INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Resumen de las unidades 3 y 4

Importante

Pensando en la prueba...

Como ya habrás descubierto, este tema está íntimamente relacionado con números y funciones, por lo que se hace imprescindible que hayas adquirido soltura en el manejo de ambos conceptos.

Respecto al examen, hasta la fecha es frecuente encontrarnos con actividades relacionadas con las progresiones aritméticas y geométricas, destacando también apartados en los que se trabaja con el interés simple y compuesto.

Una **sucesión numérica** es todo conjunto ordenado de números reales: $a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots$

Cada uno de los elementos de la sucesión se llama **término**. Como puedes ver, se utilizan los **subíndices** para conocer el lugar que ocupa cada término en la sucesión.

Se llama **término general** al que ocupa el lugar indeterminado n. Dicho término se expresa como a_n. En muchas ocasiones, los términos de las sucesiones se pueden determinar a partir de cierto criterio, este criterio se denomina **regla de formación**.

Es decir, estas reglas de formación nos ayudan a definir la sucesión, para lo que podemos usar cualquiera de estos métodos:

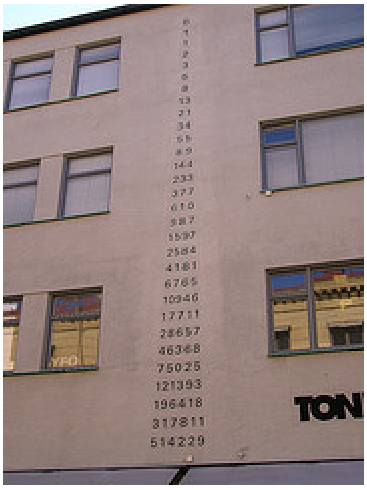


Imagen en Flickr de Eva the Weaver bajo CC

- **Descriptivo**. Consiste en describir mediante alguna propiedad, o dando algunos elementos de la sucesión para deducir dicha propiedad (por ejemplo, la sucesión de los números pares).
- **Analítico**. Al igual que ocurre con las funciones, una sucesión puede en ocasiones venir expresada por una fórmula de tipo algebraico, como $a_n = 2 \cdot n$. No siempre es posible calcular el término general de una sucesión, como ocurre con los números primos.
- **Recurrente**. En él a partir de un determinado término, los demás términos de la sucesión son definidos a partir del anterior o anteriores. Este tipo de sucesiones se llaman también recurrentes (por ejemplo, $a_1 = 5,\ a_n = n \cdot a_{n-1}$ si $n \geq 2$).

Estos métodos para definir las sucesiones, en ocasiones también nos sirven para clasificarlas.

Por ejemplo, si tenemos una sucesión definida de forma recurrente de tal manera que cada término, exceptuando el primero, es la suma del anterior más una cantidad fija (diferencia), estamos ante una sucesión o **progresión aritmética**. En cambio, si se obtiene como el producto del término anterior por una cantidad fija (razón), estamos antes una **progresión geométrica**.

En el siguiente cuadro puedes ver un resumen de las características más importantes de este tipo de progresiones:

Progresión	Definición	Término general	Suma de los n términos	Suma de los infinitos términos
Aritmética	$a_n = a_{n-1} + d$	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$		

	$n>1$	$n>1$	$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$	
Geométrica	$a_n=a_{n-1}\cdot r$ $r\neq 0 \quad n>1$	$a_n=a_1\cdot r^{n-1}$ $r\neq 0 \quad n>1$	$S_n=\frac{r\cdot a_n-a_1}{r-1}$	$S_\infty=\frac{a_1}{1-r}$ $\lvert r\rvert<1$

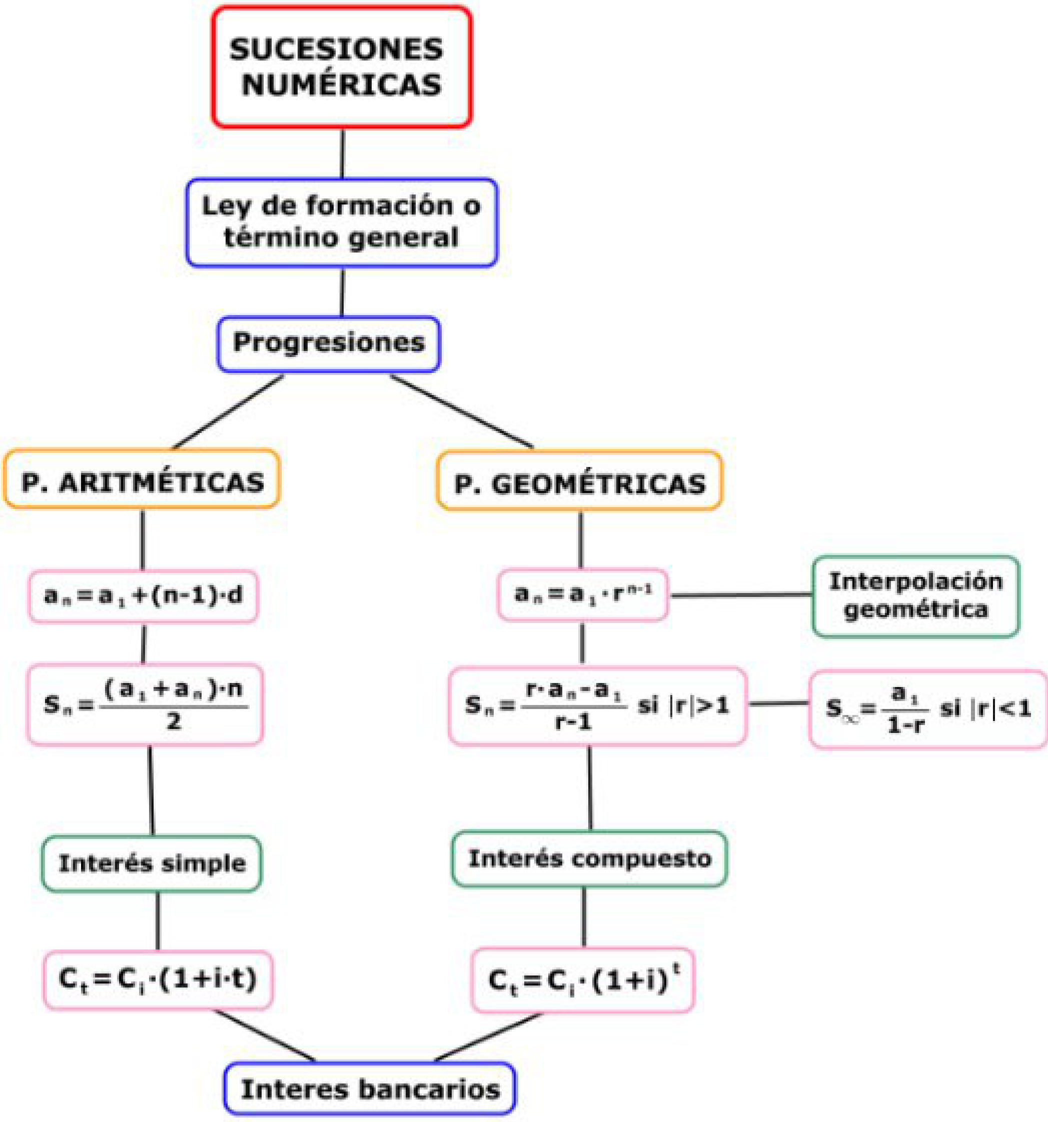
Una de las aplicaciones más importantes de este tipo de sucesiones es de carácter financiero, y es que cuando queremos obtener el capital final a partir de un capital inicial y un interés, este puede calcularse utilizando una de las fórmulas anteriores. Solo tenemos que saber si estamos ante un interés simple o un interés compuesto.

- El interés simple se calcula y se paga sobre un capital inicial que permanece invariable, es decir, es siempre la misma cantidad (capital inicial) la que produce intereses.
- En el interés compuesto en cambio, los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión no se retiran sino que se reinvierten o añaden al capital inicial.

