



**Preparación Acceso a
CFGS**

Física

Contenidos

Fuerzas y movimientos: Movimiento circular

1. Cinemática del movimiento circular

La trayectoria de un móvil sabemos que puede tener formas muy diversas. Hasta ahora hemos estudiado el caso más simple de trayectoria, la rectilínea. Ahora vamos a dar un paso más y vamos a estudiar de entre los movimientos cuya trayectoria no es recta, el más sencillo de todos. ¿Sabes a qué movimiento nos referimos?



Algunos derechos reservados por robokow

Pues sí, nos referimos al movimiento circular. Estamos seguros de que si haces un poco de memoria podrás recordar muchos movimientos en los que la trayectoria es una circunferencia o parte de ella. Desde el movimiento de las manecillas de un reloj, hasta la noria que ves en la fotografía pasando por la rueda de una bicicleta. En todos estos casos hay un punto del objeto que se mueve manteniendo fija su distancia a otro punto. En los ejemplos que te acabamos de comentar ese punto sobre el que se gira es el eje del reloj, de la rueda o de la noria.

Importante

Decimos que un objeto se mueve con un movimiento circular si su trayectoria es una circunferencia.

En este tema vamos a estudiar de entre los movimientos circulares, el más sencillo de todos. Se trata del movimiento circular uniforme (en adelante MCU) que se caracteriza por tener una velocidad angular constante. Pero no adelantemos acontecimientos.

Comprueba lo aprendido

Un movimiento circular es aquel en el que la trayectoria es una curva.

Sugerencia

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

No. Hay curvas que no son circunferencias y no estarían dentro de esta categoría.

Un movimiento circular es un tipo particular de movimiento curvilíneo.

[Sugerencia](#)

☒ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Claro, la circunferencia es un tipo particular de curva.

El MCU además de tener una trayectoria en forma de circunferencia, tiene una velocidad constante.

[Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☒ Falso

Falso

No. Veremos que tiene una velocidad angular constante pero su velocidad lineal varía precisamente por llevar una trayectoria no recta.

1.1 La posición en los móviles que giran

¿Cómo podemos saber dónde se encuentra en un momento concreto un móvil que lleva movimiento circular? Si sabemos situar un punto en el plano, la tarea es sencilla. Recuerda que el vector de posición se puede expresar en función de sus componentes cartesianas.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

En este caso, el móvil se mantiene siempre a una distancia r del centro de giro, precisamente el radio de la circunferencia que describe. Por eso en este caso particular de trayectoria circular, es más útil utilizar las coordenadas polares. La posición en coordenadas polares se describe utilizando la distancia del punto al origen de coordenadas y el ángulo que forma dicho vector de posición con la parte positiva del eje x .

Ambas descripciones guardan relación. Podemos pasar de las coordenadas " x " e " y " a las coordenadas polares " r " y " θ " (se lee teta según la Real Academia de la Lengua) y viceversa. Para ello necesitamos recordar las definiciones de seno y coseno. Tanto el seno como el coseno son razones trigonométricas.

$$\cos\theta = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

De este modo usando las expresiones anteriores podemos determinar las coordenadas x e y conociendo r y θ :

$$x = r \cdot \cos\theta$$

$$y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$$

O al revés, conociendo r y θ podemos determinar x e y :

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$



Importante

La unidad de ángulo en el Sistema Internacional es el *radián*.

En la descripción de los movimientos circulares también se suelen emplear otras unidades como el *grado sexagesimal* o la *revolución* (vuelta).

Simulación de [Jesús Peñas](#) bajo licencia Creative Commons

Ejercicio resuelto

Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

1. $\frac{\pi}{2}$ rad
2. $\frac{3\pi}{2}$ rad
3. $\frac{\pi}{6}$ rad
4. $\frac{5\pi}{4}$ rad

Mostrar retroalimentación

Para calcularlo podemos hacer una regla de tres o bien usar la técnica del factor de conversión. Vamos a ver cómo se haría usando el factor de conversión.

1. $\frac{\pi}{2} \text{ rad} \times \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$
2. $\frac{3\pi}{2} \text{ rad} \times \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{1080^\circ}{4} = 270^\circ$
3. $\frac{\pi}{6} \text{ rad} \times \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{1080^\circ}{14} = 30^\circ$
4. $\frac{5\pi}{4} \text{ rad} \times \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \frac{1800^\circ}{8} = 225^\circ$

En una calculadora científica es muy fácil calcular el seno y el coseno de un ángulo. Por ejemplo imagina que queremos calcular el seno y el coseno de 60° .

Para calcular el seno basta con escribir 60 y luego pulsar la tecla sin. Del mismo modo, pero pulsando la tecla cos, se calcula el coseno.

¿Y al revés? Si sé que el seno de un ángulo θ es 0,25, ¿cómo puedo calcular dicho ángulo? Pues basta con escribir 0,25 en tu calculadora y luego pulsar las teclas INV y sin sucesivamente.

Ejercicio resuelto

Supongamos que tenemos rueda de una bicicleta cuyo radio mide 50 cm. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas y polares de los puntos marcados en la fotografía? Estima aproximadamente los ángulos a partir de la fotografía.





Algunos derechos reservados por José Antonio Galloso

Mostrar retroalimentación

Podemos estimar aproximadamente el ángulo que forma el vector posición de cada uno de esos puntos. De esta forma las coordenadas polares serían:

Punto	Radio (r)	Ángulo(θ)
A	0,5m	0°
B	0,5m	30°
C	0,5m	90°
D	0,5m	$90+45=135^\circ$
E	0,5m	$270+30=300^\circ$

Para calcular las coordenadas cartesianas basta con calcular el seno y el coseno de cada uno de los ángulos y multiplicar el resultado por el radio r.

Punto	x(m)	y(m)
A	$0,5 \cdot \cos 0 = 0,5$	$0,5 \cdot \sen 0 = 0$
B	$0,5 \cdot \cos 30 = 0,43$	$0,5 \cdot \sen 30 = 0,25$
C	$0,5 \cdot \cos 90 = 0$	$0,5 \cdot \sen 90 = 0,5$
D	$0,5 \cdot \cos 135 = -0,35$	$0,5 \cdot \sen 135 = 0,35$
E	$0,5 \cdot \cos 300 = 0,25$	$0,5 \cdot \sen 300 = -0,43$

Importante

Dado que la distancia al centro de giro se mantiene fija en los **movimientos circulares**, vamos a utilizar coordenadas polares para describirlo. Daremos la distancia al centro y el ángulo entre el lado positivo del eje x y el vector de posición de nuestro móvil

ángulo entre el lado positivo del eje x y el vector de posición de nuestro móvil.

1.2 La velocidad en los móviles que giran

Simulación de [Jesús Peñas](#) bajo licencia Creative Commons

Observa los dos móviles de la animación. ¿Describen el mismo tipo de movimiento? Ambos describen una trayectoria circular pero, ¿qué ocurre con su velocidad? Si te fijas el de la derecha da vueltas siempre al mismo ritmo mientras que el de la izquierda unas veces va más rápido y otras más lento, incluso se para y cambia de sentido.

El engranaje de la derecha tiene un MCU mientras que el de la izquierda es un movimiento circular variado.

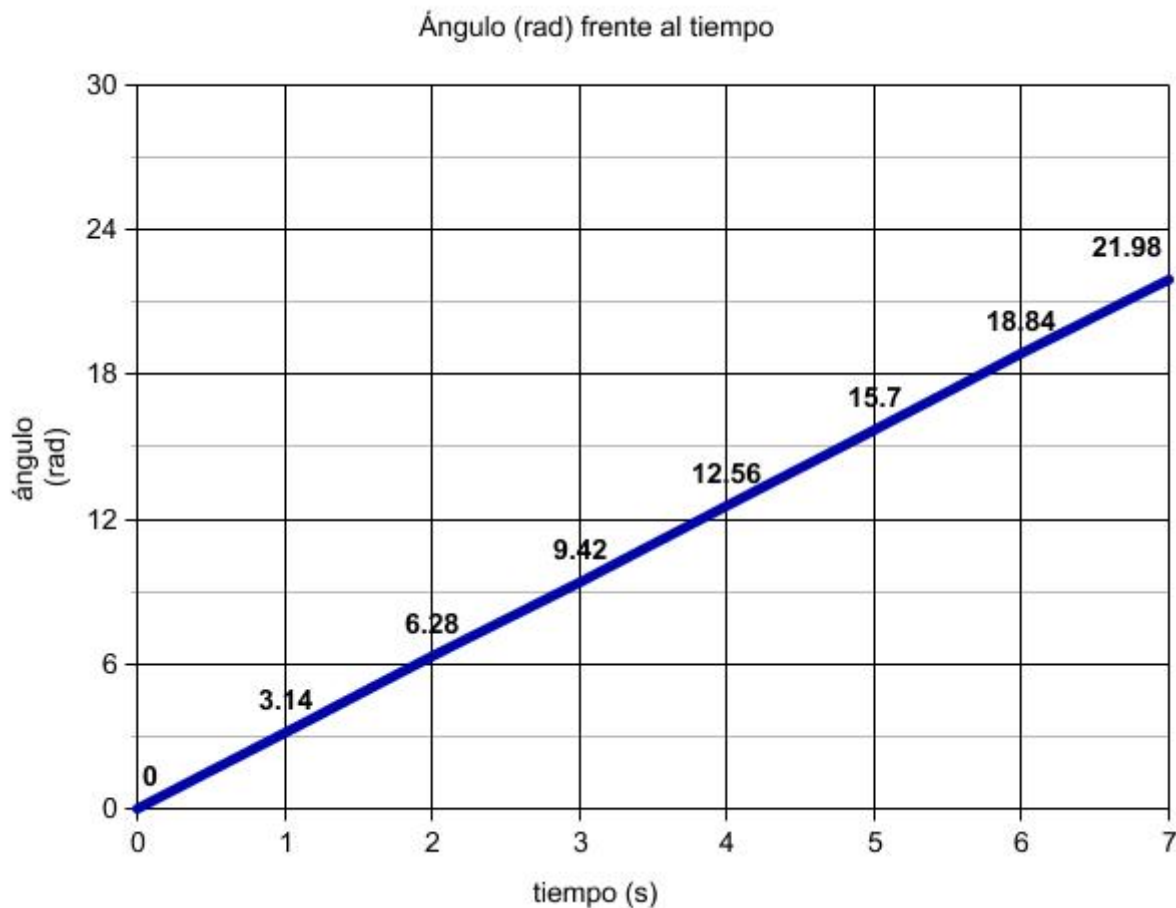
Observa con el siguiente simulador el movimiento de un cuerpo con velocidad angular constante. Modifica el radio de la trayectoria y la velocidad angular para observar distintos movimientos.

