siguientes gráficas representan la velocidad y la aceleración de un coche. Si te fijas en la primera gráfica, la velocidad aumenta hasta el minuto 10 y comienza a disminuir desde entonces.



Mira ahora la gráfica de la aceleración ¿qué ocurría hasta el minuto 10? Que la aceleración era **positiva** (pues su gráfica queda por encima del eje de abscisas), y si la aceleración es positiva quiere decir que el coche acelera y por tanto su velocidad **aumenta**.

A partir del minuto 10, la aceleración es **negativa** (su gráfica queda por debajo del eje de abscisas), por tanto está decelerando y la velocidad **disminuye**.

Seguro que en física has estudiado que la aceleración es la derivada de la velocidad. Acabamos de ver una relación entre el signo de la aceleración, y el crecimiento y el decrecimiento de la velocidad. Esta misma relación se da entre cualquier función derivable, y su derivada.

Importante

Cuando hablamos de **monotonía**, nos estamos refiriendo al comportamiento de una función respecto a su crecimiento o decrecimiento.

Sea f una función derivable en un intervalo (a, b), entonces es:

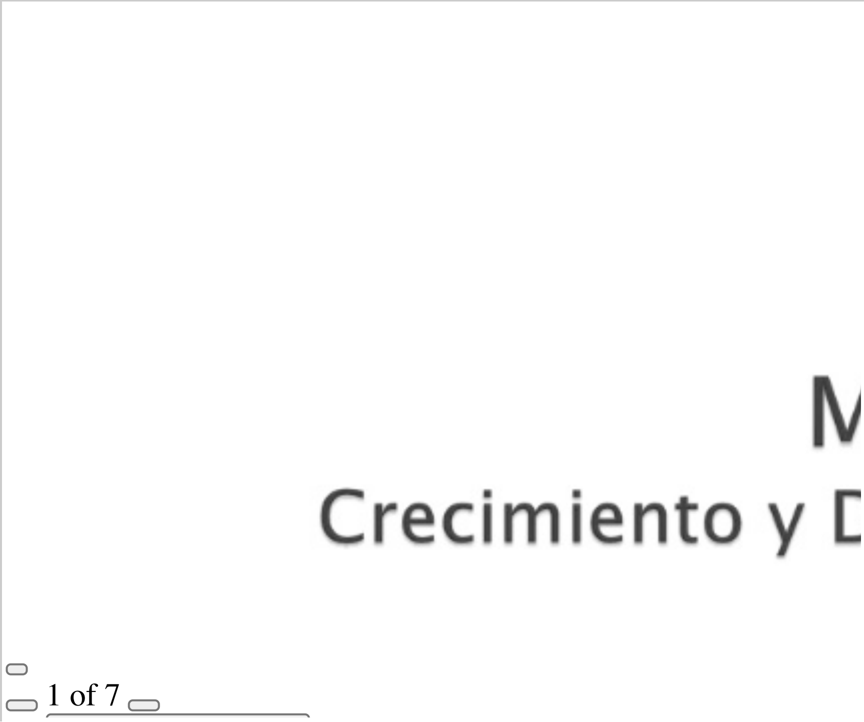
- **Creciente** en el intervalo (a,b) si $f'(x) \geq 0$ en todo el intervalo (a,b)
- **Decreciente** en el intervalo (a,b) si $f'(x) \leq 0$ en todo el intervalo (a,b)

En la siguiente escena de geogebra tienes dos ejemplos, una función polinómica y una racional, en la que puedes comprobar que se cumple lo que acabamos de ver:

Función f(x)	**Derivada f ' (x)**
Creciente	Positiva (con linea discontinua)
Decreciente	Negativa (con linea discontinua)

Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC

Como ya hemos comentado, lo relevante del importante anterior, es que ya no es necesario dibujar la gráfica para estudiar la monotonía. A continuación tienes un ejercicio resuelto para que veas cómo hacerlo. Después hay uno que tendrás que resolver tú.



Monotonía

Presentación por saulvalper alojada en SlideShare

Comprueba lo aprendido

En una empresa están teniendo pérdidas económicas, por lo que deciden poner en marcha una serie de medidas a lo largo de los próximos 6 meses con las que pretenden remontar y obtener beneficios al finalizar dicho periodo.

Según sus cuentas, los beneficios obtenidos por la empresa al poner en marcha el plan vienen dados por la función $f(x) = 2x^4 - 24x^3 + 92x^2 - 120x + 60$, donde x es el número de meses.

Vamos a comprobar si con este plan de medidas la empresa mejorará los beneficios. Para ello tendrás que estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios de la empresa.

- Función derivada:

Para comenzar, calcula la derivada de la función f(x) y completa los espacios en blanco (incluye los signos correspondientes):

f ' (x) = ☐ x☐ ☐ x☐ ☐ x ☐

- Obtener las raíces de la derivada:

Resuelve la ecuación f ' (x) = 0 para obtener las raíces. Como es un polinomio de grado mayor que dos, tendrás que resolver con la Regla de Ruffini.

Las soluciones son (de menor a mayor) x= ☐ , x= ☐ , x= ☐ .

- Estudiar el signo de la derivada:

Hemos obtenido cuatro intervalos. Estudia el signo de la función derivada en cada intervalo:

En el intervalo (-∞, ☐) la derivada es (positiva/negativa) ☐ .

En el intervalo (☐ , ☐) la derivada es (positiva/negativa) ☐ .

En el intervalo (☐ , ☐) la derivada es (positiva/negativa) ☐ .

En el intervalo (☐ ,+∞) la derivada es (positiva/negativa) ☐ .

- Estudiar la monotonía:

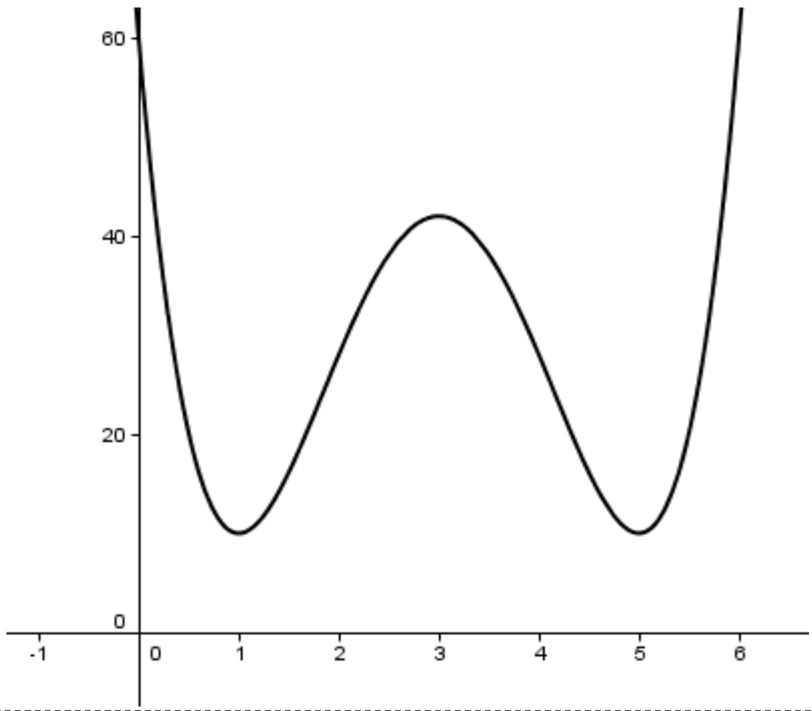
Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, podemos decir que en (-∞, ☐)U(☐ , ☐) la función es (creciente/decreciente) ☐ , y que en (☐ , ☐)U(☐ ,+∞) la función es ☐ .