Si llamamos C_i al capital inicial que depositamos o solicitamos al principio, y C_t al capital final que obtenemos al cabo de un tiempo t, conociendo el interés r en tanto por ciento, podemos expresar este capital final de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Interes simple:} & C_t=C_i+C_i\cdot i\cdot t=C_i\cdot(1+i\cdot t)\\ \text{Interes compuesto:} & C_t=C_i\cdot(1+i)^t\end{array}\right. \text{, donde } i=\frac{r}{100}$$

Todos estos conceptos podemos resumirlos en el siguiente esquema:



Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

a) En una progresión aritmética de 20 términos, el primero es 5 y el décimo 32. Halla su razón y la suma de sus primeros 20 términos.

b) Un banco concedió a una empresa un préstamo a un interés compuesto del 6 % durante 5 años y al cabo de ese tiempo el interés acumulado es de 3.382,25 €. ¿Qué capital prestó el banco a la empresa?

Mostrar retroalimentación

a) De la progresión aritmética sabemos que $a_1 = 5$ y $a_{10} = 30$. Nos piden la diferencia, d, lo que en el enunciado llaman la razón, y la suma de los primeros 20 términos, S_{20}

terminos, S_{20} .

En primer lugar calculamos d . Sabemos que $a_{10}=a_1+9d$. Sustituimos valores y despejamos d :

$$32=5+9d \rightarrow 27=9d \rightarrow d=3$$

Ahora, y aplicando la fórmula, hallaremos S_{20} . Pero antes hay que calcular el valor de $a_{20}=a_1+19d=5+19\cdot 3=5+57=62$.

Por tanto, la suma de los primeros 20 terminos será:

$$S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20=\frac{5+62}{2}\cdot 10=335$$

Luego la suma es **335**.

b) En primer lugar, situemos el ejercicio.

El capital que prestó el banco a la empresa es el capital inicial C_i .

La cantidad total que pagó la empresa por ese préstamo a 5 años es el capital final C_5 .

El interés es del 6 %, por tanto $i=0{,}06$. Y el tiempo 5 años, es decir $t=5$.

Los intereses acumulados son la diferencia entre el capital prestado por el banco y el pagado por la empresa, es decir $C_5-C_i=3.382{,}25 \text{ euros}$.

Sabemos que $C_5=C_i\cdot(1{,}06)^5$, por tanto $C_i\cdot(1{,}06)^5-C_i=3.382{,}25$. Operando

$$C_i\cdot(1{,}06^5-1)=3.382{,}25 \rightarrow C_i\cdot 0{,}338225=3.382{,}25 \rightarrow C_i=10.000 \text{ euros}$$

Es decir, el capital prestado fue de 10.000 euros.

Ejercicio resuelto

Universidades Públicas de Andalucía

Curso 2010/2011

a) Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 30 y el cuarto es 39, halla la diferencia de la progresión y la suma de sus primeros 25 términos.

b) Hace cuatro años se depositó una cantidad de dinero en una cuenta de ahorro, a un interés compuesto, con un rédito del 4 % anual. Si el capital obtenido finalmente es de 6.424,22 euros, calcule el capital inicial que se depositó y los interes totales que ha producido en los 4 años.

Mostrar retroalimentación

a) Primero hallamos la diferencia $a_4=a_1+3d$, es decir, $39=30+3d$. Por tanto, $d=3$

Antes de calcular la suma tendremos que conocer cuánto vale a_{25}. Operamos $a_{25}=30+24\cdot 3=102$

Ya podemos aplicar la fórmula y tendremos que

$$S_{25}=\frac{(a_1+a_{25})\cdot 25}{2}=\frac{(30+102)\cdot 25}{2}=\frac{132\cdot 25}{2}=1.650$$

b) Situemos el problema planteado.

Nos piden el capital inicial, es decir C_i.

El periodo de tiempo es 4 años, por tanto $t=4$.

El interés compuesto es del 4 %, por lo que $i=0{,}04$.

El capital final es de 6.424,22 euros, es decir $C_4=6.424{,}22$.

Sabemos que $C_4=C_i\cdot 1.04^4=C_i\cdot 1{,}16985$.

Despejando tenemos que $C_i=\frac{6.424{,}22}{1{,}16985}=5.491{,}49 \text{ euros}$.

Los interes son el resultado de restar el dinero despositado y el capital obtenido: $C_4-C_i=6.424{,}22-5.491{,}49=932{,}73 \text{ euros}$.

Ejercicio resuelto

Curso 2011/2012

Una persona coloca 20.000 € en un producto de inversión que ofrece una rentabilidad anual del 2 % de interés compuesto durante 3 años. Determina los intereses producidos cada año y el capital final obtenido al acabar el plazo previsto.

Mostrar retroalimentación

En primer lugar, dejaremos claro los datos de que disponemos.

El capital inicial, $C_i=20.000 \text{ euros}$.

El interés es compuesto del 2 %, por tanto $i=0{,}02$.

Y el periodo es anual de 3 años, luego $t=3$.

Nos piden, el capital final al cabo de 3 años, C_3 y los interes obtenidos cada año.

Empecemos por el capital final, $C_3=C_1\cdot(1+i)^3=20.000\cdot 1.02^3=21.224{,}16 \text{ euros}$.

Veamos cuáles son los intereses anuales.

El primer año $20.000\cdot 0{,}02=400 \text{ euros}$.

El segundo año habrá que aplicar dicho $0{,}02$ a $20.000+400=20.400$ euros

El segundo año habrá que aplicar dicho $0{,}02$ a $20.000+400=20.400\ \text{euros}$, por tanto tendremos $20.400\cdot 0{,}02=408\ \text{euros}$.

El tercer año se aplicará el $0{,}02$ a $20.400+408=20.808\ \text{euros}$, lo que dará $20.808\cdot 0{,}02=416{,}16\ \text{euros}$.

Por último, y sólo como observación, si sumamos 400 + 408 + 416,16 obtendremos 1.224,16 euros, que son los intereses totales de los tres años, que al sumarlos a 20.000 nos dará los 21.224,16 eruos de capital final que ya habíamos obtenido.

Importante

Pensando en la prueba...

Lo más importante de la estadística unidimensional, en relación con el examen de la PAU para mayores de 25 años y en función de las pruebas aparecidas en años anteriores, es saber organizar la información en tablas de frecuencias, y calcular los parámetros de centralización (media y moda) y los de dispersión (varianza y desviación típica). Esto requiere ser meticuloso en los cálculos, ya que un simple error al obtener la frecuencia, la marca de clase, incluso en la media puede provocar que el resto de la actividad no sea correcta.

La **Estadística** es la rama de las matemáticas que se encarga de recolectar y organizar datos con el objeto de inferir conclusiones sobre ellos. Al igual que en Álgebra, hablábamos de ecuaciones, incógnitas..., la Estadística tiene su propio vocabulario para referirse a los distintos elementos que componen un estudio estadístico. En la siguiente presentación puedes repasar los más comunes:

Cuando realizamos un estudio estadístico, los datos que obtenemos debemos organizarlos para poder sacar conclusiones provechosas de ellos. Tenemos dos formas de organizar estos datos: mediante tablas o/y gráficos estadísticos. En la siguiente presentación te explicamos cómo recoger toda la información en una tabla que posteriormente te será muy útil. Además, con relación a los gráficos estadísticos destacamos dos, por su sencillez de construcción y por la información que nos trasladan a simple vista.

Estadística

Organización de datos

Importante

Notación

Muchos de los conceptos mencionados anteriormente los denotamos con una nomenclatura especial.