Simulación de [Jesús Peñas](#) bajo licencia Creative Commons

Haciendo pruebas con el simulador anterior hemos tomado nota del ángulo (medido en radianes) en diferentes momentos.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Ángulo (rad)	0,0	3,14	6,28	9,42	12,56	15,70	18,84	21,98	25,12

Si observas cómo va cambiando el ángulo te darás cuenta de que lo hace a un ritmo constante. Representando el ángulo frente al tiempo podemos comprobarlo definitivamente.



Está claro que en este caso el ritmo de cambio del ángulo es constante y precisamente a eso le debe el nombre el movimiento circular uniforme. Pero, ¿qué magnitud medirá el cambio en el ángulo? La velocidad angular que se mide en radianes por segundo.

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

En el caso de nuestros datos, obtenemos un valor constante de 3,14 rad/s para la velocidad angular cualquiera que sea el intervalo de tiempo que seleccionemos.

Dado que en los MCU la velocidad angular es constante, podemos calcular el ángulo recorrido en un cierto tiempo operando en la ecuación anterior:

$$\theta(t_2) - \theta(t_1) = \omega \cdot (t_2 - t_1)$$

Si empezamos a estudiar el movimiento con el cronómetro a cero segundos y sustituimos t_2 por t ,

$$\theta(t) - \theta_o = \omega \cdot (t - 0)$$

$$\theta(t) = \theta_o + \omega \cdot t$$

La ecuación de la velocidad angular en un MCU es:

$$\theta(t) = \theta_o + \omega \cdot t$$

que recuerda mucho a la ecuación velocidad de un MRU pero ahora el papel de las posiciones lo juegan los ángulos y la velocidad angular ha sustituido a la velocidad. Más adelante veremos si existe alguna relación entre estas magnitudes angulares y lineales.

Importante

¿Es la velocidad constante en un MCU?

Ya sabemos que la velocidad de un móvil es una magnitud vectorial y por tanto no basta para describirla con dar el espacio recorrido cada segundo sino que necesitamos indicar la dirección y el sentido con que se mueve. Es decir, la velocidad tiene dos componentes: por un lado su módulo que indica cómo de rápido se mueve el objeto y por otro la dirección y sentido.

En un MRU sabemos que no cambia el módulo de la velocidad porque siempre se mueve con el mismo ritmo y además como la trayectoria es recta, la componente vectorial tampoco. Podemos decir que en un MRU la velocidad, tanto en módulo como en dirección y sentido es constante.

En un MCU sabemos que no cambia el ritmo con que da vueltas pero al describir una circunferencia, la dirección y el sentido cambian continuamente. Por lo tanto, estrictamente la velocidad no es constante es un MCU y cuando decimos que es uniforme queremos decir que el módulo de la velocidad no varía.

Comprueba lo aprendido

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- ☒ En un MCU, el módulo de la velocidad lineal es constante.

Sugerencia

- ☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Muy bien. Efectivamente porque en tiempos iguales recorre distancias iguales.

- ☒ En un MCU, el vector velocidad varía.

Sugerencia

- ☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Efectivamente, varía porque aunque no varíe su módulo sí lo hace su dirección y sentido.

- ☒ En un MCU, la velocidad angular es variable.

Sugerencia

- ☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

No, es constante porque en tiempos iguales se describen ángulos iguales.

1.3 La aceleración en los móviles que giran

Hemos indicado anteriormente que la velocidad tiene carácter vectorial. Como tal vector podemos distinguir en ella su módulo y la dirección y el sentido. Cuando la velocidad de un objeto varía con el tiempo puede hacerlo bien porque varíe el módulo, porque varíe la dirección y sentido del movimiento o porque varíen ambos aspectos.

Ya sabemos que la magnitud que mide la variación de la velocidad es la aceleración. Es posible definir la aceleración como suma de otras dos:

1. La **aceleración tangencial** (a_t) que informa del cambio en el módulo de la velocidad.
2. La **aceleración normal** (a_n) que informa del cambio en la dirección y en el sentido de la velocidad.

En el siguiente cuadro resumimos qué valor tendría cada una de estas dos componentes de la velocidad en los movimientos que hemos estudiado hasta ahora y en el MCU.

Tipo de movimiento	Aceleración tangencial	Aceleración normal	Aceleración
Reposo	0	0	0
MRU	0	0	0
MRUA	$\neq 0$	0	$\neq 0$
MCU	0	$\neq 0$	$\neq 0$

En un MCU, lógicamente la aceleración tangencial es nula porque no varía el ritmo con el que gira el móvil (siempre da las mismas vueltas por segundo). Sin embargo la normal es distinta de cero puesto que la dirección y el sentido cambian constantemente para dibujar la trayectoria circular.

Ejercicio resuelto

Piensa en un movimiento circular pero en el que la velocidad angular varía con el tiempo. ¿Serán nulas las componentes tangencial y vectorial de la aceleración?

Mostrar retroalimentación

Como en este movimiento la trayectoria es circular, el sentido y la dirección de la velocidad varían con el tiempo. Por lo tanto la aceleración normal es no nula.

Como la velocidad de giro también varía, el objeto va unas veces más rápido que otras, estará cambiando el módulo de la velocidad. Por lo tanto su aceleración tangencial es no nula.

Del mismo modo que en su momento definimos la aceleración lineal como el ritmo del cambio de la velocidad, podemos definir una magnitud que mida el cambio en la velocidad angular.

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

Como la velocidad angular se mide en radianes por segundo, la aceleración angular se mide en radianes por segundo cada segundo, o lo que es lo mismo en radianes por segundo al cuadrado.

En el siguiente apartado veremos que esta aceleración guarda una relación con la aceleración tangencial.

En el caso de un MCU esta aceleración es nula puesto que la velocidad angular se mantiene constante.

Del mismo modo que dedujimos la ecuación velocidad-tiempo para los MRUA, ahora podríamos hacer lo propio con la velocidad angular. Basta despejar de la definición de aceleración angular.

$$\alpha \cdot (t_2 - t_1) = \omega_2 - \omega_1$$

Si consideramos que en el instante inicial nuestro crónometro estaba puesto a cero,

$$\alpha \cdot (t - 0) = \omega - \omega_0$$

$$\omega_0 + \alpha \cdot t = \omega$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

Puedes observar el parecido de esta ecuación con la ecuación velocidad-tiempo de los MRUA. En lugar de velocidades aparecen velocidades angulares y en lugar de la aceleración, la aceleración angular.

1.4 Magnitudes lineales y angulares

Vamos a mostrar a modo de resumen las ecuaciones de los diferentes movimientos que hemos estudiado hasta ahora así como las de los MCU y del movimiento circular uniformemente variado. Podrás observar que son muy similares.

Movimiento rectilíneo y uniforme	Movimiento circular uniforme.
$x = x_0 + v_0 \cdot t$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t$
$v_x = v_0$	$\omega = \omega_0$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado	Movimiento circular uniformemente acelerado
$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$
$v_x = v_0 + a \cdot t$	$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$

Una partícula cuando se mueve sobre una circunferencia describe un ángulo θ pero también recorre un espacio sobre su trayectoria. ¿Existe alguna relación entre ambas magnitudes? Sí y es muy sencilla de obtener. Vayamos a un caso particular. Imagina que el móvil ha dado una vuelta completa. El espacio que habrá recorrido es justo la longitud de la circunferencia, es decir:

$$e = 2\pi \cdot r$$

Como vemos el espacio es el producto del ángulo completo por el radio. Si en vez de haber dado una vuelta completa, hubiera dado media entonces el espacio recorrido sería:

$$e = \pi \cdot r$$

De nuevo el producto del ángulo correspondiente a media circunferencia por el radio. En el caso de que se haya batido un ángulo θ cualquiera, el espacio recorrido será:

$$e = \theta \cdot r$$

Esta misma relación se da entre las velocidades y las aceleraciones:

$$v = \omega \cdot r$$

En el caso de la aceleración podemos distinguir entre la tangencial y la normal:

$$a_t = \alpha \cdot r$$

$$a_n = \omega^2 \cdot r$$

Ejercicio resuelto





Algunos derechos reservados por swisscan

Un tractor se mueve con velocidad constante de 5 m/s en línea recta.