- Solución del problema:

Como estamos en una situación real, donde el estudio se ha hecho para ver los resultados en 6 meses, podemos decir que la empresa comienza (disminuyendo/aumentando) ☐ beneficios. A la vista de cómo evolucionan los beneficios al finalizar los 6 meses ¿Crees que las medidas tomadas han sido efectivas? (sí/no) ☐ .

Enviar

Puedes comprobar tus resultados con la gráfica de la función



Ahora nos interesa que observes la siguiente ventana en la que hay representada una función y la tangente en un punto cualquiera. Como recuerdas del tema anterior la pendiente de la tangente en un punto coincide con la derivada de la función en ese punto. Queremos que recorras la función y observes el signo que tiene la pendiente de la tangente cuando la función crece y cuando decrece.

Applet de mduran alojado en GeoGebra. Licencia CC

Ejercicio resuelto

Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

Mostrar retroalimentación

Es importante saber que la función f(x) existe para todos los números reales menos el que anula el denominador, es decir, para x=-1. Luego su dominio es $\mathbb{R}-\{-1\}$

Hallamos su derivada.

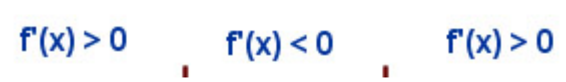
$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \text{ .}$$

Tenemos que hallar su signo. Para ello tenemos en cuenta que el denominador es una expresión al cuadrado, luego será positivo siempre que la función exista. Por tanto vamos a estudiar el signo del numerador. Para ello estudiamos los valores en los que se hace cero el polinomio.

$$x^2+2x=x\cdot(x+2)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x &= 0 \\ x+2 &= 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x &= 0 \\ x &= -2 \end{cases}$$

Basta ahora estudiar el signo de la derivada en los intervalos que nos indican esos valores. La forma más rápida es darle valores a la derivada y estudiar su signo.

Debemos recordar que en el punto -1 la función no existe.



Por lo tanto la función es creciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.

Es decreciente en el intervalo $(-2,0)-\{-1\}=(-2,-1)\cup(-1,0)$.

Ejercicio resuelto

Fotografía en [*INTEF*]*. Licencia* [*CC*]

A veces, contactan con la empresa de Ángela y Andrés para que se encarguen del estudio de una parte de un proyecto más grande. Eso les ocurrió cuando se construyó la nueva terminal del aeropuerto de Barajas en Madrid: la T4.

Le pidieron que hicieran un estudio sobre el recorrido de las brisas creadas por los aires acondicionados en lo que iban a ser los techos de la terminal. Para ello tenían que estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función que, inicialmente, iban a seguir las volutas del techo.

Si la función se acercaba a la de expresión $f(x)=x^3-3x^2+5$, halla los intervalos en los que crece y decrece.

Mostrar retroalimentación

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(0,2)$.

En la siguiente escena de GeoGebra de Saúl Valverde Pérez tienes dos ejemplos, una función polinómica y una racional, en las que puedes comprobar que se cumple lo que acabamos de ver.

f(x) **función** (continua)	**f ' (x)** **función derivada** (discontinua)
Creciente (azul)	Positiva (azul celeste)
Decreciente (rojo)	Negativa (rojo)

Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC

Comprueba lo aprendido

En una empresa están teniendo pérdidas económicas, por lo que deciden poner en marcha una serie de medidas a lo largo de los próximos 6 meses con las que pretenden remontar y obtener beneficios al finalizar dicho periodo.

Según sus cuentas, los beneficios obtenidos por la empresa al poner en marcha el plan vienen dados por la función

$$f(x) = 2x^4 - 24x^3 + 92x^2 - 120x + 60$$

donde x es el número de meses.

Vamos a comprobar si con este plan de medidas la empresa mejorará los beneficios. Para ello tendrás que estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios de la empresa.

- **Función derivada.**

Para comenzar, calcula la derivada de la función f(x) y completa los espacios en blanco (incluye los signos correspondientes):

f ' (x) = ☐ x ☐ ☐ x ☐ ☐ x ☐

- **Obtener las raíces de la derivada.**

Resuelve la ecuación f ' (x) = 0 para obtener las raíces. Como es un polinomio de grado mayor que dos, tendrás que resolver con la Regla de Ruffini.

Las soluciones son (de menor a mayor) x= ☐ , x= ☐ , x= ☐ .

Estudiar el signo de la derivada.

Hemos obtenido cuatro intervalos. Estudia el signo de la función derivada en cada intervalo:

En el intervalo (-∞, ☐) la derivada es (positiva/negativa) ☐ .

En el intervalo (☐ , ☐) la derivada es (positiva/negativa) ☐ .

En el intervalo (☐ , ☐) la derivada es (positiva/negativa) ☐ .

En el intervalo (☐ ,+∞) la derivada es (positiva/negativa) ☐ .

Estudiar la monotonía.

Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, podemos decir que en (-∞, ☐)U(☐ , ☐) la función es (creciente/decreciente) ☐ , y que en (☐ , ☐)U(☐ ,+∞) la función es ☐ .

Solución del problema.

Como estamos en una situación real, donde el estudio se ha hecho para ver los resultados en 6 meses, podemos decir que la empresa comienza (disminuyendo/aumentando) ☐ beneficios. A la vista de cómo evolucionan los beneficios al finalizar los 6 meses ¿Crees que las medidas tomadas han sido efectivas? (sí/no) ☐ .