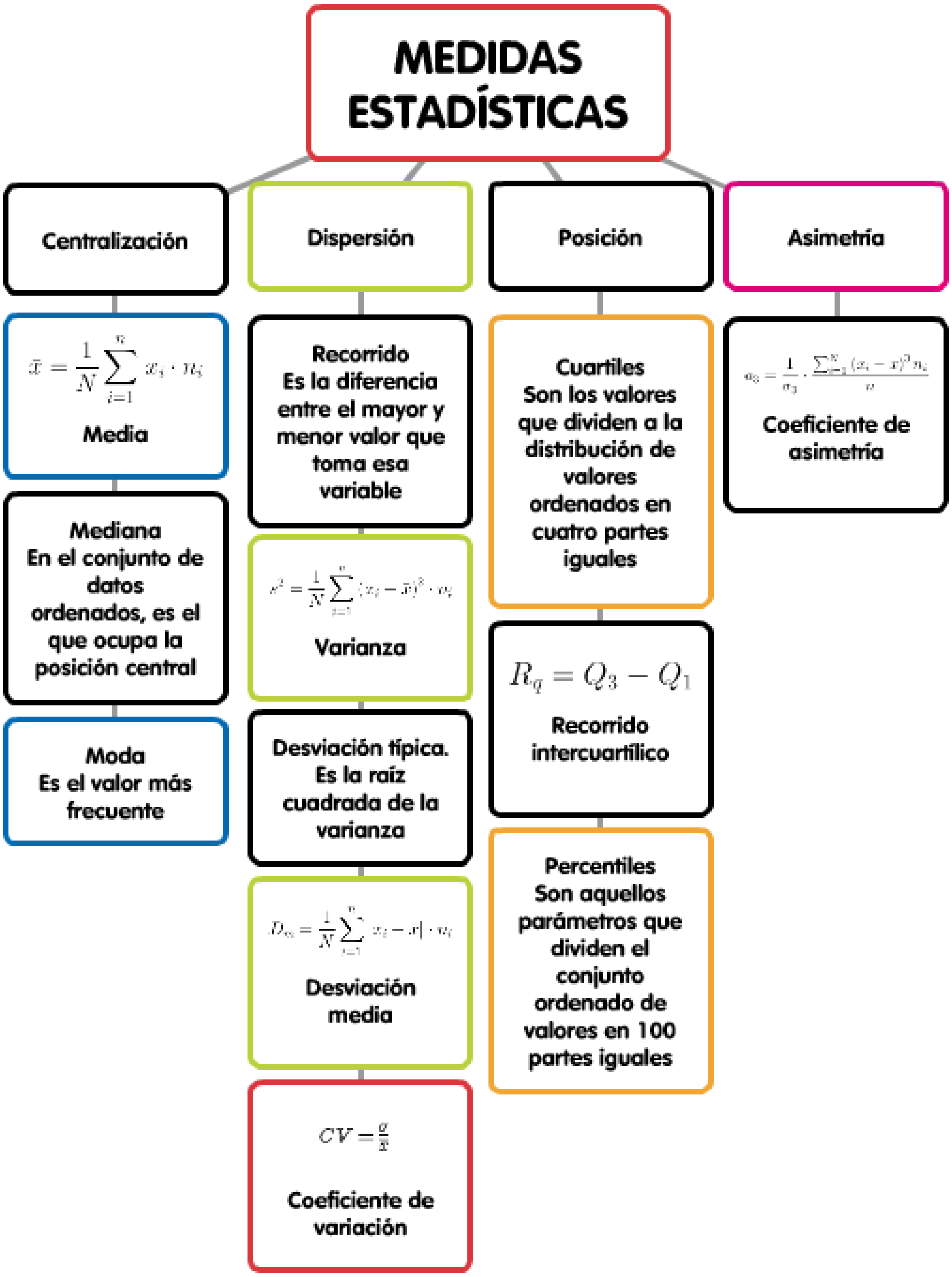
Marca de clase o datos	Número total de datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia abs. acumulada	Frecuencia rel. acumulada
x_i	N	n_i	f_i	N_i	F_i

Puede ocurrir que si utilizas otros textos como referencia, esta notación cambie.

Por último, para analizar estos datos se hace imprescindible resumirlos de manera que se conserve la mayor información posible y que representen el comportamiento global de la población.

Esto lo vamos a hacer a través de una serie de medidas que complementarán unas a otras:

- **Medidas de centralización**, buscan las características del centro de la distribución, y son la media, moda y mediana.
- **Medidas de posición**, indican, una vez ordenados, cuántos elementos quedan a la izquierda o derecha de uno dado: cuartiles, deciles, centiles o percentiles.
- **Medidas de dispersión**, proporcionan una idea sobre la separación de los datos: rango o recorrido, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación.
- **Medidas de forma**, proporcionan una idea de la simetría de la distribución: coeficiente de asimetría.



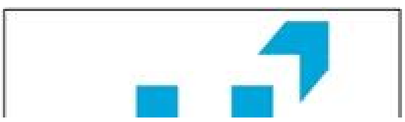
Haz clic en la imagen para ampliar

Ejercicio resuelto

Curso 2011/2012

En una urbanización se ha realizado un estudio sobre el número de personas que habitan en cada piso y se obtienen los siguientes datos:

Personas	1	2	3	4	5
Pisos	20	60	52	35	18



a) ¿Cuántos pisos hay en la urbanización?
b) Determine la media y la moda de la distribución.
c) Determine la varianza y la desviación típica de la misma

misma.

Mostrar retroalimentación

a) El número de pisos se corresponde con la suma de todas las frecuencias absolutas de la distribución, por lo tanto, el total de pisos es 20+60+52+35+18=185.

b) La **moda** de la distribución es aquel valor que tiene mayor frecuencia absoluta, por lo que, la moda de nuestra distribución es 2.

La media:

$$\overline{x}=\frac{1\cdot 20+2\cdot 60+3\cdot 52+4\cdot 35+5\cdot 18}{185}=\frac{526}{185}=2{,}84$$

Varianza

$$s^2=\frac{1^2\cdot 20+2^2\cdot 60+3^2\cdot 52+4^2\cdot 35+5^2\cdot 18}{185}-2{,}84^2=\frac{1738}{185}-8{,}0656=1{,}33$$

Desviación típica

$$s=\sqrt{1{,}33}=1{,}15$$

Ejercicio resuelto

Curso 2010/2011

En la corrección de errores tipográficos de un texto se han encontrado 22 páginas con un solo error en cada una, 9 páginas con dos errores en cada una, 6 páginas con 3 errores en cada una, 3 páginas con 4 errores en cada una, 2 páginas con 5 errores en cada una y ningún error en las 58 páginas restantes.

a) Construya las tablas de frecuencias absolutas y relativas de la distribución del número de errores por página de ese texto.

b) Halle la media y la desviación típica del número de errores por página de dicho texto.

Mostrar retroalimentación

Vamos a estudiar el número de errores por página, por lo tanto la modalidad de la variable es el número de errores, y su frecuencia absoluta es el número de páginas que tienen esos errores.

Número de	Frecuencia	Frecuencia	Frec. Abs.	Frec. Rel.

Número de errores	Absoluta n_i	Relativa f_i	Acumulada N_i	Acumulada F_i
0	58	$\frac{58}{100}=0{,}58$	58	0,58
1	22	$\frac{22}{100}=0{,}22$	80	0,8
2	9	$\frac{9}{100}=0{,}09$	89	0,89
3	6	$\frac{6}{100}=0{,}06$	95	0,95
4	3	$\frac{3}{100}=0{,}03$	98	0,98
5	2	$\frac{2}{100}=0{,}02$	100	1
TOTAL	100	1		

b) **Media:**

$$\overline{x}=\frac{0\cdot 58+1\cdot 22+2\cdot 9+3\cdot 6+4\cdot 3+5\cdot 2}{100}=0{,}8$$

Para calcular la desviación típica, primero calculamos la varianza:

$$s^2=\frac{0^2\cdot 58+1^2\cdot 22+2^2\cdot 9+3^2\cdot 6+4^2\cdot 3+5^2\cdot 2}{100}-0{,}8^2=\frac{210}{100}-0{,}64=1{,}46$$

Desviación típica:

$$s=\sqrt{1{,}46}=1{,}21$$

Importante

Pensando en la prueba...

Los problemas de regresión lineal, hasta el momento no son muy frecuentes en la prueba porque pueden resultar muy tediosos en cuestión de cálculo, sobre todo si se manejan tablas de doble entrada. Es por ello por lo que si nos encontramos con alguno, lo normal será que se trabaje sobre una tabla simple con pocos datos, como en el ejercicio resuelto.

Para poder avanzar en este tema, es imprescindible que te defiendas con mucha soltura en la estadística unidimensional, pues se volverán a manejar conceptos como media, desviación típica...

Universidades Públicas de Andalucía

Una **Variable Estadística Bidimensional (X,Y)** es el resultado del estudio de dos caracteres X e Y en los elementos de una población.

Para cada elemento de estudio obtenemos un par de valores que notaremos (x_i,y_i), donde x_i es el valor para el factor X, e y_i para el factor Y.

En una variable bidimensional (X,Y), cada una de las variables por separado (X) e (Y) constituyen variables unidimensionales estadísticas, por lo que podemos calcular sus medias $(\overline{x}, \overline{y})$ y sus desviaciones típicas (σ_x, σ_y). A estas variables se les conoce como **marginales**.

Pero al igual que hacíamos con las variables estadísticas unidimensionales, antes de poder sacar conclusiones sobre la relación existente entre ellas o sobre los datos obtenidos, lo primero que debemos hacer es organizar y representar los datos.