1. ¿Qué tipo de movimiento lleva un punto de la cubierta del neumático de una de sus ruedas?
2. Si las ruedas traseras tienen un diámetro 1,60 metros , ¿con qué velocidad angular girarán?
3. ¿Y las ruedas delanteras si su diámetro es de 1 metro?
4. Mientras las ruedas traseras dan una vuelta, ¿cuántas vueltas dan las ruedas delanteras?

Mostrar retroalimentación

Supondremos que las ruedas de nuestro tractor no patinan ya que si patinasen no podríamos resolver el problema. En este caso, para que el tractor avance, las ruedas tienen que girar y cuanto más rápido lo hagan más rápido se desplazará el tractor. Piensa por un momento en el punto del contorno de una de las ruedas que toca el suelo. Al girar hacia atrás el tractor avanza hacia delante. El espacio que recorre ese punto de la rueda es el mismo que recorre el tractor. Por lo tanto la velocidad lineal de un punto del contorno de la rueda, coincide con la velocidad del tractor. Como la velocidad del tractor es constante, la velocidad lineal de los puntos del contorno de la rueda también. Esto quiere decir que esos puntos se mueven por una circunferencia a un ritmo constante. En otras palabras, se mueven con un MCU.

Claro que si conocemos la velocidad lineal de un punto del contorno de la rueda, ya podemos junto con el radio, calcular la velocidad angular. Es lógico que la rueda delantera al ser más pequeña tenga que girar más rápido. Veamos si los cálculos nos dan la razón.

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Como los radios de las ruedas traseras y delanteras son respectivamente 0,80 m y 0,50, las velocidades angulares serán:

$$\omega_t = \frac{v}{r_t} = \frac{5\text{m/s}}{0,80\text{m}} = 6,25\text{rad/s}$$

$$\omega_d = \frac{v}{r_d} = \frac{5\text{m/s}}{0,50\text{m}} = 10\text{rad/s}$$

Efectivamente la rueda delantera gira más deprisa.

Para responder al último apartado tenemos que hacer uso de la ecuación ángulo-tiempo para un MCU:

$$\theta = \omega \cdot t$$

Queremos saber las vueltas que da la rueda delantera mientras da una vuelta la rueda trasera. Tenemos dos ecuaciones, una para cada rueda.

$$\theta_d = \omega_d \cdot t$$

$$\theta_t = \omega_t \cdot t$$

Las velocidades angulares las conocemos y el ángulo recorrido por la rueda trasera también, el que corresponde a una vuelta completa, es decir, 2π radianes. Si sustituimos estos datos tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\theta_d = 10 \cdot t$$

$$2\pi = 6,25 \cdot t$$

De la segunda ecuación podemos despejar el tiempo y sustituirlo en la primera para saber qué ángulo gira la rueda delantera:

$$2\pi = 6,25 \cdot t$$

1.5 Movimiento circular uniforme



Algunos derechos reservados por [The Knowles Gallery](#)

En el caso de un movimiento circular uniforme, en el que la velocidad angular no cambia, podemos definir dos magnitudes que pueden ayudarnos a describir el movimiento.

El período es el tiempo que invierte un objeto que describe un MCU en dar una vuelta completa. Se mide en segundos y se representa por una T.

La frecuencia es el número de vueltas por segundo que da un objeto que se mueve siguiendo un MCU. Se mide en ciclos por segundo o Hertzios y se representa por la letra f.

Por la forma es que están definidas, período y frecuencia son una la inversa de la otra:

$$f = \frac{1}{T}$$

La velocidad angular se puede expresar en función de la frecuencia y del periodo. Como el período es el tiempo que tarda un objeto en dar una vuelta, la velocidad angular de ese objeto será:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Usando la relación entre frecuencia y periodo también podemos escribir que:

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

Comprueba lo aprendido triple

Determina con el simulador la velocidad angular si el periodo del movimiento es 3s y señala la respuesta correcta:

- ☐ 2.09 rad/s
- ☐ 0.69 rad/s
- ☐ 1 rad/s

Correcto.

Incorrecto. El periodo de ese movimiento es 9 s.

Incorrecto. El periodo de ese movimiento es 6,26 s.

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

La posición de este móvil quedará perfectamente descrita si damos la distancia al eje de giro (r) y el ángulo que forma el vector de posición y eje x (su parte positiva concretamente). Este ángulo varía con el tiempo según la ecuación:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t$$

En este caso particular de movimiento circular, no cambia el módulo de la velocidad, sólo lo hace su dirección y sentido.

$$\omega = \frac{|\vec{v}|}{r} = \frac{v}{r} = cte \quad \alpha = 0$$

Por eso la aceleración tangencial es cero pero la normal no.

$$a_t = \alpha \cdot r = 0$$

$$a_n = \omega^2 \cdot r$$

Ejercicio resuelto



Algunos derechos reservados por Johan J. Ingles-Le Nobel

Sabiendo que la distancia entre la Tierra y Luna es de 384000 Km y que tarda en dar una vuelta alrededor de la Tierra 27 días 7 horas y 43 minutos, calcula:

1. El período y la frecuencia de giro.
2. La velocidad angular.
3. La velocidad lineal.
4. La aceleración angular y normal.
5. El ángulo rotado durante un día.

Nota: supón que el movimiento de la Luna es un MCU.

Mostrar retroalimentación

El período es uno de los datos pero debemos pasarlo a segundos.

$$T = 27d7h43min = 27d \cdot \frac{24h}{1d} \cdot \frac{3600s}{1h} + 7h \cdot \frac{3600s}{1h} + 43 \cdot \frac{60s}{1min} = 2360580s$$

Calcular la frecuencia y la velocidad angular ahora es inmediato:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2360580s} = 4,24 \cdot 10^{-7} Hz$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2360580s} = 2,66 \cdot 10^{-6} rad/s$$

Para calcular la velocidad lineal de la Luna tenemos que multiplicar la velocidad angular por el radio de la órbita en metros.

$$v = \omega \cdot r = 2,66 \cdot 10^{-6} rad/s \cdot 384000000m = 1021,60m/s = 1,02km/s$$

Como se trata de un MCU la aceleración angular es nula y por tanto la aceleración tangencial también. La aceleración normal es diferente de cero.

$$\alpha = 0 \text{ rad/s}^2$$

$$a_t = \alpha \cdot r = 0 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \omega^2 \cdot r = a_n = \omega^2 \cdot r = (2,66 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 384000000 = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Para calcular el ángulo rotado por la Luna alrededor de la Tierra durante un día usaremos la ecuación siguiente:

$$\theta = \theta_o + \omega \cdot t = 2,66 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \text{ d} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 0,23 \text{ rad}$$

$$\theta = 0,23 \text{ rad} = 0,23 \text{ rad} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 52,71^\circ$$

donde hemos sustituido el tiempo por las 24 horas en segundos y hemos considerado nulo el ángulo inicial.

2. Dinámica del movimiento circular

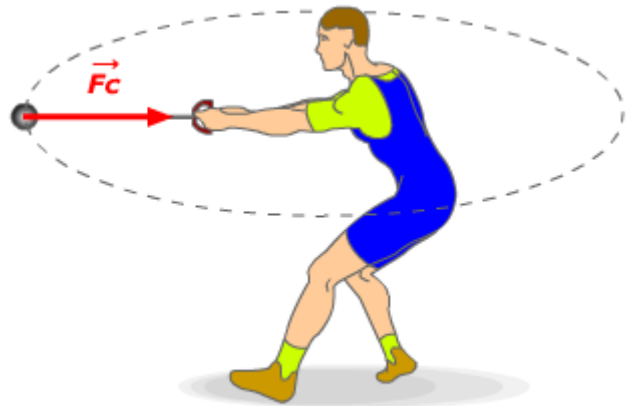
Ya sabes que si un móvil no sigue una trayectoria rectilínea, va cambiando la dirección de su vector velocidad, por lo que hay aceleración. Recibe el nombre de **aceleración centrípeta**, y se calcula como v^2/R , siendo v la velocidad del móvil en cada instante y R el radio de curvatura de la trayectoria. Su dirección va precisamente hacia el centro de la trayectoria.

2.1 Fuerza centrípeta

Al estudiar las leyes de la dinámica has visto que las aceleraciones son causadas por la existencia de una fuerza neta que actúa sobre el cuerpo. ¿Cuál es la fuerza que provoca ese cambio de dirección del vector velocidad? ¿Qué la produce?

Se trata de la fuerza centrípeta, que es la causa de los cambios de dirección de los móviles en su desplazamiento. Podemos encontrar casos de fuerzas centrípetas:

- de contacto, como la tensión del cable en un lanzamiento de martillo o el rozamiento entre las ruedas de un coche que toma una curva y el asfalto.
- a distancia, como la atracción gravitatoria entre la Tierra y un satélite o sobre un avión que hace un looping.



fuerza centrípeta

Imagen de [jepeca](#) bajo licencia Creative Commons

La fuerza centrípeta es un vector dirigido al centro de la curva cuyo módulo viene dado por la expresión:

$$F_c = mv^2/R$$

donde m es la masa del móvil y, como ya sabes, v^2/R es la aceleración centrípeta (v es la velocidad y R el radio de giro).

Si recuerdas la relación entre las velocidades lineal y angular ($v = \omega R$, donde ω es la velocidad angular), también se puede escribir como:

$$F_c = m\omega^2 R$$

Es decir, simplemente se aplica la ley de la dinámica $F = m \cdot a$.