Enviar

Puedes comprobar tus resultados con la gráfica de la función

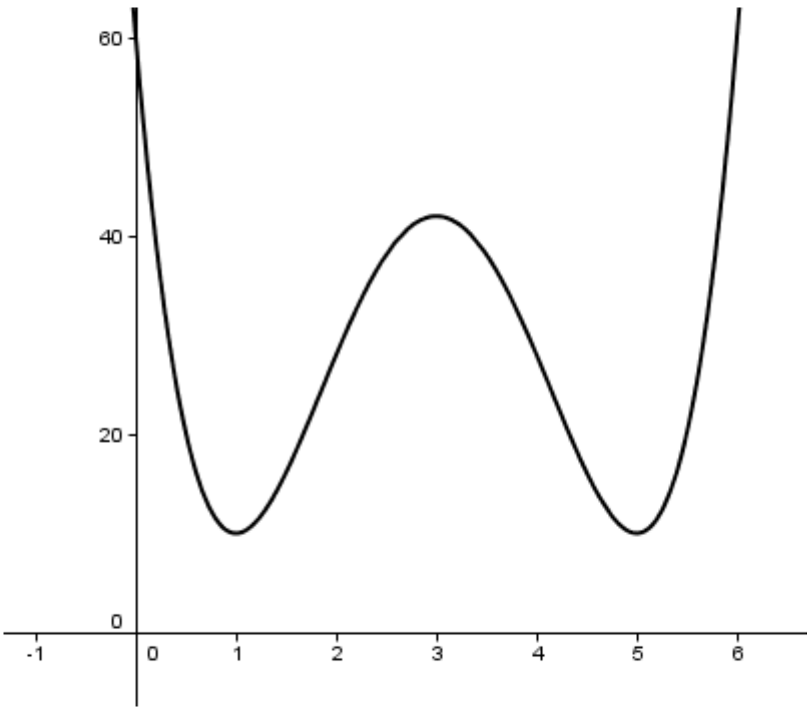
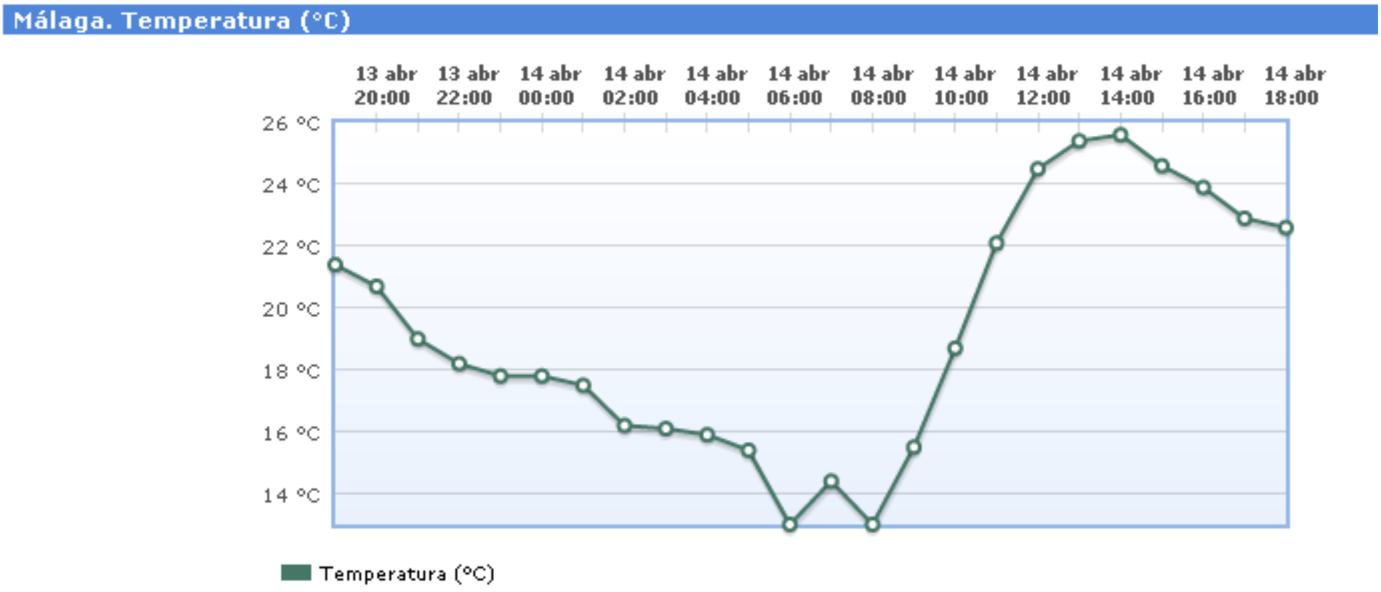


Imagen de elaboración propia

3. Extremos (máximos y mínimos)

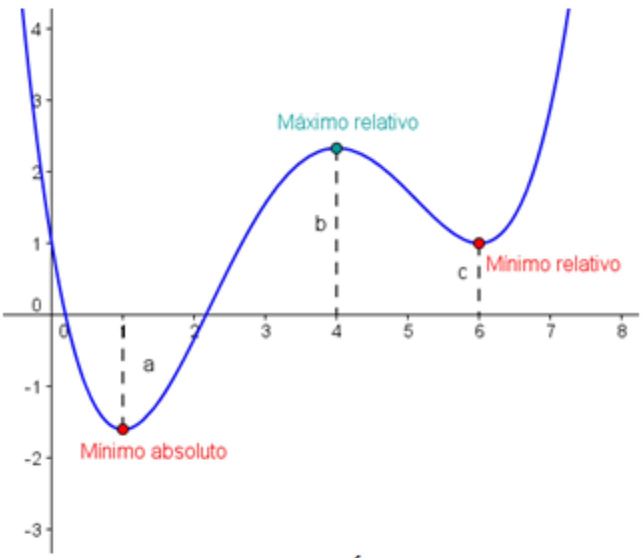
Estamos acostumbrados a oír hablar de temperaturas máximas y mínimas todos los días en las noticias. De hecho, es una frase muy habitual la de "se ha alcanzado una máxima de 40º de temperatura". En la siguiente gráfica, de la AEMET, en la que podemos ver la temperatura que ha hecho en Málaga desde las 19h del 13 de abril a las 18h del día siguiente. Puedes comprobar que:



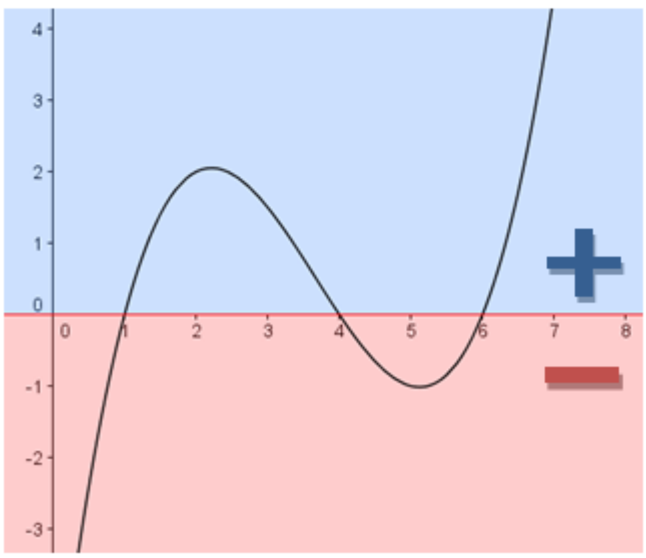
- La temperatura **máxima** se alcanza a las 14h del 14 de abril (25,6ºC)
- La temperatura **mínima** se alcanza a las 6h y a las 8h del 14 de abril (13ºC)
- A las 7h del 14 de abril hay un **máximo relativo**, pues es la temperatura más alta en un pequeño periodo de tiempo (de las 6 a las 8h).

Para poder averiguar la temperatura máxima o mínima necesitamos una tabla de datos observados o una gráfica como la anterior, pues la temperatura local no la podemos expresar con una función derivable.

Veamos por tanto qué ocurre en la siguiente función, y comparemos con su derivada:



FUNCIÓN



DERIVADA

A la izquierda tenemos una función f(x) y a la derecha su derivada f '(x).

- **Mínimo**: si te fijas en los dos mínimos, a su izquierda la función es decreciente y a la derecha es creciente ¿qué quiere decir eso para la derivada? Como vimos en el apartado anterior, equivale a que a la izquierda la derivada es negativa y a la derecha positiva (como puedes ver en la gráfica de la derivada). Pues si en ese punto la derivada pasa de negativa a positiva, quiere decir que debe ser **nula**.