Organizar: Tablas de doble entrada

Las tablas de doble entrada son útiles en casos en los que tenemos gran cantidad de datos o en los que los pares de datos pueden aparecer repetidos, en cuyo caso trabajamos con la *frecuencia* n_{ij}. En caso contrario, hacemos uso de una tabla simple (como puedes ver en el ejercicio resuelto).

Representación: Nube de puntos

Se representa sobre un par de ejes cartesianos. En este caso, cada punto representa un par de datos de la variable estadística bidimensional.

Las nubes de puntos nos ayudan si existe dependencia (correlación) entre las variables que forman la distribución bidimensional.

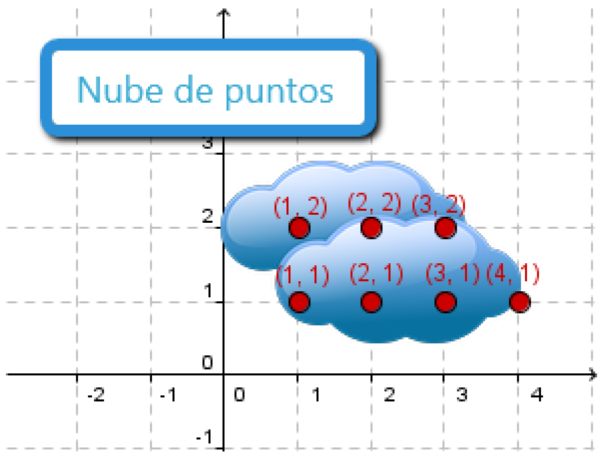


Imagen de elaboración propia

- **Correlación funcional:** si existe una relación funcional entre las variables X e Y. Es decir, podemos calcular los valores de Y a partir de los de X, con una función.
- **Correlación positiva o directa:** existe cierta relación entre ambas variables, y al aumentar los valores de X también aumentan los de Y.

- **Correlación negativa o inversa**: existe cierta relación entre las variables, pero al aumentar los valores de X disminuyen los de Y.

- **Correlación nula:** no existe ningún tipo de relación entre ambas.

Esta forma de representación nos puede ayudar a intuir si la dependencia es más o menos fuerte, pero tenemos unos parámetros que nos ayudan a saber cómo será exactamente esta correlación:

	Fórmula	Interpretación
Covarianza	$\sigma_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$ $\sigma_{XY} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$	El signo de la covarianza nos permitirá saber el tipo de correlación: • Si la covarianza es positiva, la correlación será directa. • Si la covarianza es negativa, la correlación será inversa.
Coeficiente de correlación	$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$	El valor del coeficiente de correlación lineal *r* siempre será un número comprendido entre -1 y 1. Su signo nos indicará el sentido de la correlación (positiva o negativa) y cuanto más próximo esté su valor a 1 o -1, más fuerte será la correlación.

Pero, ¿para qué necesitamos saber si existe relación entre una variable y otra?

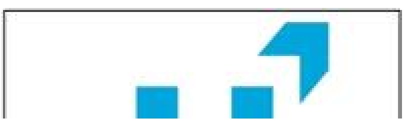
La principal ventaja es poder predecir posibles resultados, lo que es posible gracias a la **recta de regresión**, que sería la recta que mejor se adapta a la nube de puntos.

	Fórmula	Interpretación
Recta de regresión Y sobre X	$y = \bar{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$	Nos permite "predecir" valores de la variable (distribución) Y que no conozcamos sustituyendo el valor de la X.
Recta de regresión X sobre Y	$x = \bar{x} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y})$	Nos permite "predecir" valores de la variable (distribución) X que no conozcamos sustituyendo el valor de la Y.

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

Una cooperativa aceitera quiere realizar un estudio sobre la influencia de las campañas publicitarias en sus cifras de ventas. Para ello dispone del gasto estimado en publicidad y del volumen de ventas de los últimos 5 años (ambos en miles de euros):



Universidades Públicas de Andalucía

X: Gasto en publicidad	2.5	2.8	2.9	3.1	3.5
Y: Ventas	200	221	230	239	248

a) Obtenga la recta de regresión de Y sobre X. ¿Cuál será el volumen de ventas si la inversión en publicidad ascendiera a 3.8 millones de euros?

b) Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.

Mostrar retroalimentación

Nos piden calcular la recta de regresión de Y sobre X, para lo que utilizamos la fórmula

$$\boxed{y=\overline{y}+\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\overline{x})}$$

Usando los datos que nos dan en el problema construimos la siguiente tabla, sabiendo que N=5:

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
	2,5	200	6,25	40000	500
	2,8	221	7,84	48841	618,8
	2,9	230	8,41	52900	667
	3,1	239	9,61	57121	740,9
	3,5	248	12,25	61504	868
TOTAL	14,8	1138	44,36	260366	3394,7

Calculamos la media y las desviaciones típicas marginales:

14,8

Importante

Pensando en la prueba...

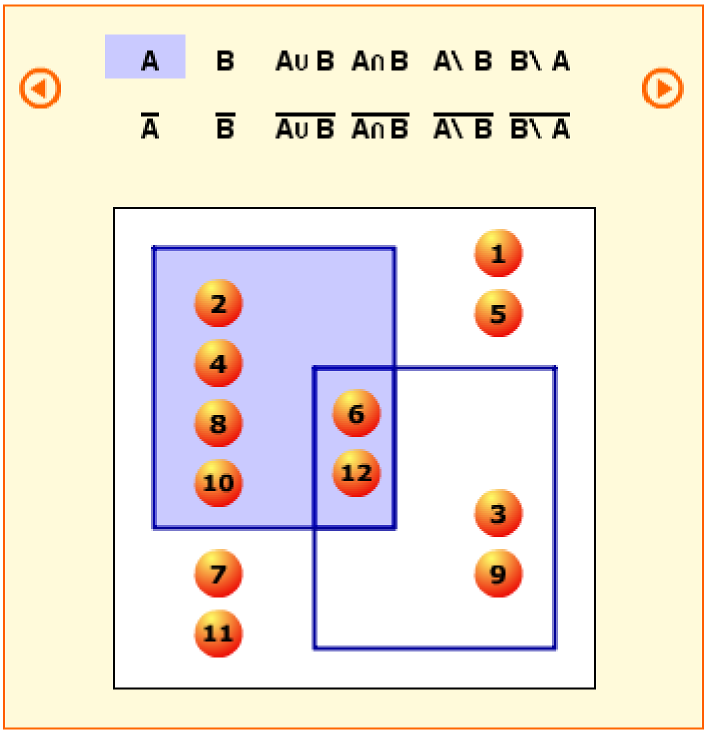
La probabilidad es un tema muy recurrente en la prueba. Además, los ejercicios de los últimos años recorren muchos de los conceptos que hemos trabajado en el tema: trabajo con experimentos compuestos, operaciones con sucesos, reconocimiento de las peculiaridades de los distintos tipos de sucesos (incompatible, independiente...).

Por ello, es conveniente que manejes tanto los conceptos, como la nomenclatura y las fórmulas con mucha soltura.

Al enfrentarnos a una nueva disciplina, siempre debemos prestar mucha atención al vocabulario básico que se maneja, de esta forma podemos ahorrarnos futuros problemas. En la siguiente presentación puedes recordar conceptos como: experimento aleatorio, espacio muestral y suceso. Además, aprovechamos para recordarte los tipos de sucesos, las posibles relaciones existentes entre ellos, y las operaciones básicas, así como las leyes de Morgan. Todo ello acompañado de un recurso que te ayudará visualmente a entender estas operaciones y propiedades.

Probabilidad

Conceptos previos



Históricamente se han usado distintas formas de asignar la probabilidad:

1. **Probabilidad clásica o de Laplace**: La probabilidad de un suceso consistiría en dividir el número de casos favorables entre el número de casos posibles. Esta definición teórica de probabilidad es útil en los experimentos aleatorios de tipo finito, cuando es posible obtener el número de casos favorables y el número de casos posibles y estos son igualmente probables.

2. **Probabilidad frecuentística o empírica**: Consiste en tomar como medida de la probabilidad de un suceso la frecuencia relativa con la que este aparece. Hay personas que en los juegos de azar llevan una estadística de los resultados que se van obteniendo y toman las frecuencias relativas como sinónimo de probabilidad.