Importante

La fuerza centrípeta es la causa de los cambios de dirección del vector velocidad cuando un cuerpo sigue una trayectoria curvilínea. Va dirigida hacia el centro de la trayectoria y su módulo se puede calcular como mv^2/R o como $m\omega^2 R$ según conozcamos la velocidad lineal v o la velocidad angular ω .

Curiosidad

En este video puedes ver la espectacularidad del movimiento de coches y motos por una pared cilíndrica vertical que se conoce como tubo de la muerte.

En el video puedes ver que llega a haber dos coches y dos motos girando a la vez.

¿Cuál es el origen de la fuerza centrípeta? En este caso, la reacción de la pared del tubo a la acción del móvil que se desplaza a alta velocidad, realizando fuerza sobre ella.

tubo_de_la_muerte.flv



Vídeo de [educaplus](#) de dominio público

2.2 ¿Fuerza centrífuga?

Seguro que has oído este término muchas veces: la lavadora centrifuga a 1200 rpm , en el análisis de sangre los tubos se centrifugan en el laboratorio, etcétera. Pero ¿qué hace la fuerza centrífuga?: absolutamente nada, ya que **la fuerza centrífuga no es una fuerza real** que origine algún tipo de efecto relacionado con el giro de los cuerpos. Solamente se utiliza cuando el observador está situado en el propio sistema que sufre el giro.

Imagina que vas en un coche con los ojos cerrados. El coche circula con rapidez constante por una pista de pruebas, comenzando por una larga recta. En un momento dado, tienes la sensación de que una fuerza te desvía hacia la ventanilla. Como has experimentado una aceleración al cambiar la dirección de tu movimiento, deduces que una fuerza ha actuado sobre ti para provocar ese efecto: precisamente ésa es la que llamamos fuerza centrífuga.

Si un observador externo hubiera visto la misma situación, ¿cómo la explicaría?: simplemente diría que el coche ha tomado una curva, que sobre él ha actuado una fuerza centrípeta que le obliga a girar (ya veremos más adelante que se trata de la fuerza de rozamiento entre las ruedas y el asfalto), pero que como no actúa sobre ti, sigues con la trayectoria que llevabas, tangente a la trayectoria de la curva, y te desvías hacia la ventanilla.

Piensa que tu movimiento no lo provoca ninguna fuerza, sino más bien la ausencia de una fuerza, la centrípeta. Eso sí, tú mismo puedes producir esa fuerza centrípeta, agarrándote al asidero que hay encima de la ventanilla.



Imagen [mequetrefe](#)
bajo licencia Creative Commons

Importante

No vas a utilizar en ningún caso la fuerza centrífuga, ya que los sistemas de referencia siempre van a ser exteriores y sin aceleración (sistemas inerciales).

3. Análisis de casos

Vas a estudiar algunas situaciones de interés en las que interviene la fuerza centrípeta.

¿Cómo vas a abordar la interpretación de situaciones en las que hay aceleración centrípeta? Es aconsejable que sigas estos pasos:

- Reconocer que cambia la dirección del vector velocidad.
- Identificar el origen de la fuerza centrípeta que provoca esa aceleración.
- Representar el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el móvil.
- Igualar la fuerza centrípeta concreta a su expresión general (mv^2/R).



Imagen de [Alex Simonini](#) bajo licencia Creative Commons

Además, vas a considerar la influencia de diferentes factores sobre el movimiento: la velocidad del objeto, su masa, el radio de la trayectoria descrita, la tensión de la cuerda, el coeficiente de rozamiento o el ángulo de inclinación que producen la fuerza centrípeta, etcétera, como irás viendo en cada caso.

¿Qué **situaciones** analizarás?

- Cuerpos que giran por acción de una ligadura (cuerda, varilla, etcétera), como sucede en el lanzamiento de martillo.
- Coches que toman las curvas en carreteras planas por acción de la fuerza de rozamiento.
- Motoristas que se inclinan para tomar mejor las curvas, hasta casi rozar el suelo con la rodilla.
- Satélites que giran alrededor de los planetas debido a la fuerza gravitatoria.

3.1 Cuerpos enlazados

En el lanzamiento de martillo el lanzador gira sobre sí mismo, y hace girar la bola de aproximadamente 7.26 kg (4 kg en la prueba femenina) mediante un cable metálico. Tras tres o cuatro giros completos, en un momento dado suelta el aparato, que sale en la dirección que llevaba en ese momento, tangente a la trayectoria.

Simulador de [Jesús Peñas](#) bajo licencia Creative Commons

¿Cuál es la fuerza que hace girar al martillo? La **tensión** T del cable, ejercida por el lanzador y que se transmite a la bola (consideramos que el peso del martillo es perpendicular al plano de giro). Por tanto,

$$T = \frac{mv^2}{R} \text{ , o bien } T = m\omega^2 R$$

según trabajes con la velocidad lineal o con la angular.

Sabiendo tres de las magnitudes podrás determinar la cuarta con estas ecuaciones.

Cualquier situación en que haya un objeto que gira en un plano horizontal mediante una cuerda tensa, se resuelve de esta forma.

Además, podrás plantearte preguntas sobre cómo influirán las diferentes variables en el proceso. Por ejemplo, ¿por qué es necesario que el lanzador tenga una gran fuerza muscular? ¿Interesa que el cable sea largo o corto? ¿Cómo influye la rapidez de giro?



Ejercicio resuelto

Si el cable del martillo está deteriorado y puede soportar como máximo una tensión de 1000 N ¿qué velocidad de giro máxima puede llevar si el radio de giro es de 1.5 m? ¿Sería mejor acortar el cable?

Mostrar retroalimentación

Utilizando la expresión ya vista y sustituyendo los valores, resulta que:

$$T = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$
$$1000N = \frac{7.26kg \cdot v^2}{1.5m} = 7.26kg \cdot \omega^2 \cdot 1.5m$$

$$\omega = 9.6rad/s$$

$$v = \omega \cdot R = 9.6rad/s \cdot 1.5m/rad = 14.4m/s$$

Lo que interesa es que la velocidad de salida v sea lo mayor posible. Se puede conseguir si R es mayor, es decir, alargando el cable (fíjate en la expresión que relaciona la tensión T con el radio R y la velocidad v), pero su longitud está limitada por la normativa vigente en el atletismo.

3.2 Curvas planas en coche

¿Qué fuerza es la que permite que un coche tome una curva plana? ¿Cuál es la fuerza centrípeta que evita que el coche se salga de la curva? ¿De qué depende la velocidad máxima a la que el móvil puede tomar la curva?

La responsable es la **fuerza de rozamiento** entre las ruedas y la carretera. En el simulador puedes ver que sobre el coche actúan tres fuerzas: su peso, realizada por la Tierra, vertical hacia abajo (mg , naranja); la reacción del suelo en el que se apoya, vertical hacia arriba (N , azul) e igual en módulo al peso, con lo que en la dirección vertical la fuerza resultante es nula; y, por último, la fuerza de rozamiento entre el coche y la superficie de apoyo, dirigida hacia el centro de curvatura y responsable de que el coche tome la curva sin peligro (F_r , verde).

Simulador de [Jesús Peñas](#) bajo licencia Creative Commons

En realidad, el coche empuja a la carretera hacia el exterior de la curva, y por reacción la carretera realiza sobre el coche una fuerza hacia el interior de la curva: ése es el origen de la fuerza centrípeta.

Utilizando la expresión de la fuerza de rozamiento que se obtuvo en el tema anterior, se tiene que

$$\mu mg = \frac{mv^2}{R}$$

con lo que la expresión de la velocidad se reduce a

$$v = \sqrt{\mu g R}$$

Es decir, cuanto mayor sea el radio de curvatura y el coeficiente de rozamiento, mayor será la velocidad máxima a la que se puede tomar una curva sin derrapar.



Ejercicio resuelto

En el simulador anterior el coche puede circular hasta la velocidad máxima antes de derrapar. ¿Cuánto vale el coeficiente de rozamiento entre el coche y la carretera?

Mostrar retroalimentación

De la expresión:

$$\mu mg = \frac{mv^2}{R}$$

Despejamos el coeficiente de rozamiento y tenemos:

$$\mu = \frac{v^2}{g \cdot R}$$

En el simulador la velocidad máxima que puede alcanzar el coche es 40 km/h es decir:

$$\frac{40 \text{ km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 11.1 \text{ m/s}$$

Por lo tanto si sustituimos los valores de v , g y R , tenemos:

$$\mu = \frac{(11.1 \text{ m/s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 100 \text{ m}} = 0.126$$

Como nos dicen que 40 km/h es la velocidad máxima antes de derrapar, 0.126 es el coeficiente de rozamiento mínimo para que a esa velocidad no se salga de la pista.

Comprueba lo aprendido triple

Si con motivo de unas obras de mejora, el radio de la curva de una carretera se hace cuatro veces mayor, ¿cómo se modifica la velocidad máxima a la que se puede tomar esa curva?

Sugerencia

- ☐ No cambia.
- ☐ Se hace doble.
- ☐ Se multiplica por cuatro.
- ☐ Se hace la mitad.

Incorrecto

Correcto: la velocidad depende de la raíz cuadrada del radio de curvatura (y si se multiplica por cuatro, la velocidad lo hace por la raíz de cuatro, que es dos).

Incorrecto

Incorrecto

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

3.3 Curvas planas en moto

¿Qué característica especial tienen las motos? Seguro que sabes que los motoristas inclinan su máquina para tomar mejor las curvas.