- **Máximo**: en el máximo pasa algo parecido, pero en este caso pasamos de función creciente a decreciente, es decir, de derivada positiva a negativa. Al igual que antes, en ese punto la derivada debe ser **nula**.

Importante

Si una función tiene un extremo relativo en el punto x=a y, en él, existe la derivada, entonces se cumple que f'(x)=0.

Los puntos que anulan la primera derivada reciben el nombre de **puntos críticos** y, entre ellos, pueden estar los extremos relativos de una función.

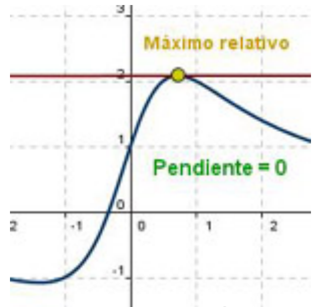


Imagen de elaboración propia

El problema se plantea en que no siempre se cumple lo contrario de lo que aparece anteriormente. Una función puede anular su derivada en un punto y sin embargo no tener en él un extremo relativo. Por ejemplo, la función $f(x)=x^3$ siempre es creciente, mientras mayor es x mayor es la función, por tanto, no tiene extremos. Sin embargo, su derivada en el punto x=0 vale cero. Por ello vamos a ampliar las condiciones anteriores con nuevos datos.

Importante

Si la función f(x) tiene derivada nula en el punto x=a, f'(a)=0, y existe la segunda derivada en dicho punto se cumple:

- Si f''(a)<0, la función tiene (o alcanza) un **máximo relativo** en x=a.
- Si f''(a)>0, la función tiene (o alcanza) un **mínimo relativo** en x=a.

Como puedes observar seguimos dejándonos casos atrás, porque en lo anterior no se dice nada sobre qué ocurre si f''(a)=0. Además puede haber funciones que tengan extremos relativos y su derivada primera no se anule porque no exista la derivada de la función en ese punto. Por ejemplo, eso le ocurre a la función $f(x)=|x^2-3x|$ en los puntos en los que tiene mínimos relativos, como puedes apreciar en la imagen.

Por ello, en general, lo más cómodo es estudiar el signo de la primera derivada (en aquellos puntos en los que exista) y tener presente las siguientes definiciones:

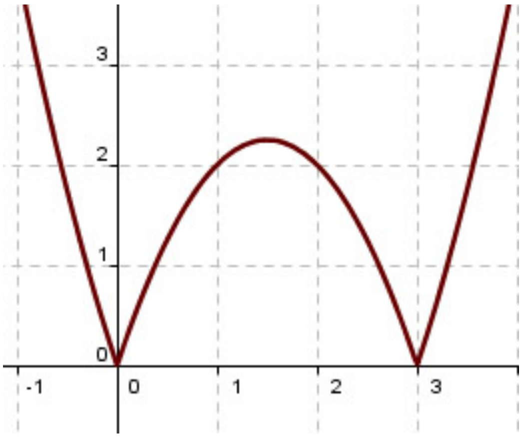


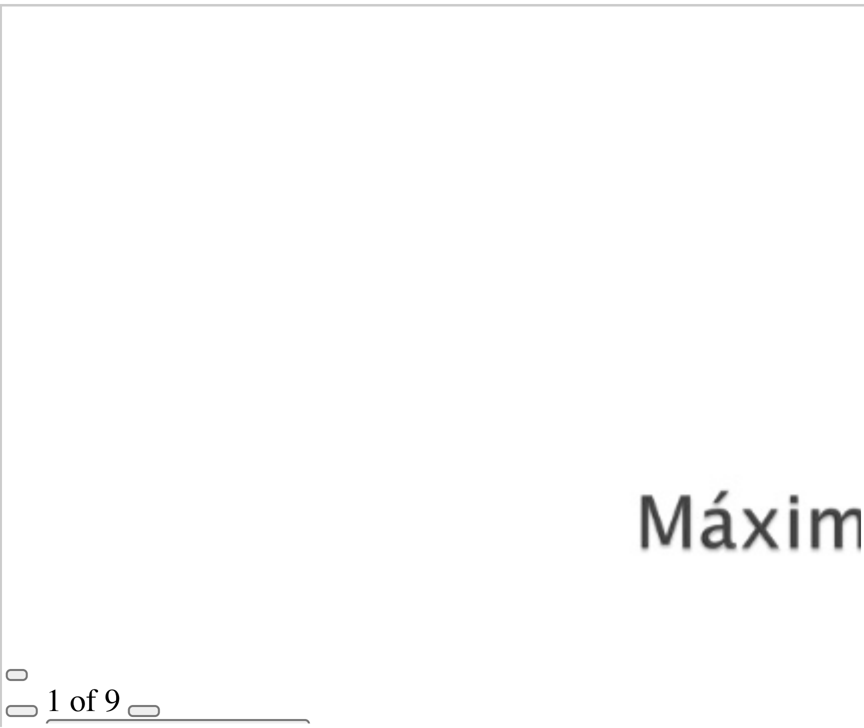
Imagen de elaboración propia

- Una función alcanza un **máximo relativo** en un punto **si** en él **pasa de ser creciente a decreciente**.
- Una función alcanza un **mínimo relativo** en un punto **si** en él **pasa de ser decreciente a creciente**.

Curiosidad

Como la **derivada** de una función en un punto también representa la **pendiente** de la recta tangente a la función en ese punto, la monotonía y los extremos de una función se pueden explicar a partir de la pendiente de la recta tangente. Si quieres saber más, visita la web de Manuel Sada.

Para que veas cómo podemos hallar máximos y mínimos con la derivada, mira el siguiente ejercicio resuelto.



Extremos

Presentación de saulvalper alojada en SlideShare

Comprueba lo aprendido

Una conocida compañía de telefonía va a poner a la venta un nuevo modelo de teléfono móvil para el que prevé unas ventas para los primeros años que vienen dadas por la función $f(x)=\frac{40x}{x^2+1}$, donde x es el número de meses transcurridos desde que se saca a la venta y f(x) se mide en millones de unidades vendidas.

a) Determina los posibles máximos o mínimos de la función.

- [ ] x = -1
- [ ] x = 0
- [ ] x = 1
- [ ] x = 2

Mostrar retroalimentación

Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto
4. Incorrecto

b) ¿En qué mes se alcanzará el mayor número de ventas?

- [ ] Al ponerlo en venta
- [ ] El primer mes
- [ ] El segundo mes

Mostrar retroalimentación

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

La función tiene un mínimo, pero no aporta información relevante a nuestro problema, porque:

- [ ] No es un dato necesario para la empresa
- [ ] El punto en el que se alcanza no pertenece al dominio del problema
- [ ] El punto en el que se alcanza no pertenece al dominio de la función

Mostrar retroalimentación

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

¿Qué número de unidades se prevé vender en el momento de máximas ventas?

- [ ] 10 millones de unidades
- [ ] 20 millones de unidades
- [ ] 40 millones de unidades

Mostrar retroalimentación

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

Ejercicio resuelto

Halla los extremos relativos de la función que estudiamos en el ejemplo del apartado anterior $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

Mostrar retroalimentación

Vamos a estudiarlo de las dos formas posibles. En primer lugar utilizando la segunda derivada.