3. **Probabilidad subjetiva**: algunas personas asignan probabilidades de forma subjetiva, por ideas preconcebidas y carentes de toda lógica. Así se dice que si el año pasado el premio de la lotería navideña acabó en 5 este año es mejor coger números que no acaben en 5.

Todas estas asignaciones de probabilidad tienen algo en común: la probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 (aunque a veces aparezca como un porcentaje), una medida de la frecuencia con la que consideramos que tal suceso ocurrirá.

Importante

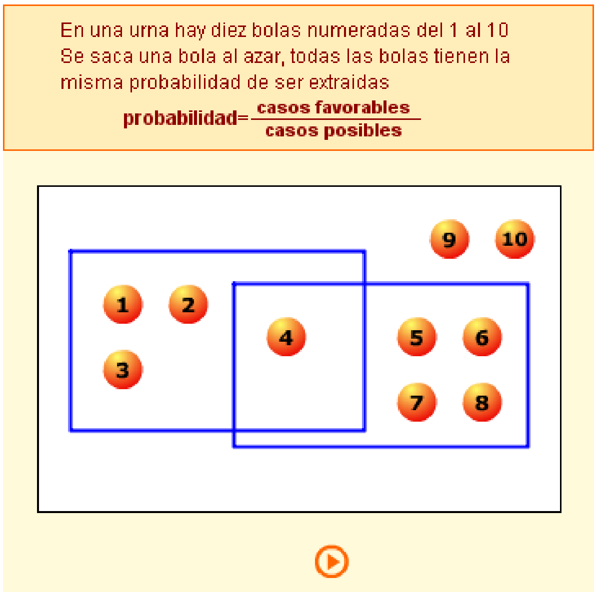
En un experimento con resultados equiprobables, la probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de resultados favorables al suceso partido por el número de resultados posibles del experimento, es decir, el número de sucesos elementales. Este resultado se conoce como **Regla de Laplace**.

$$P(\text{de un suceso } A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Si haces clic en la imagen de la izquierda, verás como se calculan algunas probabilidades utilizando esta definición, a través de un applet del Proyecto Edad.

Observa esos ejemplos y fíjate en que siempre conocemos el espacio muestral asociado al experimento. Pero, ¿qué ocurre cuando partimos de otras probabilidades o de experimentos compuestos donde es más difícil determinar el espacio muestral?

En la primera situación debemos tener en cuenta la relación existente entre los sucesos de los que conocemos la probabilidad, y entre aquellos en los que la desconocemos. Para ello, es conveniente que recuerdes las siguientes fórmulas:

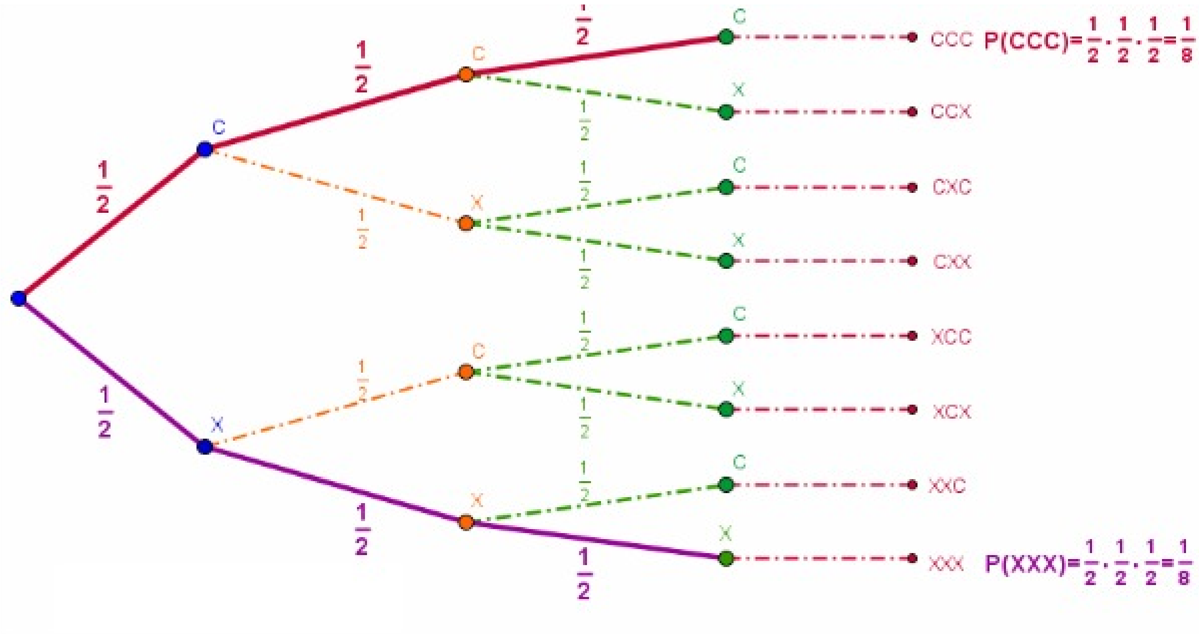


Probabilidad del suceso imposible	$P(\emptyset)=0$
Probabilidad del complementario	$P(A^c)=1-P(A)$
Probabilidad de la unión sucesos incompatibles	$P(AUB)=P(A)+P(B)$
Probabilidad de la unión	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
Probabilidad condicionada (A sabiendo B)	$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
Probabilidad de la intersección sucesos independientes	$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

En la segunda situación abordamos aquellos experimentos en los que cada prueba equivale a la realización conjunta de varias pruebas simples, ya sea simultánea o sucesivamente.

La probabilidad de un suceso de un experimento compuesto se calcula a partir de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman. Para calcular la probabilidad de un suceso de un experimento compuesto se pueden usar varios métodos.

Uno de estos métodos consiste en usar los diagramas en árbol. En el diagrama, en cada paso, vamos escribiendo las probabilidades de los experimentos simples que componen nuestro experimento compuesto. Se observa el camino de las ramas que nos conducen a la solución. El producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino será la probabilidad del suceso solución.



En los siguientes ejercicios resueltos de pruebas de años anteriores, se trabajan ambas situaciones:

Ejercicio resuelto

Universidades Públicas de Andalucía

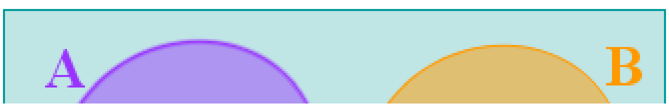
Curso 2011/2012

Sean A y B dos sucesos incompatibles de un espacio muestral cuyas probabilidades son P(A)=0,25 y P(B)=0,35. Calcule P(A∩B), P(AUB) y P(A^c∩B)

Mostrar retroalimentación

P(A∩B)

Dos sucesos son incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común, es decir, A∩B=ø. Por lo tanto, P(A∩B)=0.



P(AUB)

Utilizando la fórmula de la unión de dos sucesos P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B) obtenemos que P(AUB)=0,25+0,35-0=0,6.

P(A^c∩B)

Si nos fijamos detenidamente en la imagen, la preguntaría sería ¿qué parte que no está en A coincide con la de B? En este caso coincidiría con el propio B, pues A y B no tienen ningún elemento en común, por lo tanto P(A^c∩B)=0,35.