Naturalmente, hay rozamiento con el asfalto, pero no es suficiente para tomar la curva a la velocidad que necesitan llevar. Al inclinarse aumenta la fuerza centrípeta, y eso permite tomar la curva a mayor velocidad, o tomar a una velocidad dada una curva de radio pequeño.

¿Qué fuerzas reales actúan sobre la moto? El rozamiento, como siempre, porque en caso contrario la moto no podría circular; cuando toma la curva, produce fuerza centrípeta **F_c**, como ya has visto antes. Además, también actúan el peso **mg** ejercido por la Tierra, y la normal **N**, ejercida por la carretera.

Observa ahora el diagrama de fuerzas: la resultante del peso y la normal es una fuerza dirigida hacia el centro de la curva. Se representa solamente la contribución de la inclinación a la fuerza centrípeta: para obtener el valor total habría que sumar la fuerza de rozamiento.

Simulador de [Jesús Peñas](#) bajo licencia Creative Commons

Sin tener en cuenta el rozamiento, siendo α el ángulo de inclinación de la moto respecto de la vertical, se cumple que:

$$\tan\alpha = \frac{F_{\text{centrípeta}}}{P_{\text{eso}}} = \frac{F_c}{mg}$$

$$F_c = mg \cdot \tan\alpha$$

Importante

La inclinación de una moto al tomar una curva aumenta la fuerza centrípeta y le permite tomar la curva con mayor velocidad y seguridad.

Ejercicio resuelto

Una moto se inclina 30° al tomar una curva de 80 m de radio. ¿A qué velocidad la podrá tomar como máximo por efecto de la inclinación?

Mostrar retroalimentación

$$F_c = mg \cdot \tan \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{gR \cdot \tan \alpha} = \sqrt{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 80 \text{ m} \cdot \tan 30} = 21.3 \text{ m/s} = 76.6 \text{ km/h}$$

Como además hay rozamiento, la velocidad podrá ser mayor que el resultado obtenido en este caso.

Reflexiona

Un motorista circula a 90 km/h cuando se encuentra con una curva de 50 m de radio, inclinándose 40° como máximo. ¿Podrá tomarla o se saldrá de la carretera? (no tengas en cuenta el rozamiento).

Mostrar retroalimentación

La expresión de la fuerza centrípeta es:

$$F_c = mg \cdot \tan \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

Puedes calcular la velocidad máxima a la que puede tomar la curva en esas condiciones, y ver si la que realmente lleva es mayor o menor:

$$v = \sqrt{gR \cdot \tan \alpha} = \sqrt{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 50 \text{ m} \cdot \tan 40} = 20.28 \text{ m/s} = 73 \text{ km/h}$$

Como la velocidad que lleva es superior a la máxima permitida, **se saldrá de la curva.**

También podías haber calculado el radio mínimo que debería tener la curva para poder tomarla a 90 km/h y compararlo con el real de 50 m.

3.4 Planetas y satélites

La Luna gira alrededor de la Tierra, y el satélite Meteosat también, solo que a una distancia mucho menor.

¿Cuál es el origen de la fuerza centrípeta responsable de esos movimientos de rotación?: la fuerza de atracción gravitatoria entre esos cuerpos. Es decir, su propio peso es la fuerza que hace cambiar continuamente la dirección del vector velocidad, originando en los casos anteriores el movimiento circular uniforme.

Simulador de [Jesús Peñas](#) bajo licencia Creative Commons

Para resolver situaciones en las que intervengan satélites, solamente tienes que tener en cuenta la ley de gravitación universal y los conceptos relacionados con el movimiento circular uniforme, que ya has visto en la unidad anterior.



Importante

La atracción gravitatoria es el origen de la fuerza centrípeta que hace que los satélites giren alrededor de los planetas.

Ejercicio resuelto

La Luna tarda 28 días en dar una vuelta completa a la Tierra girando a una distancia de 384000 km. ¿Cuál es la fuerza centrípeta?

Masa de la Luna, $m = 7.349 \times 10^{22}$ kg

Mostrar retroalimentación

La velocidad angular de la luna alrededor de la Tierra es:

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{28 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 3.12 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

La fuerza centrípeta es:

$$F_c = m \cdot \omega^2 \cdot R = 7.349 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 9.734 \cdot 10^{-10} \text{ rad}^2/\text{s}^2 \cdot 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Operando:

$$F_c = 2.747 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

Ejercicio resuelto

Ahora vas a determinar a qué distancia sobre la superficie de la Tierra debe girar el satélite para ser geoestacionario; es decir, para que siempre se encuentre sobre el mismo punto sobre la Tierra como ocurre con los satélites de comunicaciones.

Mostrar retroalimentación

Siendo **G** la constante de gravitación universal ($6.67 \cdot 10^{-11}$ en unidades del Sistema Internacional), **M** la masa de la Tierra ($5.98 \cdot 10^{24}$ kg), **m** la masa del satélite, **w** su velocidad angular y **T** su periodo ($24 \text{ h} \cdot 3600 \text{ s/h} = 86400 \text{ s}$), tenemos que:

$$G \frac{Mm}{R^2} = m \omega^2 R$$

Despejando y sustituyendo, se tiene que:

$$F_c = m \cdot \frac{v_{\text{max}}^2}{R} = \mu_e \cdot m \cdot g$$

Como el radio de la Tierra es de 6370 km, el satélite debe girar a (42250-6370) km; es decir, a 35880 km de altura.

Mapa Conceptual

Fuentes para el profesorado

Descargar CMAP.

Resumen

Importante

Decimos que un objeto se mueve con un movimiento circular si su trayectoria es una circunferencia.

Importante

La unidad de ángulo en el Sistema Internacional es el *radián*.

En la descripción de los movimientos circulares también se suelen emplear otras unidades como el *grado sexagesimal* o la *revolución* (vuelta).

Importante

Dado que la distancia al centro de giro se mantiene fija en los **movimientos circulares**, vamos a utilizar coordenadas polares para describirlo. Daremos la distancia al centro y el ángulo entre el lado positivo del eje x y el vector de posición de nuestro móvil.

Importante

¿Es la velocidad constante en un MCU?

Ya sabemos que la velocidad de un móvil es una magnitud vectorial y por tanto no basta para describirla con dar el espacio recorrido cada segundo sino que

necesitamos indicar la dirección y el sentido con que se mueve. Es decir, la velocidad tiene dos componentes: por un lado su módulo que indica cómo de rápido se mueve el objeto y por otro la dirección y sentido.

En un MRU sabemos que no cambia el módulo de la velocidad porque siempre se mueve con el mismo ritmo y además como la trayectoria es recta, la componente vectorial tampoco. Podemos decir que en un MRU la velocidad, tanto en módulo como en dirección y sentido es constante.

En un MCU sabemos que no cambia el ritmo con que da vueltas pero al describir una circunferencia, la dirección y el sentido cambian continuamente. Por lo tanto, estrictamente la velocidad no es constante es un MCU y cuando decimos que es uniforme queremos decir que el módulo de la velocidad no varía.

Ejercicios resueltos

Ahora toca practicar todo lo que hemos visto en los contenidos.



Imagen de [anikaviro](#) con [algunos derechos reservados](#)

Ejercicio 1

Ejercicio resuelto

De las siguientes frases que se refieren al movimiento circular uniforme, indica si son verdaderas o falsas, escribiendo la frase de forma correcta en los casos en los que sean falsas:

- a) En este tipo de movimiento no existe aceleración normal, pero sí aceleración tangencial.
- b) En este tipo de movimiento no existe aceleración tangencial, pero sí aceleración normal.
- c) En este tipo de movimiento varía la velocidad tanto en módulo como en dirección.
- d) En este tipo de movimiento sólo varía la dirección de la velocidad y no varía su módulo.
- e) En este tipo de movimiento el módulo de la velocidad lineal se mantiene constante.

Mostrar retroalimentación

a) Falso.

En este tipo de movimiento no existe aceleración tangencial, pero sí aceleración normal.

b) Verdadero.

c) Falso.

En este tipo de movimiento sólo varía la dirección de la velocidad y no varía su módulo.

d) Verdadero.

e) Falso.

En este tipo de movimiento, el módulo de la velocidad lineal depende de la distancia al centro de giro.

Ejercicio 2

Ejercicio resuelto

2. Un automóvil toma una curva de 100 m de radio con una rapidez constante de 36 km/h. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y escríbelas de forma correcta en el caso de que sean falsas.

- a) El coche no tiene aceleración porque su velocidad es constante.
- b) El coche tiene aceleración normal y no tiene aceleración tangencial.
- c) El coche tiene aceleración tangencial al variar el módulo de la velocidad.
- d) La aceleración del coche vale 1 m/s^2 .
- e) El movimiento del coche mientras describe la curva es circular y uniforme.

Mostrar retroalimentación

a) Falso.

El coche tiene aceleración normal.

b) Verdadero.

c) Falso.

El coche no tiene aceleración tangencial porque no varía el módulo de la velocidad.

d) Verdadero.

Para comprobarlo debemos cambiar las unidades de la velocidad; de km/h debemos pasarlo a m/s.

$$v = \frac{36 \text{ km}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}$$

Posteriormente, debemos aplicar la fórmula del módulo de la aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(10 \text{ m/s})^2}{100 \text{ m}} = 1 \text{ m/s}^2$$

e) Verdadero.

Ejercicio 3

Ejercicio resuelto

3. Un coche toma una curva a una velocidad de 90 km/h. Si el radio de curvatura de dicha curva es de 150 m, calcula la aceleración centrípeta del coche.