Habíamos hallado la primera derivada

$$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

y habíamos estudiado que se anula en x=0 y en x=-2.

Hallamos la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{(2x+2)\cdot(x+1)^2-(x^2+2x)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2(x+1)\cdot(x+1)^2-(x^2+2x)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=$$

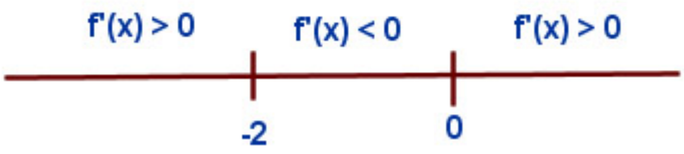
$$=\frac{2(x+1)\cdot\left((x+1)^2-(x^2+2x)\right)}{(x+1)^4}=\frac{2(x+1)\cdot(1)}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}$$

Debemos observar que solo nos interesa el signo de la segunda derivada, no su valor.

- f''(0)>0, por tanto tenemos un mínimo relativo en el punto (0,f(0))=(0,0). Recuerda que para obtener la segunda componente siempre se sustituye el valor de x en la función, no en las derivadas.

- f''(-2)<0, por tanto tenemos un máximo relativo en el punto (-2,f(-2))=(-2,-4).

Sin embargo creemos que es más fácil estudiando la variación del signo de la primera derivada. Recuerda lo que hicimos en el apartado anterior.



Podemos observar claramente que en el puntos x=-2 pasa de ser creciente (f'(x)>0) a ser decreciente (f'(x)<0), luego hay un máximo relativo. Y en el punto x=0 pasa de ser decreciente a convertirse en creciente, por lo que existe un mínimo relativo.

Comprueba lo aprendido

En la función que estudiaron Ángela y Andrés en el apartado anterior, $f(x)=x^3-3x^2+5$, interesa saber dónde están los extremos relativos pues suelen coincidir con lugares en los que se instalan luces ambientales.

El máximo absoluto se consigue en el punto (☐ , ☐).

El mínimo absoluto corresponde al punto (☐ , ☐).

Enviar

Ejercicio resuelto

La potencia f(x) en vatios consumida por cierto aparato eléctrico, en función de su resistencia (x) en ohmios viene dada por la expresión:

$$f(x)=\frac{4x}{(x+12)^2}$$

Hallar la potencia máxima y el correspondiente valor de x.

Mostrar retroalimentación

Calculamos la derivada de la función f(x)

$$f'(x)=\frac{4(x+12)^2-4x\cdot 2\cdot(x+12)}{(x+12)^4}=\frac{4(x+12)-4x\cdot 2}{(x+12)^3}=\frac{-4x+48}{(x+12)^3}$$

Igualando a 0 para calcular el punto crítico, obtenemos:

$-4x+48$ ... 48

$$\frac{}{(x+12)^3}=0 \Rightarrow -4x+48=0 \Rightarrow x=\frac{}{12} \Rightarrow x=12$$

Habría que calular la segunda derivada y comprobar el signo de f''(12). Si es positivo tendremos un mínimo relativo y si es negativo un máximo relativo.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4\cdot(x+12)^3-(-4x+48)\cdot 3(x+12)^2}{(x+12)^6} = \\ &= \frac{-4\cdot(x+12)-(-4x+48)\cdot 3}{(x+12)^4} = \frac{8x-192}{(x+12)^4} \\ f''(12) &= \frac{8(12)-192}{(x+12)^4} < 0 \end{aligned}$$

Como f''(12) es negativo, tenemos en (12,f(12)) existe un máximo relativo. Por tanto la potencia máxima que es el dato que nos solicita el problema es f(12). Esto es:

$$f(12)=\frac{4(12)}{((12)+12)^2}=\frac{1}{12}\,\mathbf{W}\ \ (\text{vatios})$$

Ejercicio resuelto

Prueba de Acceso a Grados para Mayores de 25 años - Año 2007

Halle los máximos y mínimos relativos de la función f(x)=x^3-9x. Determine también en qué intervalos es creciente y decreciente la función.

Mostrar retroalimentación

$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento hallamos los valores para los cuales la primera derivada es 0.

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0$$

Resolviendo la ecuación de arriba obtenemos las siguiente soluciones
$x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$
Esto nos permite definir los siguientes intervalos donde vamos a estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función.

Intervalos	Valor de $f'(x)$ en el intervalo (se prueba un valor de x cualquiera que pertenezca al intervalo)	*Monotonía*
$(-\infty, -\sqrt{3})$	$f'(-2) = 3 \cdot 2^2 - 9 = 3 > 0$	*Creciente*
$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 9 = -9 < 0$	*Decreciente*
$(\sqrt{3}, \infty)$	$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 9 = 3 > 0$	*Creciente*

Para hallar los máximos y mínimos relativos de la función hallamos la segunda derivada de la misma.

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$f'(x) = 6x$$

Comprobamos el signo de la segunda derivada para cada valor de $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$.

Valores de x	Valor de $f(x)$	Extremo relativo
$x_1 = \sqrt{3}$	$f(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 0$	*Mínimo*
$x_2 = -\sqrt{3}$.	$f(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0$	*Máximo*

Ejercicio resuelto

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \mathrm{Ln}\,(x^2+1)$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

a. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f.

b. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa.

Mostrar retroalimentación

a. Hallamos la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

El signo de f' solo depende del signo de x, pues el denominador es siempre positivo. Por tanto, la función es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,+\infty)$. Luego en el punto (0,f(0))=(0,0) la función pasa de decreciente a creciente y hay por lo tanto un mínimo relativo.

b. La derivada segunda es

$$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

y se anula en x=-1 y en x=1 (compruebalo tú).

Comprobamos que x=-1 (que es el punto al que se refiere el apartado b.) es un punto de inflexión verificando que f'''(-1) es distinto de 0 (hazlo tú).

Para calcular la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa -1 utilizamos la ecuación:

$$\begin{aligned} y-f(a) &= f'(a)(x-a) \\ y-f(-1) &= f'(-1)(x-(-1)) \\ y-\text{Ln } 2 &= (-1)(x-(-1)) \\ y-\text{Ln } 2 &= -x-1 \\ y &= -x+\text{Ln } 2-1 \end{aligned}$$

Reflexiona

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-3)e^x$.

a. Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Mostrar retroalimentación

a. La función tiene un mínimo local en el punto $(2,-e^2)$.

b. El punto de inflexión es $(1,-2e)$ y la tangente en ese punto es $y = -ex-e$.

Ejercicio resuelto

JUNIO 2010 ANDALUCÍA

Sea la función f $(x) = 2x^2 – (1/3)x^3$. Calcule:
a) (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Las coordenadas de sus extremos relativos.

Actividad tomada de http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Mostrar retroalimentación

(a) y (b)
Dado que la función f(x) es una función polinómica, sabemos que es continua y derivable en todo R.
Calculamos su primera derivada.
$f(x) = 2x^2 – (1/3)x^3$.
$f'(x) = 4x – x^2$.
Sabemos que los extremos relativos anulan la primera derivada
De $f'(x) = 4x – x^2 = 0$, tenemos $4x – x^2 = x(4 – x) = 0$, de donde $x = 0$ y $x = 4$ (sabemos que si el producto de dos números es cero, uno por lo menos es 0), que serán los posibles extremos.