Ejercicio resuelto

Curso 2010/2011

De una caja que contiene 2 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra, se extraen al azar dos bolas, sucesivamente y sin reemplazamiento, y se observan sus colores en el orden en el que se extraen.

a) Describa el espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) Halle la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

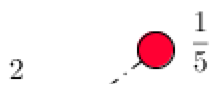
c) Halle la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

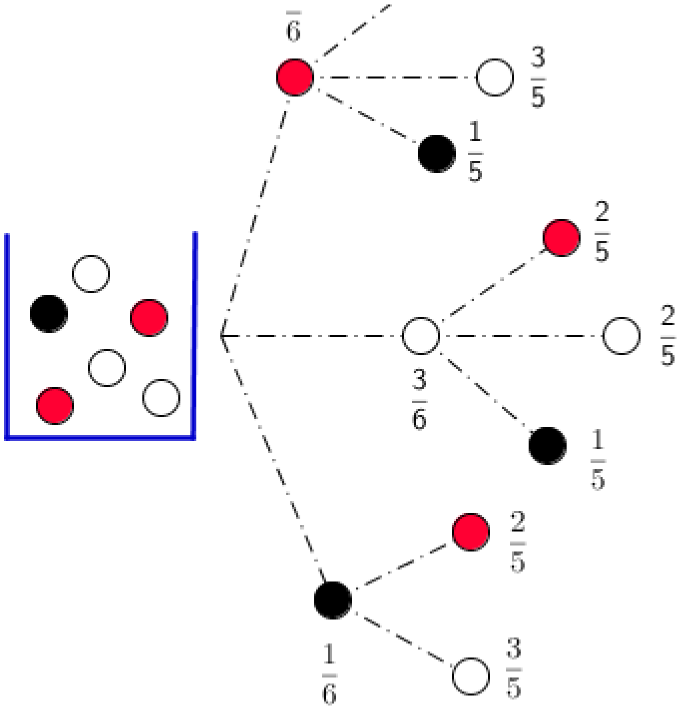
Mostrar retroalimentación

Llamemos R al suceso "extraer una bola roja", B "extraer bola blanca" y N "extraer bola negra"

a) Como tenemos que extraer dos bolas estamos hablando de un experimento compuesto, cuyo espacio muestral (todos los casos posibles) es

E={(R,R) (R,B) (R,N), (B,R), (B,B), (B,N), (N,R), (N,B)}.





b) En la primera extracción tenemos 6 bolas en total, y 2 de las cuales son rojas. Por lo tanto,

$$P(R)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

c) Nos preguntan por la probabilidad de que sea (R,R) o (B,B) (las dos bolas negras no puedan ser pues solo tenemos 1 en la caja).

$P((R,R)\cup(B,B))=P((R,R))+P((B,B))$ (ya que ambos sucesos son incompatibles)

$P((R,R))=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$ y $P((B,B))=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

Observa como en la primera extracción tenemos todas las bolas (6) y en la segunda extracción al ser sin reemplazamiento tenemos una bola menos (5).

Por tanto $P(\text{las dos bolas del mismo color})=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}=\frac{4}{15}$

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

Se lanzan simultáneamente dos dados cuyas caras están numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las dos caras sea 12?

Mostrar retroalimentación

El espacio muestral asociado al experimento tirar dos dados es:

E={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Es decir, tenemos 36 casos posibles equiprobables.

Pero, ¿en cuántos de ellos la suma de los dados es 12? Solamente en el caso (6,6)

Por lo que, si llamamos A al suceso "obtener 12 en la suma de las caras de dos dados", y aplicando la regla de Laplace obtenemos:

$$P(A)=\frac{1}{36}$$

Importante

Pensando en la prueba...

Como ya habrás visto en el tema, no disponemos de actividades sobre estos contenidos en las pruebas de años anteriores. Pero también es cierto que la prueba de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales tiene pocos años de existencia. Por este motivo no debemos confiarnos y dejar a un lado el trabajo con la binomial, que una vez que le tomemos el pulso puede resultar bastante sencillo.

Universidades Públicas de Andalucía

Se llama **variable aleatoria** a cualquier función numérica definida sobre el espacio muestral. Supongamos, por ejemplo, que lanzamos 6 monedas. El número de caras obtenidas se consideraría una variable aleatoria que podría tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Las variables aleatorias se pueden clasificar en función de los valores que pueda tomar:

- Diremos que una variable aleatoria es **discreta** si los valores que toma son números enteros. Por ejemplo, el número de caras obtenidas.

- Llamaremos variable aleatoria **continua** a la que toma valores en un intervalo de números reales. Por ejemplo, la duración de una llamada.

La probabilidad de que una variable aleatoria X tome el valor k es la suma de las probabilidades de aquellos sucesos elementales en los que el resultado es k. La manera como se reparten las probabilidades para los distintos valores de k se llama distribución de probabilidad de la variable aleatoria.

Importante

Llamaremos **distribución** de una variable aleatoria discreta X al conjunto formado por los valores que toma x_i y de las probabilidades de que ocurran cada uno de ellos p_i.

Estas probabilidades, $p_i = p(X = x_i)$, también reciben el nombre de **función de probabilidad**, y cumplen las siguientes propiedades:

1. Son siempre positivas, es decir $p_i \geq 0$.

2. La suma de todas es igual a 1.

Ejercicio resuelto

Realizamos el experimento aleatorio de sacar dos cartas de una baraja española con reemplazamiento, y definimos la siguiente variable aleatoria X = "número de oros que obtenemos".

Contesta a las siguientes cuestiones:

a. Describe los valores x_i que puede tomar la variable X.

b. Determina el espacio muestral, E.

c. Calcula la función de probabilidad, $p_i = p(X = x_i)$, de la variable X.

Mostrar retroalimentación

a) Posibles valores de X son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$, es decir, 0, 1, o 2 oros respectivamente.

b)

	Oros	Copas	Espadas	Bastos
Oros	**OO**	**OC**	**OE**	**OB**
Copas	**CO**	**CC**	**CE**	**CB**
Espadas	**EO**	**EC**	**EE**	**EB**
Bastos	**BO**	**BC**	**BE**	**BB**

c) Para calcular la función de probabilidad, $p(X=x_i)$, de la variable, debemos observar que:

$X = x_1 = 0$ cuando ocurre el suceso {CC, EC, BC, CE, EE, BE, CB, EB, BB}.

$X = x_2 = 1$ cuando ocurre el suceso {CO, EO, BO, OC, OE, OB}.

$X = x_3 = 2$ cuando ocurre el suceso {OO}.

Por tanto, la función de probabilidad es:

$$p_1 = p(X = x_1) = p(X = 0) = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$

$$p_2 = p(X = x_2) = p(X = 1) = \frac{6}{16} = 0{,}375$$

$$p_3 = p(X = x_3) = p(X = 2) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

Importante

En una variable aleatoria discreta X, definiremos la **función de distribución** asociada a ella como:

$$F(x) = p(X \le x)$$

que asocia a cada número x , la probabilidad acumulada hasta él.

A continuación, vamos a definir dos distribuciones discretas.

Distribución de Bernoulli

Si en un experimento aleatorio únicamente nos interesara si ha ocurrido o no un determinado suceso A , de probabilidad p , podríamos definir una variable aleatoria X que asignara el valor 1 (E=éxito) a cada elemento de A y 0 (F=fracaso) si el elemento no pertenece a A .

La función de probabilidad de dicha variable aleatoria, llamada distribución de Bernoulli sería:

$$\boxed{\begin{cases} P(X=1) = P(\text{" éxito "}) = p \\ P(X=0) = P(\text{" fracaso "}) = 1 - p = q \end{cases}}$$

En la experiencia del ejercicio resuelto anterior, podemos considerar el éxito como sacar dos oros, por tanto $p = 0{,}0625$ y la distribución será $Be(0{,}0625)$.

Sus parámetros son:

- Esperanza matemática: $\mu = p$.
- Varianza: $\sigma^2 = p \cdot q$.
- Desviación típica: $\sigma = \sqrt{p \cdot q}$

Distribución Binomial

Al repetir n veces un mismo experimento de Bernoulli el número de éxitos X define una variable aleatoria que puede tomar los valores $0, 1, \cdots, n$.

La distribución de probabilidad de dicha variable X se llama **distribución Binomial** y se designa por $B(n, p)$ donde n es el número de veces que se repite el experimento y p la probabilidad de éxito de la distribución de Bernoulli.

Importante

Diremos entonces que una distribución X es binomial, si cumple las siguientes características.

1. Es un experimento aleatorio que se repite n veces de modo independiente.
2. Cada vez que se realiza el experimento solo pueden darse dos sucesos al estilo de la Bernoulli, éxito o fracaso.
3. La suma de las probabilidades del éxito y fracaso debe ser 1. Normalmente p es la probabilidad del suceso éxito, y $q = 1 - p$ la del suceso fracaso. La distribución la denotaremos por X es $B(n, p)$.

Su **función de probabilidad** es:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

donde k es el número de éxitos de los queremos conocer la probabilidad. Por tanto k puede tomar los valores $0, 1, 2, \cdots, n$.

Nota: Te recordamos que $\binom{n}{k}$ representa el número combinatorio de n sobre k .

En el siguiente vídeo de youtube de juanmemol, se presentan varios ejemplos de cálculo de probabilidades asociadas a variables aleatorias que siguen distribuciones binomiales.

Si X es una variable aleatoria binomial, $B(n\,,\,p)$, tendremos que:

- Su esperanza matemática o media es $\mu = n \cdot p$.
- La varianza es $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$.
- Y la desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

Importante

Pensando en la prueba...