Mostrar retroalimentación

La aceleración centrípeta es otra forma de nombrar a la componente normal de la aceleración.

La aceleración centrípeta tiene una dirección perpendicular a la trayectoria del móvil en cualquier punto y se encuentra dirigida hacia el centro de la circunferencia que describe la trayectoria.

El módulo de esta aceleración lo podemos calcular mediante la fórmula:

$$a_c = a_n = \frac{v^2}{r}$$

La velocidad debemos expresarla en m/s, por lo que debemos hacer un cambio de unidades:

$$v = \frac{90km}{1h} \cdot \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 25m/s$$

Sustituyendo los valores en la fórmula tenemos:

$$a_c = \frac{(25m/s)^2}{150m} = 4.2m/s^2$$

Ejercicio 4

Ejercicio resuelto

4. Una rueda de 20 cm de diámetro gira a 60 rpm. Calcula:

- a) La velocidad angular de la rueda en rad/s.
- b) La velocidad lineal de un punto de la periferia de la rueda y de un punto situado a 5 cm del centro de giro.
- c) La frecuencia del movimiento y el período.

Mostrar retroalimentación

a) La velocidad angular la conocemos, puesto que la rueda gira a 60 rpm. Lo único que tenemos que hacer es un cambio de unidades:

$$60rpm = \frac{60rev}{1min} \cdot \frac{2\pi rad}{1rev} \cdot \frac{1min}{60s} = 2\pi rad/s = 6.3 rad/s$$

b) Como la rueda tiene 20 cm de diámetro, el radio es de 10 cm o, lo que es lo mismo, de 0.1 m.

El valor de la velocidad angular (ω) lo conocemos del apartado anterior. Así, podemos calcular v mediante la fórmula:

$$v = \omega \cdot R$$

Si $R = 0.1$ m, tenemos: $v = 6.3 \text{ rad/s} \cdot 0.1 \text{ m} = 0.63 \text{ m/s}$

Si el punto está situado a 5 cm del centro de giro:

$R = 0.05$ m; $v = 6.3 \text{ rad/s} \cdot 0.05 \text{ m} = 0.315 \text{ m/s}$

c) La frecuencia del movimiento viene dada por el número de vueltas que da la rueda en 1 s. Como sabemos que da 60 vueltas en un minuto (dado que gira a 60 rpm), tenemos:

$$f = \frac{nvueltas}{segundos} = \frac{60vueltas}{60s} = 1vuelta/s = 1Hz$$

El período es el inverso de la frecuencia. Se calcularía a partir de la ecuación:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1Hz} = 1s$$

Ejercicio 5

Ejercicio resuelto

5. Un automóvil toma una curva disminuyendo su rapidez durante 15 s. Indica si las siguientes frases son verdaderas o falsas y, en este último caso, reescribe las frases de manera que sean verdaderas.

- a) El coche solamente tiene aceleración tangencial.
- b) El coche solamente tiene aceleración normal.
- c) La trayectoria del móvil no es una línea curva.
- d) El coche tiene aceleración tangencial y normal.
- e) El módulo de la velocidad no se mantiene constante.

Mostrar retroalimentación

- a) Falso.
El coche tiene aceleración tangencial y normal.
- b) Falso.
El coche tiene aceleración tangencial y normal.
- c) Falso.
La trayectoria del móvil es una línea curva.
- d) Verdadero.
- e) Verdadero.

Ejercicio 6

Ejercicio resuelto

6. La acción de un freno es capaz de detener un coche, cuyas ruedas giran a 300 rpm, en 10 s. Halla:

- a) La aceleración angular.
- b) La velocidad angular a los 4 s de comenzar a frenar.
- c) El número de vueltas que da una rueda cualquiera desde que comienza a actuar el freno hasta que se detiene totalmente.

Mostrar retroalimentación

a) Para calcular la aceleración angular aplicamos la fórmula:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t}$$

Antes de sustituir los distintos valores, debemos pasar la velocidad angular de rpm a rad/s.

$$300rpm = \frac{300rev}{1min} \cdot \frac{2\pi rad}{1rev} \cdot \frac{1min}{60s} = 10\pi rad/s = 31.4rad/s$$

Sustituyendo los valores, tenemos:

$$\alpha = \frac{0 - 10\pi rad/s}{10s} = -\pi rad/s^2 = -3.14rad/s^2$$

b) Para calcular la velocidad angular a los 4 s de comenzar a frenar, podemos reordenar la ecuación anterior, de manera que tendríamos:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot \Delta t$$

$$\varphi = 0 + 10\pi rad/s \cdot 4s + \frac{1}{2}(-\pi rad/s^2) \cdot 16s^2$$

c) Para calcular el número de vueltas que dan las ruedas mientras se frena, calcularemos primero el ángulo girado en 10 s y luego transformaremos los radianes en vueltas o revoluciones.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\varphi = 0 + 10\pi rad/s \cdot 10s + \frac{1}{2} \cdot (-\pi rad/s^2) \cdot (10s^2)$$

$$\varphi = 0 + 100\pi rad + \frac{1}{2} \cdot (-\pi rad/s^2) \cdot 100s^2$$

$$\varphi = 0 + 100\pi rad - 50\pi rad$$

$$\varphi = 50\pi rad$$

$$\varphi = 50\pi rad \cdot \frac{1rev}{2\pi rad} = 25rev$$

Ejercicio 7

Ejercicio resuelto

Si en el tema anterior cogimos el coche, ahora vamos a intentar llevar una vida más saludable y coger la bicicleta. Nos vamos a centrar ahora en este nuevo medio de transporte.



Imagen de [Quilfro Elemento](#) con [algunos derechos reservados](#).

1. Imagina que vas montado en tu bicicleta. El diámetro de las ruedas es de 80 cm. Como estás en forma, las ruedas giran a razón de 90 vueltas cada minuto.

Indica:

- a) La velocidad angular en rad/s.
- b) La velocidad lineal de un punto de la periferia de las ruedas.
- c) El valor que tendría la velocidad angular de un punto situado a 20 cm del centro de giro. ¿Y cuál sería el valor de su velocidad lineal?
- d) El número de vueltas que darían tus ruedas en 5 min de pedaleo sin descansar.
- e) ¿Cuál sería la frecuencia y el período del movimiento?
- f) ¿Cuánto valdría la aceleración centrípeta?

Mostrar retroalimentación

Se trata de un movimiento circular uniforme. Las ecuaciones de este movimiento son:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \Delta t, \quad v = \omega \Delta t$$

Los datos que tenemos son:

radio de giro: 40 cm (la mitad del diámetro de la rueda)

velocidad de giro: 90 r.p.m.

a) Calculamos la velocidad angular en rad/s

$$90 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \cdot \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} = 9,4 \text{ rad/s}$$

b) Para calcular la velocidad lineal utilizamos la relación entre las variables angulares y lineales:

$$v = \omega R = 9,4 \cdot 0,4 = 3,77 \text{ m/s}$$

c) la velocidad angular no depende de la distancia al centro de giro, por tanto, a 20 cm de éste la velocidad angular de la rueda será de $9,4 \text{ rad/s}$

La velocidad lineal si depende del radio de giro, por tanto: $v = \omega R = 9,4 \cdot 0,2 = 1,88 \text{ m/s}$

d) Como se trata de un MCU el ángulo recorrido vendrá dado por la expresión:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \Delta t = 0 + 9,4 (5 \cdot 60) = 2820 \text{ rad}$$

Si cada vuelta se recorren $2 \cdot \pi$ rad, al cabo de 5 min (300 segundos) la rueda habrá dado $2820 / 2 \cdot \pi = 448,82$ vueltas.

e) Para calcular la frecuencia y el periodo utilizaremos las siguientes expresiones:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9,4}{2\pi} = 1,5 \text{ Hz}, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,5} = 0,67 \text{ s}$$

f) Para calcular la aceleración centrípeta aplicamos la siguiente expresión:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{3,77^2}{0,4} = 35,53 \text{ m/s}^2$$

2. Supón que estás en un sprint y que ahora tus ruedas giran a 150 rpm. En ese momento se cruza algo en tu camino y aprietas el freno, deteniéndote en 20 s.

Calcula:

- La velocidad angular inicial en rad/s.
- El número de vueltas que darían las ruedas hasta detenerse.
- La aceleración tangencial de un punto de la periferia.
- La aceleración normal de ese mismo punto cuando las ruedas giran a 150 rpm.

Mostrar retroalimentación

Se trata de un movimiento circular uniforme acelerado. Las ecuaciones de este movimiento son:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2; \quad \omega_f = \omega_0 + \alpha \Delta t$$

Los datos que tenemos son:

radio de giro: 40 cm (la mitad del diámetro de la rueda)

$$\omega_0 = 150 \text{ r.p.m.}$$

$$\omega_f = 0 \text{ rpm}$$

$$\Delta t = 20 \text{ s}$$

a) Calculamos la velocidad angular en rad/s

$$150 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{rad}}{\text{rev}} \cdot \frac{\text{min}}{60\text{s}} = 15,7 \text{ rad/s}$$

b) Para calcular el ángulo recorrido, o número de vueltas que da hasta pararse, debemos conocer la aceleración angular del movimiento. Como se trata de un MCUA:

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha \Delta t, \quad \alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{\Delta t} = \frac{0 - 15,7}{20} = -0,79 \text{ rad/s}^2$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 = 0 + 15,7 \cdot 20 + \frac{1}{2} (-0,79) 20^2 = 314 - 158 = 156 \text{ rad};$$

$$\text{El número de vueltas será: } 156 \text{ rad} \cdot \frac{\text{rev}}{2\pi \text{rad}} = 24,8 \text{ rev o vueltas}$$

c) La aceleración tangencial se calcula multiplicando la angular por el radio.

$$a_t = \alpha R = -0,79 \cdot 0,4 = -0,32 \text{ m/s}^2$$

d) La aceleración normal vendrá dada por:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R = 15,7^2 \cdot 0,4 = 98,6 \text{ m/s}^2$$

3. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) La velocidad lineal es la misma para todos los puntos de la cubierta de las ruedas de la bicicleta.

b) La velocidad lineal es la misma para todos los puntos del radio de la rueda de la bicicleta.