(Entramos con un valor cualquiera a izquierda y derecha de dichas soluciones en f'(x) para ver su signo, el cual nos determinará el crecimiento o decrecimiento de f(x))

Como $f'(-1) = 4(-1) – (-1)^2 = -5 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente en $(-\infty,0)$
Como $f'(1) = 4(1) – (1)^2 = 3 > 0$, f(x) es estrictamente creciente en $(0,4)$
Como $f'(5) = 4(5) – (5)^2 = -5 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente en $(4,+\infty)$

Por definición en $x = 0$, f(x) tiene un mínimo relativo y vale $f(0) = 2(0)^2 – (1/3)(0)^3 = 0$.
Por definición en $x = 4$, f(x) tiene un máximo relativo y vale $f(4) = 2(4)^2 – (1/3)(4)^3 = 32/3$.

4. Curvatura (concavidad, convexidad, puntos de inflexión)

Cóncavo	Cóncavo (abajo) y Convexo (arriba)	Convexo
		
Puente de la Barqueta *Fotografía de Tutty en Flickr. Licencia CC*	*Concave* *Fotografía de MS-R en Flickr. Licencia CC*	*DSC02280b* *Fotografía de Jack Acefrot en Flickr. Licencia CC*

Mira las curvas de las fotos. Otra de las características de las funciones es su curvatura, y los objetos que aparecen en las imágenes de arriba tienen diferente curvatura.

Si coges dos puntos de la parte superior del puente y los unes con una cuerda, ésta quedará por debajo de la curva (es **cóncavo**). En el caso de la rampa, si unimos dos puntos la cuerda queda por encima (es **convexa**).

La curvatura de una función también se puede estudiar a partir de las derivadas. En la siguiente escena de GeoGebra, mueve el punto P a lo largo de la función para ver cómo varía la monotonía y la curvatura de la función.

Observa el cambio en la primera y segunda derivada en los puntos de abscisa x=-1, x=0, x=1, x=2 y x=3, e intenta averiguar la relación. Pulsando las casillas de monotonía y curvatura verás los intervalos en los que cambian estas dos características.

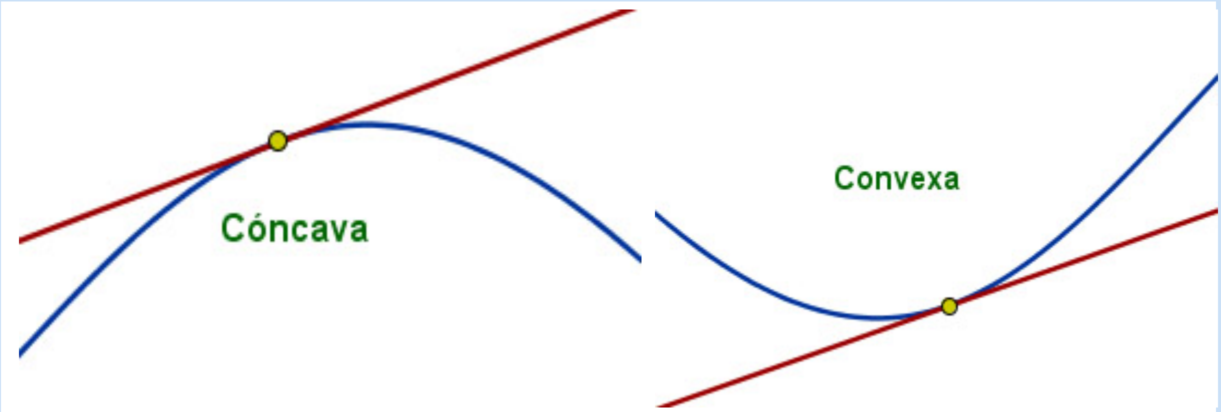
Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC

Importante

La curvatura de una función estudia la forma en que esa función se curva y se mide por su relación con la tangente. Hay dos tipos de curvatura.

Una función se dice que es **cóncava** en un punto si al trazar la tangente a la función en dicho punto, la función queda por debajo de la tangente en los alrededores de ese punto.

Una función se dice que es **convexa** en un punto si al trazar la tangente a la función en dicho punto, la función queda por encima de la tangente en los alrededores de ese punto.



Imágenes de elaboración propia

En el apartado 2 del tema hemos visto como el signo de la primera derivada nos indica la monotonía de una función. Ahora veremos como la curvatura viene determinada por el signo de la segunda derivada. Recorre la función de la siguiente ventana y observa el signo de la segunda derivada.

Applet de mduran alojado en GeoGebra. Licencia CC

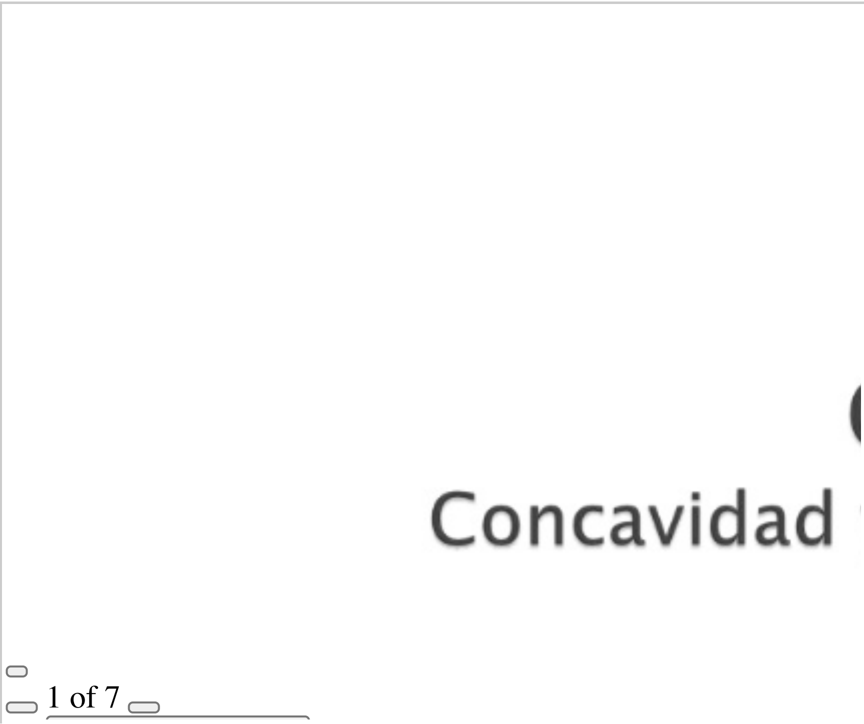
Importante

Si tenemos una función que admite, al menos, hasta la segunda derivada en un punto x=a tenemos el siguiente resultado.

- Si $f''(a)>0$, la función es **convexa** (U) en el punto a.
- Si $f''(a)<0$, la función es **cóncava** (∩) en x=a.

Luego para estudiar los intervalos de concavidad y convexidad de una función, basta estudiar donde es positiva y negativa la segunda derivada.

Y ahora, como hemos hecho en los apartados anteriores, veremos un ejercicio resuelto.