Las actividades sobre cálculo de probabilidades con variables aleatorias que se distribuyen según una normal son muy frecuentes en la prueba, por eso junto con el examen siempre viene adjunta la tabla necesaria para ello. Por este motivo es imprescindible:

- Saber calcular probabilidades con la normal estándar $N(0\,,1)$.
- Calcular probabilidades distintas de las que te da directamente la tabla, ya sea tipificando una normal de media μ y desviación típica σ, recurriendo al contrario...

Ya vimos en el tema anterior que una variable aleatoria es continua si al realizar el experimento aleatorio, entre cada dos valores, el número de valores que puede tomar es infinito. Por ejemplo, la altura de una persona, la longitud del dedo índice, el peso de un perro o el caudal de un río...

Importante

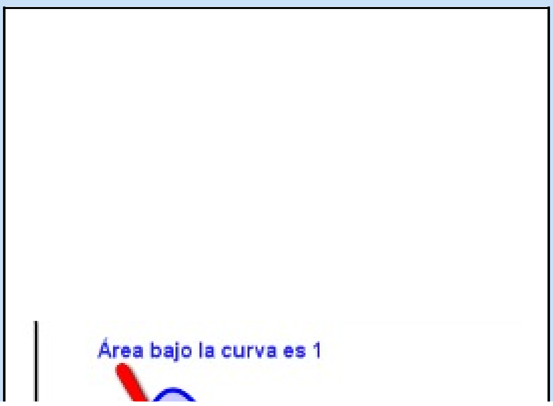
Una variable aleatoria continua X queda determinada por una función f que llamaremos **función de probabilidad** o **función de densidad.**

f debe ser siempre mayor o igual que cero y el área debajo de su gráfica tiene que ser 1.

La probabilidad estará definida como el área delimitada por la gráfica de f y el eje horizontal.

En el caso de $X=a$, dicha probabilidad es cero $p(X=a)=0$, ya que no se encierra ningún área.

Para un intervalo, la $p(a\leq X\leq b)$ será igual al área que hay bajo la gráfica de f en el intervalo $[a\,,b]$.



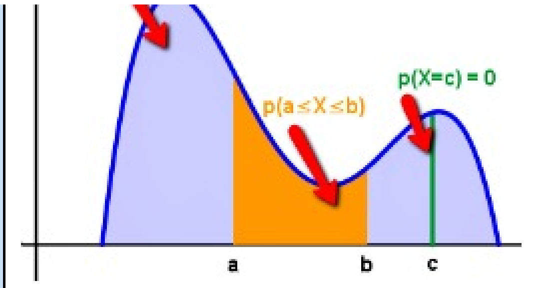
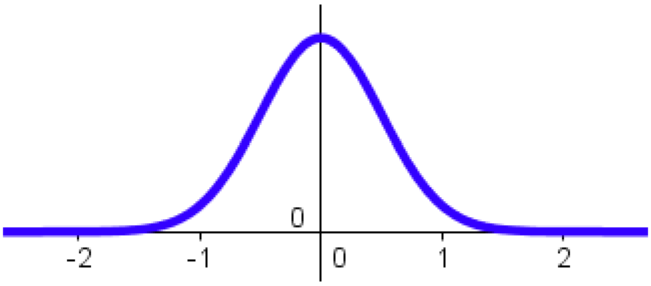


Imagen de elaboración propia

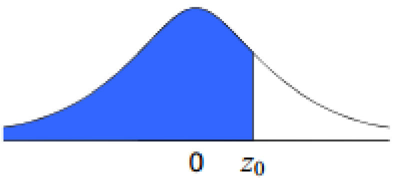
Del mismo modo que entre las variables discretas hemos introducido el modelo binomial, entre las variables continuas vamos a introducir un modelo al que se ajusta un gran número de variables de nuestro entorno. Este modelo se va a llamar distribución Normal, y su nombre se debe ni más ni menos a que la gran mayoría de variables que se refieren a aspectos físicos, psicológicos, sociológicos, biológicos, etc. se ajustan a este modelo, o sea, que lo normal, es que sea una variable Normal.

La distribución Normal se expresa por $N(\mu, \sigma)$, donde el primer parámetro μ, representa la media de la variable aleatoria y σ la desviación típica, y la representación de su función de densidad es una campana de Gauss:

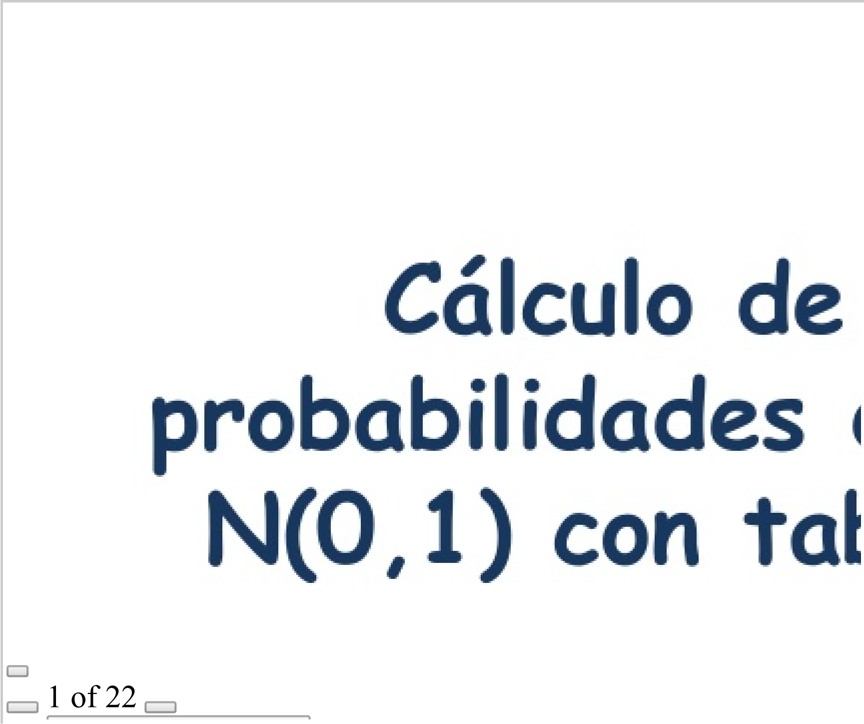


En el caso particular de que la sea media 0 y desviación típica 1, es decir, $N(0, 1)$, la llamamos **distribución Normal estándar** y la designamos por Z.

Esta distribución Normal estándar la utilizaremos para calcular probabilidades de variables aleatorias que se distribuyen según una Normal, independientemente de su media y su desviación. Pero antes de dar este paso hay que saber cómo calcular las probabilidades asociadas a esa Normal estándar, para lo que utilizaremos una tabla donde se recoge $p(Z \leq z_0)$ con $z_0 \geq 0$, que es el área encerrada debajo de la campana de Gauss para valores inferiores a z_0:



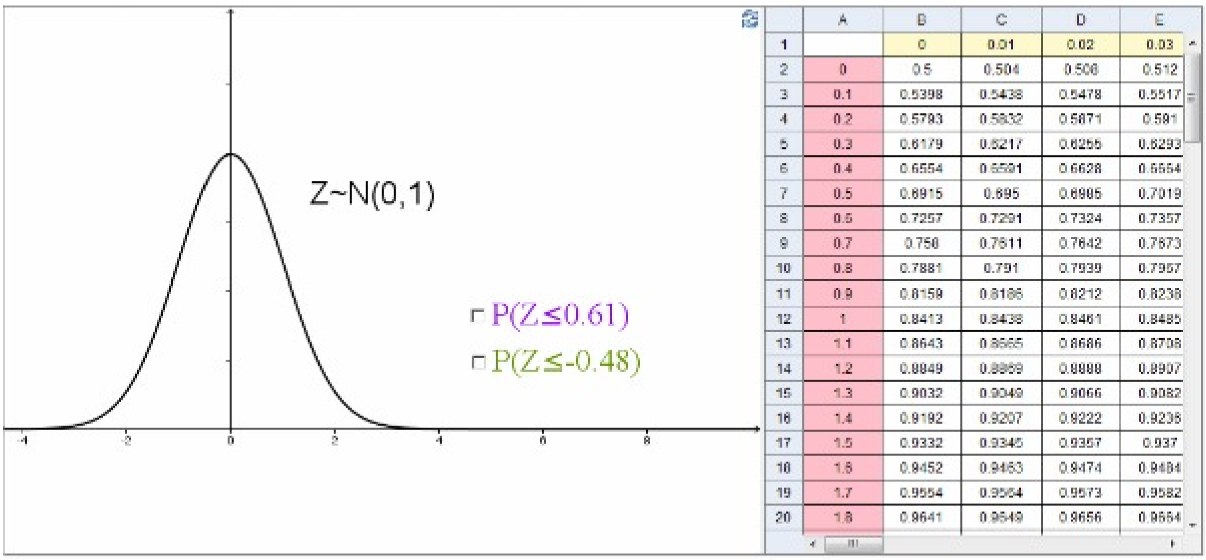
La siguiente presentación te será muy útil para aprender el manejo de dicha tabla:



Resumiendo para calcular la $p(Z\leq a)$ con $Z\sim N(0,1)$ y $a\geq 0$, solo debemos acudir a la tabla. Pero, ¿qué ocurre cuando aún distribuyéndose según una $N(0,1)$ queremos averiguar $p(Z\geq a)$ o $P(Z\leq a)$ con $a<0$, incluso la combinación de ambas cosas?