Mostrar retroalimentación

a) Verdadera. Cualquier punto situado sobre la cubierta tiene la misma velocidad lineal ya que recorre el mismo espacio por unidad de tiempo que cualquier otro punto situado sobre la rueda.

b) Falso. Los puntos situados sobre el radio de la rueda realizan distintos arcos de circunferencia dependiendo de la distancia al eje de giro. Por tanto, recorrerán distintas distancia por unidad de tiempo y tendrán distintas velocidades lineales.

Ejercicio 8

Ejercicio resuelto

¿Qué fuerza constante hay que ejercer sobre un alumno de 60 kg de masa que corre a 18 km/h para conseguir que describa una circunferencia con un radio de 2 m?

Mostrar retroalimentación

Datos
$m = 60 \text{ kg}$
$v = 18 \text{ km/h}$
$R = 2 \text{ m}$

Antes de nada convertimos al S.I. el valor de la velocidad

18 km/h

La fuerza necesaria para hacer cambiar la dirección del movimiento y que el alumno describa una trayectoria circular de 2 metros de radio vendrá dada por la expresión $F = m \cdot a_n$ donde a_n es la aceleración normal.

Podemos relacionar la aceleración normal con la velocidad del móvil mediante la expresión:

$a_n = v^2/R$ siendo R el radio de curvatura.

Teniendo esto en cuenta la expresión de la fuerza que hay que aplicar queda de la siguiente forma:

$$F = m \cdot a_n ; F = m \cdot \frac{v^2}{R}$$
$$F = 60 \cdot \frac{5^2}{2} = 750 \text{ N}$$

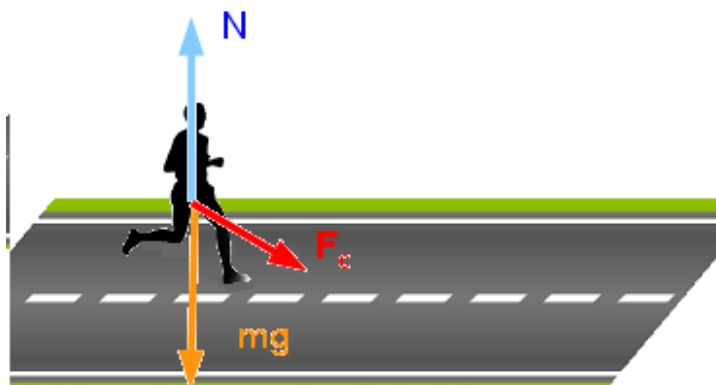


Imagen propia

La fuerza que hay que aplicar para que el alumno describa una circunferencia de 2 m de radio es de 750 N.

Ejercicio 9

Ejercicio resuelto

Un niño hace girar en un plano vertical una piedra de 100 g atada a una cuerda de 1 m de longitud y masa despreciable, de modo que la piedra da 120 vueltas por minuto. ¿Cuál es la tensión de la cuerda cuando la piedra pasa por el punto más alto? Realiza los cálculos correspondientes y escribe el resultado obtenido.

Mostrar retroalimentación

Datos	Conversión al S.I.
$m = 100\text{ g}$	$m = 100\text{ g} \cdot \frac{1\text{ kg}}{1000\text{ g}} = 0,1\text{ kg}$
$\omega = 120\text{ rpm}$	$\omega = 120 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2 \cdot \pi\text{ rad}}{1 \cdot \text{rev}} \cdot \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$R = 1\text{ m}$	

Cuando la piedra pasa por el punto más alto de la trayectoria la tensión de la cuerda y el peso de la piedra tienen el mismo sentido.

La fuerza centrípeta, responsable del movimiento circular de la piedra, es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella en cada momento. Teniendo esto en cuenta y aplicando la segunda ley de Newton podemos escribir

$$\vec{F}_c = \vec{T} + \vec{P}$$

$$\vec{F}_c = \vec{T} + \vec{P}$$

Imagen propia

Como las fuerzas tienen la misma dirección y sentido se cumple que:

$$F - T = D$$

$$F_c = T_1 + P$$

Como buscamos el valor de la Tensión de la cuerda sobre la piedra la despejamos de la expresión anterior:

$$T_1 = F_c - P \quad [1]$$

F_c viene dada por la expresión:

$$F_c = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Y como la $v = \omega \cdot R$

$$F_c = m \cdot \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = m \omega^2 \cdot R$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación [1] tendremos:

$$T_1 = F_c - P = m \cdot \omega^2 \cdot R - m \cdot g$$

$$T_1 = 0,1 \cdot 4^2 \cdot (3,14)^2 \cdot 1 - 0,1 \cdot 9,8 = 14,8 N$$

La Tensión de la cuerda en el punto más alto de la trayectoria de la piedra es de 14,8 N

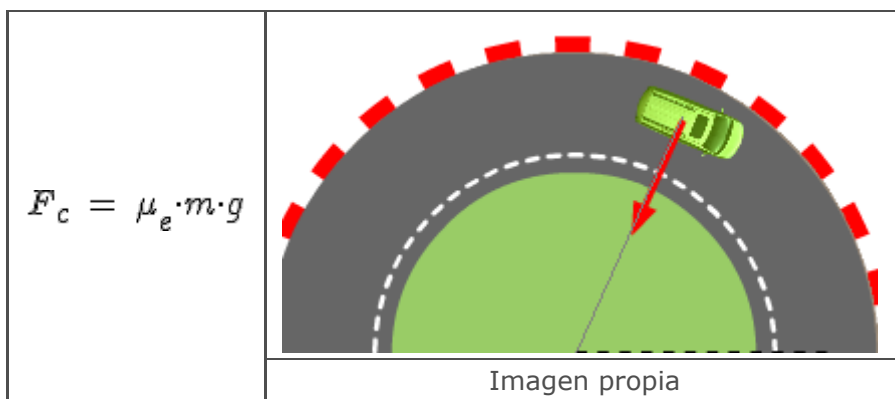
Ejercicio 10

Ejercicio resuelto

Un coche viaja por una carretera horizontal describiendo una circunferencia de 30 m de radio. Si el coeficiente de rozamiento estático es 0,6 ¿cuál es la velocidad máxima que puede ir el coche sin patinar?

Mostrar retroalimentación

En la figura se muestra el diagrama de fuerzas que actúan sobre el coche. En vertical la normal N equilibra la fuerza del peso P del vehículo. La fuerza de rozamiento es la única fuerza horizontal que actúa sobre el móvil. Su valor máximo viene dado por la expresión $F_{r_{\max}} = \mu_e \cdot N$. Como hemos visto, la normal equilibra al peso pudiendo tomar el valor de $m \cdot g$ como el de la normal (N equivale a $m \cdot g$), por eso la expresión anterior queda como $F_{r_{\max}} = \mu_e \cdot N = \mu_e \cdot m \cdot g$. En este caso la fuerza de rozamiento es la fuerza centrípeta.



La velocidad máxima v_{\max} a la que puede ir el vehículo viene determinada por el valor máximo de la fuerza de rozamiento. Aplicando la segunda ley de Newton tendremos:

$$F_c = m \cdot \frac{v_{\max}^2}{R} = \mu_e \cdot m \cdot g$$

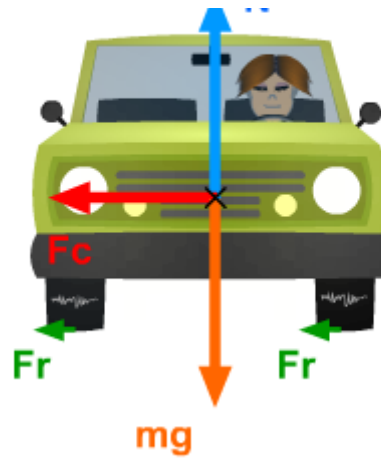


Imagen propia

De donde podemos despejar el valor de v_{max}

$$v_{max} = \sqrt{\mu_e \cdot g \cdot R} = \sqrt{0,6 \cdot 9,8 \cdot 30} = 13,3 \text{ m/s}$$

Esta velocidad es aproximadamente igual a 47,8 km/h. Si el coche se desplaza con una velocidad superior la fuerza de rozamiento estático no será lo suficientemente grande como para aportar la aceleración necesaria para que el coche siga una trayectoria circular.

Ejercicio 11

Ejercicio resuelto

Un motorista toma una curva de 130 m de radio con una velocidad de 43,2 km/h ¿Cuál debe ser su inclinación respecto a la vertical?

Mostrar retroalimentación

Datos	Conversión al S.I
$v = 43,2 \text{ Km/h}$ $R = 130 \text{ m}$	$43,2 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Para que el motorista describa una curva debe existir una fuerza dirigida hacia el centro de la misma (fuerza centrípeta) que será la responsable del cambio en la dirección de la velocidad (aceleración centrípeta). Si dicha fuerza no existe, o es insuficiente, le será imposible tomar la curva.