Curvatura

Presentación de saulvalper alojada en SlideShare

¿Te atreves a estudiar la curvatura de una función? Aquí tienes un problema sencillo.

Comprueba lo aprendido

Necesitamos estudiar la curvatura de la función $f(x)=\frac{x^5+5x^4}{10}$ para un proyecto que estamos realizando. Completa los campos en blanco con los resultados que obtengas:

- La primera derivada de la función es f '(x) = (x^4+ $\square$ x^3) / $\square$
- La segunda derivada es f ''(x) = $\square$ x^3+ $\square$ x^2
- La función f(x) es cóncava en (-∞, $\square$)
- La función f(x) es convexa en ($\square$,+∞)
- Tiene un punto de inflexión en P=($\square$, $\square$)

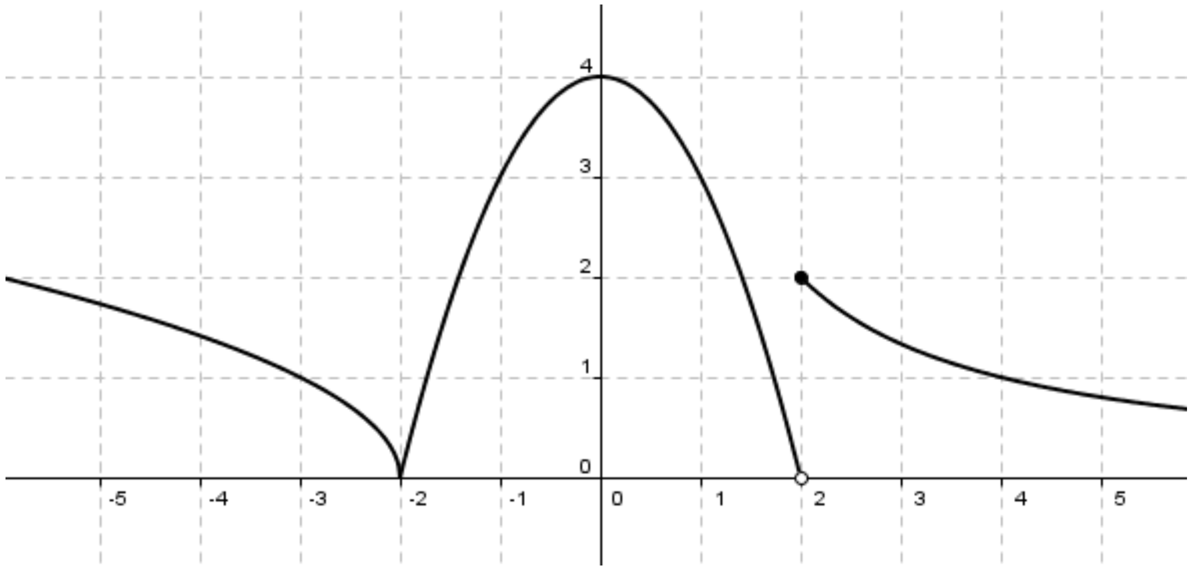
- ¿Existe punto de inflexión en x=-3? (sí/no)

Enviar

Observa que en x=-3 se cumple que f ''(-3)=0, pero como no cambia la curvatura, no hay punto de inflexión en dicho punto.

Ejercicio resuelto

¡Cuidado con los picos! Todo lo que hemos visto funciona perfectamente si estamos trabajando con funciones continuas y derivables, pero por desgracia no siempre podemos contar con que nuestra función tenga esas condiciones... Por ejemplo, observa la siguiente gráfica:



Por la gráfica, ¿cuáles son sus máximos y mínimos absolutos y relativos? (La parte de la izquierda no tiene ningúna asíntotal horizontal, y por tanto no se estabiliza alrededor de ningún valor.)

Mostrar retroalimentación

Máximo absoluto: no existe, pues como hemos apuntado, a la izquierda se toman valores muy altos.

Mínimo absoluto: en x=-2, ya que en x=2 el valor obtenido no es 0 sino 2.

Máximo relativo: en x=0 se alcanza un máximo relativo, y en x=2 otro (es el punto más alto en un pequeño entorno).

Mínimo relativo: no existe.

¿En qué intervalos es creciente y en cuáles decreciente?

Mostrar retroalimentación

Decreciente: en (-∞,-2)U(0,+∞)

Creciente en (-2,0)

¿Dónde es cóncava y dónde convexa?

Mostrar retroalimentación

Es cóncava en (-∞,2) y convexa en (2,+∞).

La función que tenemos representada es:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x-2} & si \quad x<-2\\ 4-x^2 & si \quad -2\le x<2\\ \dfrac{4}{x} & si \quad x\ge 2\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{-x-2}} & si \quad x<-2\\ -2x & si \quad -2<x<2\\ -\dfrac{4}{x^2} & si \quad x>2\end{cases}$$

Esta función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

Sabemos que los máximos y los mínimos cumplen que f '(x) = 0, pero en x=-2 no existe derivada, y sin embargo tenemos un mínimo. Igualmente nos ocurre en x=2. Si igualamos a cero la derivada, en sus tres trozos, sólo obtendremos un punto posible: x=0 ¿Qué ocurre entonces?

Para estudiar los máximos y mínimos de una función que no es derivable, hay que estudiar:

- Los puntos en los que se anula la primera derivada en la parte que sea una función derivable.
- Los puntos donde la función no es derivable.

Nos ocurrirá lo mismo para los puntos de inflexión.

Estudia el crecimiento y decrecimiento con la primera derivada en cada uno de los trozos de la función.

Mostrar retroalimentación

- En el primer trozo la función derivada es siempre negativa, por lo que f es decreciente si x<-2
- En el segundo trozo la función derivada es positiva en (-2,0) y negativa en (0,2), luego es creciente en (-2,0) y decreciente en (0,2).
- En el tercer trozo la función derivada siempre es negativa, luego f es decreciente si x>2

Uniendo esta información obtenemos lo mismo que dedujimos de la gráfica.

Ejercicio resuelto

Estudia los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x+2$

Mostrar retroalimentación

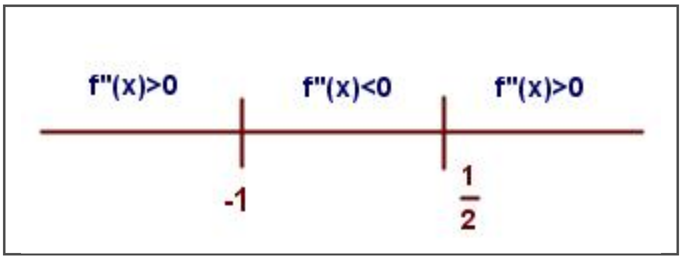
Hallamos la segunda derivada de la función

$$f''(x)=12x^2+6x-6$$

Igualamos a cero, simplificamos y resolvemos la ecuación de segundo grado

$$12x^2+6x-6=0 \Rightarrow 2x^2+x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en los intervalos que nos indican esos valores.