$p(Z\geq a)=1-p(Z<a)$
$p(Z\leq -a)=p(Z\geq a)=1-p(Z<a)$
$p(Z\geq -a)=p(Z\leq a)$
$p(a\leq Z\leq b)=p(Z\leq b)-p(Z<a)$

Para memorizar estas "fórmulas" solo tienes que racionalizarlas, recurriendo a su interpretación geométrica. A esto te puede ayudar la siguiente escena de Geogebra que además está acompañada de la **tabla de la distribución normal**, para que contrastes los resultados.



Haz clic en la imagen para abrir la escena

Por último, en el caso en el que no trabajemos con la Normal estándar, sino que nos den una media μ distinta de 0 o una desviación típica σ distinta de 1, tendremos que recurrir a la tipificación de la variable X . Este proceso consistirá en convertir una variable X que se distribuye según una Normal $N(\mu,\sigma)$ en una Normal estándar Z , para lo que restaremos μ a la variable X y dividiremos entre σ , esto es:

Si $X \sim N(\mu,\sigma)$ entonces $Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Puedes practicar este proceso con las siguientes actividades de pruebas anteriores:

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

En un colegio se estudia la distribución de la nota de Matemáticas de sus estudiantes, resultando ser una Normal de media 7.2 y desviación típica 1.2. Se elige al azar un estudiante de ese colegio, ¿cuál será la probabilidad de que su nota en esta asignatura sea mayor que 7.5?

Mostrar retroalimentación

Sea X ="nota de la asignatura de Matemáticas". Sabemos que $X \sim N(7.2\,,1.2)$

Para resolver el problema que se nos plantea tenemos que hallar la $p(X>7.5)$.

Hagamos el cambio de variable $Z=\frac{X-7.2}{1.2}$, y tendremos que Z es la Normal estándar.

Realicemos las operaciones necesarias con el cambio anterior:

$$p(X>7.5)=p(\frac{X-7.2}{1.2}>\frac{7.5-7.2}{1.2})=p(Z>0.25)$$

Como el área debajo de la gráfica de la normal es 1, tenemos que:

$$p(Z>0.25)=1-p(Z\leq 0.25)$$

Buscamos en la tabla y obtenemos que:

$$p(X>75)=p(Z>0.25)=1-p(Z\leq 0.25)=1-0.5987=0.4013$$

Por lo que la probabilidad de que la nota sea mayor que 7.5 es de un 40.13 por ciento.

Ejercicio resuelto

Curso 2010/2011

El peso de las manzanas que se producen en una huerta sigue una ley Normal con una media de 150 gramos y desviación típica de 20 gramos.

a) ¿Qué porcentaje de estas manzanas tendrá un peso inferior a 115 gramos?

b) Halla la probabilidad de que una manzana, elegida al azar en este huerto, tenga un peso que se encuentre entre 165 y 220 gramos?

Mostrar retroalimentación

Sea X ="peso de las manzanas"

$X \sim N(150\,,20)$, y se nos plantean dos cuestiones $p(X<115)$ y $p(165<X<220)$.

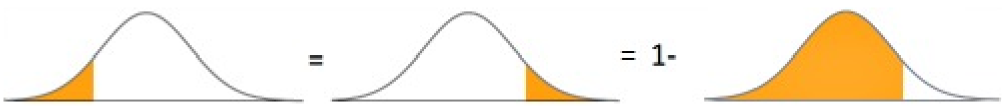
Realizamos el cambio de variable $Z=\frac{X-150}{20}$, por tanto $Z \sim N(0\,,1)$.

a) Operamos:

$$p(X<115)=p(\frac{X-150}{20}<\frac{115-150}{20})=p(Z<-1.75)\ .$$

Ahora bien, esa probabilidad no viene en las tablas, pero gracias a ls propiedades de esta distribución, tenemos que:

$$p(Z<-1.75)=p(Z>1.75)=1-p(Z\leq 1.75)$$



En la imagen se explica gráficamente lo que se ha hecho.

Buscamos en las tablas, y obtenemos $p(Z<1.75)=0.9599$.

Por tanto $p(X<115)=1-p(Z<1.75)=1-0.9599=0.0401$.

Luego el porcentaje de manzanas que pesa menos de 115 gramos es del 4 %.

b) Resolvamos la segunda cuestión que se nos plantea: $p(165<X<220)$.

Haciendo el cambio de variable, tenemos que:

$$p(165<X<220)=p(\frac{165-150}{20}<\frac{X-150}{20}<\frac{220-150}{20})=p(0.75<Z<3.5)\ .$$

Aplicando las propiedades de la probabilidad, tenemos que:

$$p(0.75<Z<3.5)=p(Z<3.5)-p(Z<0.75)=0.99977-0.7734=0.2263\ .$$

Lo que quiere decir que el 22.63 % de las manzanas pesan entre 165 y 220 gramos.

Ejercicio resuelto

Curso 2011/2012

La duración de un tipo de pilas alcalinas sigue una distribución Normal de media 55 horas y una desviación típica de 6 horas.

a) Calcula la probabilidad de que una pila elegida al azar dure más de 53 horas.

b) Halla la probabilidad de que una pila elegida al azar dure entre 56 y 58 horas.

Mostrar retroalimentación

Sea X ="duración de las pilas alcalinas"

Estamos ante una variable $X \sim N(55, 6)$.

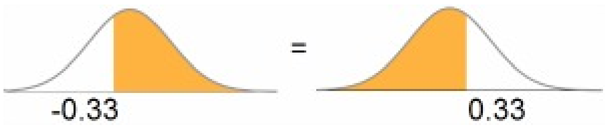
En primer lugar realizamos el cambio de variables para obtener una Normal estándar: $Z = \frac{X-55}{6} \sim N(0, 1)$.

a) Veamos en primer lugar $p(X>53)$.

Tenemos que $p(X>53) = p(\frac{X-55}{6} > \frac{53-55}{6}) = p(Z>-0.33)$.

Gracias a la simetría de la distribución Normal tenemos que:

$$p(Z>-0.33) = p(Z<0.33)$$



Por último, y con la ayuda de las tablas, obtenemos que:

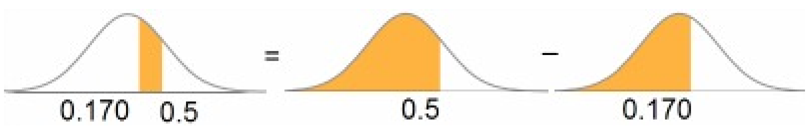
$p(X>53) = p(Z<0.33) = 0.6304$, lo que quiere decir que el 63 % de las pilas dura más de 53 horas.

b) Veamos ahora la $p(56<X<58)$.

Tipificando tenemos que:

$p(56<X<58) = p(\frac{56-55}{6} < \frac{X-55}{6} < \frac{58-55}{6}) = p(0.17<Z<0.5)$, y aplicando las propiedades de la probabilidad:

$$p(0.17<Z<0.5) = p(Z<0.5) - p(Z<0.17)$$



Haciendo uso de las tablas:

$p(0.17<Z<0.5) = p(Z<0.5) - p(Z<0.17) = 0.6915 - 0.5675 = 0.124$.

Lo que implica que el 12.4 % de las pilas duran entre 56 y 58 horas.