La fuerza centrípeta es suministrada por el rozamiento estático de los neumáticos contra el suelo y por una fuerza adicional, la componente de la normal que aparece como consecuencia de la inclinación del ciclista. En nuestro caso al no indicar nada acerca del rozamiento con el suelo, la única fuerza responsable del giro será la componente horizontal de la normal.

Estudiemos el diagrama de fuerzas que se ejercen sobre el ciclista:

En el eje Y

$$\begin{aligned} F' &= m \cdot a = 0 \\ N \cos \alpha - m \cdot g &= 0 \\ N &= \frac{mg}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

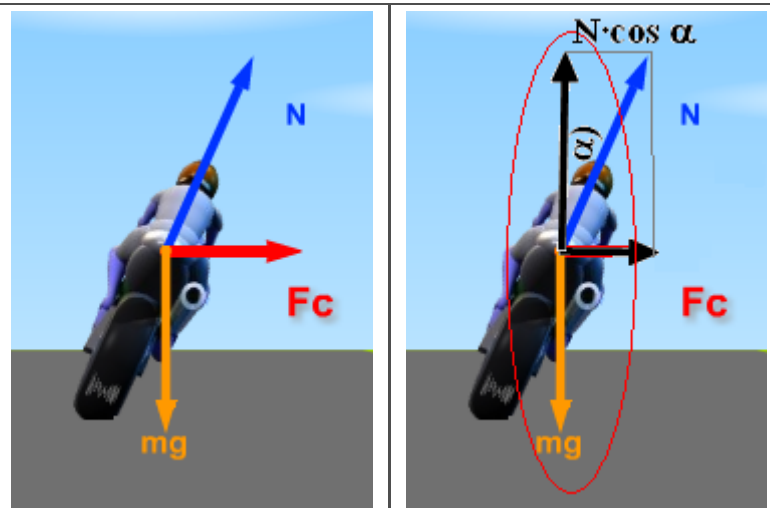
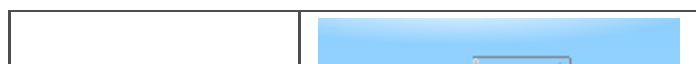


Imagen propia

En el eje X



$$N \sin \alpha = m \cdot a_n$$

$$N \sin \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

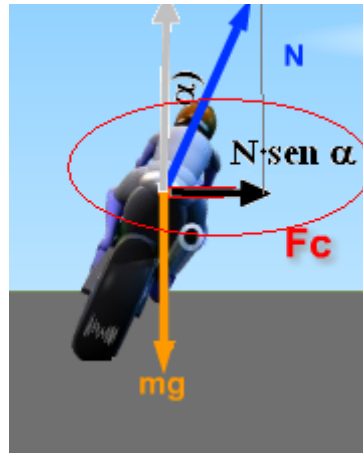


Imagen propia

Sustituimos el valor de N en esta última expresión:

$$\frac{mg}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Operamos para expresar esta ecuación en función de la tg α:

$$\tan \alpha \cdot mg = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$\tan \alpha = \frac{m \cdot \frac{v^2}{R}}{mg}$$

Simplificamos

$$\tan \alpha = \frac{\cancel{m} \cdot \frac{v^2}{R}}{\cancel{m} g} = \frac{v^2}{g \cdot R} = \frac{12^2}{9,8 \cdot 130} = 0,113$$

$$\alpha = \arctan(0,113) = 6,45^\circ$$

El motorista se inclina $6,45^\circ$

Ejercicio 12

Ejercicio resuelto

La Tierra describe una órbita, que se puede considerar como circular, alrededor del Sol y tarda un año en dar una vuelta. Suponiendo que el movimiento es circular y uniforme ¿Qué fuerza originará el movimiento de la Tierra?

Datos: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, Distancia de la Tierra al Sol $149,6 \cdot 10^6 \text{ Km}$.

Mostrar retroalimentación

Datos

$$M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

$$R = 149,6 \cdot 10^6 \text{ Km}$$

El Sol ejerce una fuerza sobre la Tierra que provoca el giro entorno a él. Esta fuerza es la fuerza centrípeta del movimiento circular.

Aplicando la segunda ley de Newton tenemos:

$$F_c = M_T \cdot a_n = M_T \cdot \omega^2 \cdot R$$

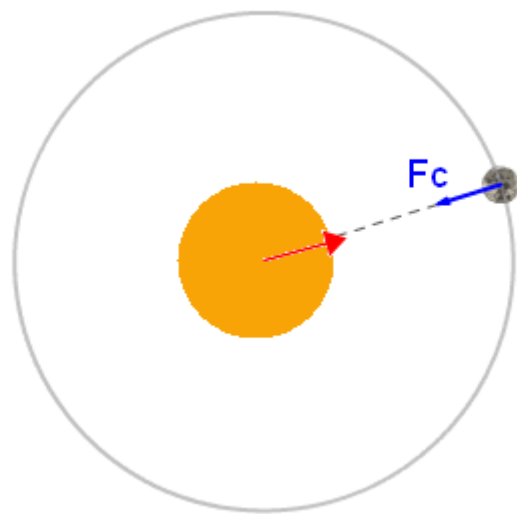


Imagen propia

Calculamos la velocidad angular de giro de la Tierra, para ellos tenemos en cuenta que la Tierra tarda un año en recorrer 2π rad, es decir, una vuelta completa alrededor del Sol.

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{2\pi \text{ rad}}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

Sustituimos los valores en la primera ecuación:

$$F_c = M_T \cdot \omega^2 \cdot R = 5,98 \cdot 10^{24} \cdot (1,99 \cdot 10^{-7})^2 \cdot 149,6 \cdot 10^6 = 3,54 \cdot 10^9 \text{ N}$$

La fuerza que hace que la Tierra gire alrededor del Sol tiene un valor de **$3,54 \cdot 10^9$ N**.

Ejercicio 13

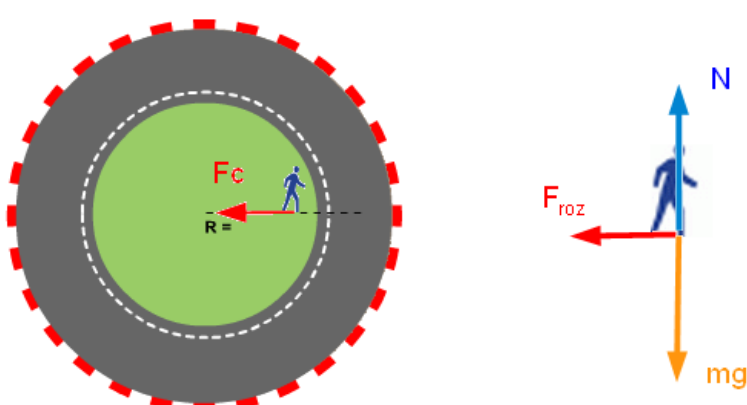
Ejercicio resuelto

La cazuela loca es una atracción de feria que consiste en una plataforma circular, colocada horizontalmente que gira entorno a un eje vertical. En una de estas atracciones gira con una frecuencia de 15 r.p.m y sobre ella se encuentra un hombre de pie cuyo rozamiento (el de sus zapatos) con la plataforma es de 0,4. Halla la distancia máxima al eje de giro a la que se puede colocar el hombre para que gire con la plataforma sin ser lanzado al exterior.

Mostrar retroalimentación

Datos	Conversión al S.I
$\omega = 15 \text{ r.p.m}$	$15 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2 \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0,5 \cdot \pi \text{ rad/s}$
$\mu_e = 0,4$	
$R = ?$	

Dado que podemos considerar que el peso de la persona está equilibrado por la normal, la única fuerza que puede hacer girar a la persona es la fuerza de rozamiento. Esta fuerza equivale a la fuerza centrípeta del movimiento circular.

$F = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{R}$ $F = F_{roz}$	
Imagen propia	

El valor máximo de la fuerza de rozamiento estático nos dará la máxima velocidad a la que puede girar la persona sin deslizarse.

$$F_{roz} = \mu_e \cdot N$$

Sustituyendo la F_{roz} en la expresión anterior tendremos:

$$\mu_e \cdot N = m \cdot \frac{v_{max}^2}{R}$$

Utilizaremos la relación entre la velocidad lineal y la angular ($v = \omega \cdot R$)

$$\mu_e \cdot N = m \cdot \frac{(\omega_{max} \cdot R)^2}{R} = m \cdot \omega_{max}^2 \cdot R$$

Como $N = m \cdot g$ podemos simplificar la expresión:

$$\mu_e \cdot N = m \cdot \omega_{max}^2 \cdot R$$

$$\mu_e \cdot \cancel{m} \cdot g = \cancel{m} \cdot \omega_{max}^2 \cdot R$$

$$\mu_e \cdot g = \omega_{max}^2 \cdot R$$

$$R_{max} = \frac{\mu_e \cdot g}{\omega_{max}^2} = \frac{\mu_e \cdot g}{(0,5 \cdot \pi)^2} = \frac{0,4 \cdot 9,8}{(0,5 \cdot \pi)^2} = 1,6m$$

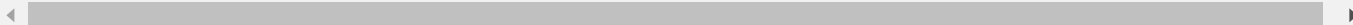
La persona se podrá alejar del eje de giro aproximadamente 1,6 m.

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte)**.

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del



Imprimible

Descargar [imprimible](#) (pdf - 1489.62 KB) .