Por tanto la función es cóncava en el intervalo $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ y convexa en $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

Reflexiona

En un invernadero se está realizando el estudio del crecimiento de un nuevo tipo de planta. Es interesante estudiar cuando crece más y cuando menos, por ello, los científicos quieren estudiar la curvatura de la función que han aproximado al crecimiento de la planta en las primeras semanas. Esa función viene dada por la expresión

$$f(x)=\frac{x^4}{16}-\frac{3x^3}{8}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x}{2}+3$$

Ayúdales hallando los intervalos de concavidad y convexidad de esa función.

Fotografía en INTEF. Licencia CC

Mostrar retroalimentación

Como suponemos que partimos desde cero en el estudio, la función será cóncava en el intervalo $[0,1)\cup(2,+\infty)$ y convexa en el intervalo $(1,2)$.

Importante

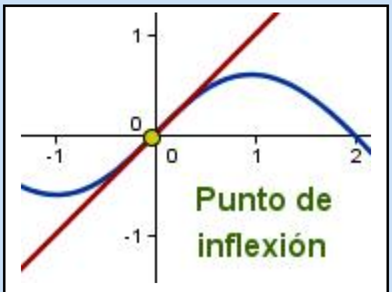


Imagen de elaboración propia

Un **punto de inflexión** es aquel en el que la función cambia de curvatura, es decir, en el que pasa de cóncava a convexa o viceversa.

Si trazamos una tangente a la función en ese punto se puede apreciar que a un lado del punto la función queda por encima de la recta tangente y al otro lado por debajo.

Como en el punto de inflexión la función pasa de cóncava $\left(f''(a)<0\right)$ a convexa $\left(f''(a)>0\right)$, lo normal es que en ese punto la función se anule. Compruébalo en la siguiente ventana observando que pasa en los puntos x=-3, x=0 y x=2, que son puntos de inflexión de la función.

Applet de mduran alojado en GeoGebra. Licencia CC

Importante

Si una función f cumple en un punto x=a que $f''(a)=0$ y $f'''(a)\neq 0$ entonces la función tiene en x=a un **punto de inflexión**.

Si es complicado el cálculo de la derivada tercera, lo usual es estudiar el signo de la segunda derivada antes y después del punto x=a. Si cambia su signo entonces es punto de inflexión.

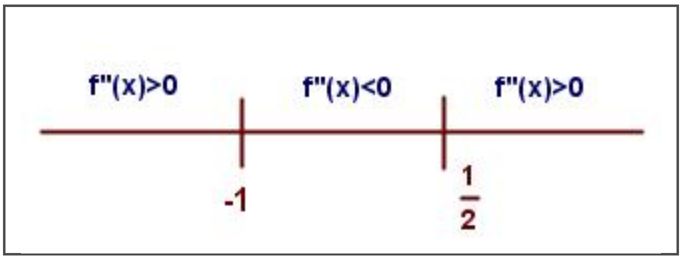
Ejercicio resuelto

Determina los puntos de inflexión de la función $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x+2$

Mostrar retroalimentación

Ya estudiamos en el apartado anterior los intervalos de concavidad y convexidad de esta función.

Su derivada segunda es $f''(x)=12x^2+6x-6$, que se anulaba en los puntos $x=-1$ y $x=\frac{1}{2}$ y los intervalos de signo son:



Por tanto tenemos dos puntos de inflexión, en concreto en los valores $(-1,f(-1))=(-1,4)$ y $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{17}{16}\right)$

Comprueba lo aprendido

En una compañía petrolífera están estudiando el número de miles de bidones de combustible que han servido en las cuatro primeras semanas del mes. Les interesa conocer si el aumento o disminución ha sido muy rápido o no y para ello quieren localizar los puntos de inflexión en ese reparto.

Después del estudio realizado han aproximado la entrega de combustible a la función siguiente:

$$f(x)=-\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{2}-\frac{11x^3}{3}+3x^2-\frac{97x}{60}+3$$

Los puntos de inflexión de esa función se obtienen en:

Fotografía en INTEF. Licencia CC

(1 , $\square$)

($\square$, 7/2)

($\square$, $\square$)

Enviar

Comprueba lo aprendido

Necesitamos estudiar la curvatura de la función $f(x)=\frac{x^5+5x^4}{10}$ para un proyecto que estamos realizando. Completa los campos en blanco con los resultados que obtengas:

- La primera derivada de la función es f '(x) = (x^4+ $\square$ x^3) / $\square$
- La segunda derivada es f ''(x) = $\square$ x^3+ $\square$ x^2
- La función f(x) es cóncava en (-∞, $\square$)
- La función f(x) es convexa en ($\square$,+∞)
- Tiene un punto de inflexión en P=($\square$, $\square$)
- ¿Existe punto de inflexión en x=-3? (sí/no) $\square$

Enviar

Observa que en x=-3 se cumple que f ''(-3)=0, pero como no cambia la curvatura, no hay punto de inflexión en dicho punto.

Ejercicio resuelto

Sea la función $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x+e^{-x}$.

a. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, así como los extremos relativos o locales de f.

b. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f.

Mostrar retroalimentación

Hallamos la primera derivada fr f

$$f'(x)=1-e^{-x}$$

Calculamos los puntos donde se anula

$$1-e^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}=1 \Rightarrow -x=0 \Rightarrow x=0$$

La derivada cumple que para $x<0 \rightarrow f'(x)<0$ por lo tanto la función es decreciente en $(-\infty,0)$. Para los restantes valores, si $x>0 \rightarrow f'(x)>0$ y, por eso, en el intervalo $(0,+\infty)$ la función es creciente.

En el valor x=0 la función pasa de decreciente a creciente, luego hay un mínimo relativo en (0,1).
La segunda derivada vale $f''(x)=e^{-x}$ y como la función exponencial siempre es positiva, la segunda derivada siempre es positiva y por tanto la función siempre es convexa.

Importante

Cuando hablamos de **monotonía**, nos estamos refiriendo al comportamiento de una función respecto a su crecimiento o decrecimiento.

Sea f una función derivable en un intervalo (a, b), entonces es:

- **Creciente** en el intervalo (a,b) si $f'(x) \geq 0$ en todo el intervalo (a,b)
- **Decreciente** en el intervalo (a,b) si $f'(x) \leq 0$ en todo el intervalo (a,b)

Importante

Si la función f(x) tiene derivada nula en el punto x=a, f'(a)=0, y existe la segunda derivada en dicho punto se cumple:

- Si f''(a)<0, la función tiene (o alcanza) un **máximo relativo** en x=a.
- Si f''(a)>0, la función tiene (o alcanza) un **mínimo relativo** en x=a.

Importante

Si tenemos una función que admite, al menos, hasta la segunda derivada en un punto x=a tenemos el siguiente resultado.

- Si $f''(a)>0$, la función es **convexa** (U) en el punto a.
- Si $f''(a)<0$, la función es **cóncava** (∩) en x=a.

Luego para estudiar los intervalos de concavidad y convexidad de una función, basta estudiar donde es positiva y negativa la segunda derivada.

Importante

Si una función f cumple en un punto x=a que $f''(a)=0$ y $f'''(a)\neq 0$ entonces la función

Si una función f cumple en un punto x=a que [illegible] entonces la función tiene en x=a un **punto de inflexión**.

Si es complicado el cálculo de la derivada tercera, lo usual es estudiar el signo de la segunda derivada antes y después del punto x=a. Si cambia su signo entonces es punto de inflexión.

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio