



Aritmética: Números racionales

**Matemáticas Aplicadas a las Ciencias
Sociales I**

1º Bachillerato

Contenidos

**Aritmética
Números racionales**

1. Introducción

En una sociedad en la que la información nos llega de forma masiva, las infografías se han abierto su hueco ayudando a organizar dicha información de una forma visual y atractiva, incluso algunas veces interactiva.

La mayoría de estas infografías recogen datos expresados de distintas formas como las que se recogen en el siguiente esquema:



Imagen de elaboración propia.

Observa que tenemos:

1. Números con decimales
2. Porcentajes
3. Y alguna expresión del tipo 3 de cada 10.

Estas expresiones numéricas nos llevan más allá de los números naturales y de los enteros, que nos servían para contar o enumerar, y nos abren un número horizonte, el de los **números racionales**, que se pueden expresar en forma de fracción o de número decimal.

2. Fracciones

En la sociedad actual son frecuentes expresiones como “media” hora, “un cuarto” o “tres cuartos” de hora, un “tercio” o un “quinto” de cerveza, una botella de “tres cuartos”... Sin embargo, las fracciones están con frecuencia disimuladas bajo tantos por ciento o nuevos nombres como “céntimo”, “décimo”...

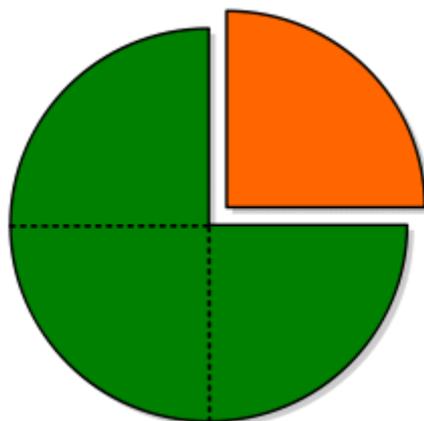
Las fracciones surgen naturalmente al intentar medir el espacio, el tiempo, las rotaciones... Supón que intentas medir el tiempo cronológico, la sucesión de los días, de los años. Se adopta una unidad conveniente, puede ser el día, el año, la hora. Al intentar expresar el paso del tiempo en dicha unidad no siempre ésta estará contenida de forma exacta, sino que deberá recurrirse a partes de la misma: fracciones. La civilización persa dividió la hora en 60 partes (minutos) y estas a su vez en otras 60 (segundos).



Fotografía por arturomanly en [Creative Commons](#). Licencia [CC](#)

2.1 Concepto de fracción

En la actualidad se habla mucho del proceso de independencia de Cataluña, de cómo se fraccionaría España o de que solo una fracción de la población está a favor de dicho proceso. Precisamente el concepto de fracción da nombre a un procedimiento basado en dividir (fraccionar) algo en partes.



En matemáticas, cuando queremos expresar una parte de un total recurrimos a los números fraccionarios o fracciones.

Imagen de Canislupusarctos en [Wikimedia commons](#). Licencia [CC](#)

Los elementos que forman la fracción, y que se escriben separados por una raya horizontal, son:

- El **denominador**. Es el número de abajo, indica el número de partes iguales en que se divide la unidad.
- El **numerador**. Es el número de arriba, indica la cantidad de esas partes que se toman.

$$\frac{1}{4}$$

← numerador

← denominador

¿Cómo leemos las fracciones?

Primero se lee el numerador como cualquier número, y a continuación el denominador de la siguiente manera:

- Si es 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se lee: medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos y novenos.
- Si es 10 se lee décimos; si es mayor que 10 se lee el número añadiendo la terminación -avos.

Así, un minuto es un sesentavo de hora y se representa por $\frac{1}{60}$. Si tomamos cinco minutos, se lee como cinco sesentavos de hora, y se representa por $\frac{5}{60}$.



Importante

Una fracción también puede entenderse como el **cociente de dos números**. Es decir, es una división sin realizar. Donde el numerador es el dividendo y el denominador el divisor.

Luego, para saber cuál es el valor de una fracción deberíamos realizar esa división. Sin embargo, con la simple observación del numerador y del denominador podemos hacernos una idea de ese valor:

- Si el numerador es más pequeño que el denominador, entonces la fracción vale menos de 1.
- Cuanto más cerca esté el numerador del denominador más cerca estará el valor de 1.
- Si el numerador es mayor que el denominador, entonces la fracción vale más de 1.

En general, su valor será más grande cuanto mayor tenga el numerador (a igual denominador), y será más pequeño cuanto mayor tenga el denominador (a igual numerador).



Comprueba lo aprendido

En el siguiente applet, prueba a ordenar las fracciones siguiendo las directrices anteriores:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_fracciones-JS/1q5_ejercicios_resueltos_1d.htm

otras fracciones



Caso práctico

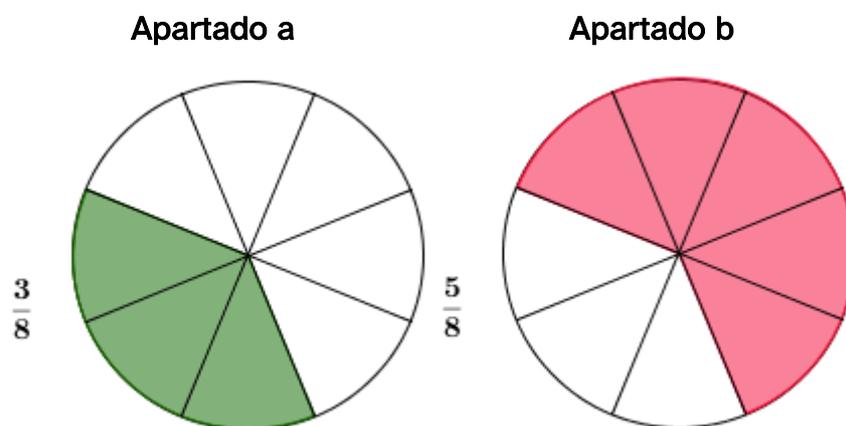
María se ha comido 3 partes de un bizcocho que se había dividido previamente en 8 partes iguales.

- ¿Qué fracción representa lo que se ha comido María?
- ¿Y la parte de bizcocho que ha sobrado?
- Representa cada una de las fracciones anteriores mediante un dibujo.

a) 8 partes representa el total, luego será el denominador. El numerador de la fracción será las partes que se ha comido, 3: $\frac{3}{8}$

b) El total sigue siendo el mismo, pero cambia el numerador ya que las partes que no hemos consumido son 5: $\frac{5}{8}$

c)



Importante

Todo número que pueda ponerse en forma de fracción se dice que es un **número racional**.



Reflexiona



¿Son los números enteros y naturales números racionales?

Sí, ya que cualquier número entero se puede expresar como fracción tomando como denominador la unidad.



Para saber más

Ya hemos visto que entre las fracciones existe una relación de orden, por lo que se ubican en la recta real

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/dzvisISMPxM](https://www.youtube.com/embed/dzvisISMPxM)

Vídeo de Fikima Aula Abierta alojado en [Youtube](#)



Curiosidad

LEGO es una empresa y marca de juguetes danesa reconocida principalmente por sus bloques de plástico que se conectan entre sí y permiten hacer construcciones.

Dada su popularidad, su fácil manejo y su atractivo visual, se pueden utilizar para ejemplificar situaciones matemáticas, tal y como se recoge en en este artículo que te enlazamos: [Aprende Matemáticas con Lego. Concretando lo abstracto.](#)

Te recomendamos el siguiente vídeo. Aunque las pocas palabras que aparecen están en inglés, solo la exposición te puede ayudar a comprender el concepto de fracciones equivalentes.

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/JONriZyiYpM](https://www.youtube.com/embed/JONriZyiYpM)

Maths activity: How to teach fractions using Lego



Vídeo de kispot alojado en [Youtube](#)

2.2 Operaciones con fracciones

Una de las peculiaridades que plantean las fracciones es que una misma medida (un mismo número) puede expresarse de formas distintas. Así media hora $\frac{1}{2}$ puede expresarse también como 30 minutos, $\frac{30}{60}$ de hora, o como dos cuartos de hora, $\frac{2}{4}$.

Esto en principio puede considerarse un trastorno, pero precisamente esta propiedad es la que nos permite comparar, sumar y restar fracciones.

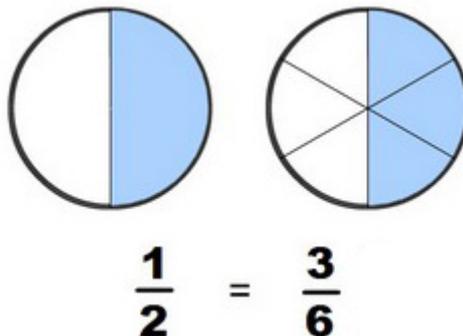


Fotografía por Security en [Pixabay](#). Licencia [CC](#)



Importante

Llamamos **fracciones equivalentes** a aquellas que representan la misma cantidad. Para comprobar que dos fracciones son equivalentes multiplicamos en cruz el numerador de la primera por el denominador de la segunda, y si obtenemos el mismo resultado que al multiplicar el denominador de la primera por el numerador de la segunda, entonces las fracciones son equivalentes.



$$1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$$

Mira el siguiente vídeo para aprender sobre las fracciones equivalentes:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/P6UXdUMc_g4](https://www.youtube.com/embed/P6UXdUMc_g4)

Vídeo de TutoMate alojado en [Youtube](#).

En los siguientes vídeos vamos a aprender: a **reducir a común denominador**, a **simplificar fracciones**, a **sumar y restar fracciones** y a **multiplicar y dividir fracciones**:

[Enlace a recurso reproducible >>](https://www.youtube.com/embed/mPT7Nd76tjQ)
<https://www.youtube.com/embed/mPT7Nd76tjQ>

Video de TutoMate alojado en [Youtube](#).

[Enlace a recurso reproducible >>](https://www.youtube.com/embed/st6Yq5FHDqI)
<https://www.youtube.com/embed/st6Yq5FHDqI>

Video de TutoMate alojado en [Youtube](#).

[Enlace a recurso reproducible >>](https://www.youtube.com/embed/aSAsqyzk4_4)
https://www.youtube.com/embed/aSAsqyzk4_4

Video de TutoMate alojado en [Youtube](#).

[Enlace a recurso reproducible >>](https://www.youtube.com/embed/VcInqJAUYA0)
<https://www.youtube.com/embed/VcInqJAUYA0>

Video de TutoMate alojado en [Youtube](#).

Las operaciones **suma, resta, producto y división** con fracciones tienen las mismas propiedades que las operaciones con números enteros y **se mantiene la misma jerarquía** para las operaciones combinadas.

Si recuerdas, en el pasado tema hicimos mucho hincapié en la importancia de adquirir soltura en los cálculos y de memorizar los procedimientos que nos llevan a la solución.

Con las fracciones ocurre exactamente lo mismo, ya que el éxito en este tipo de operaciones está en ser cuidadoso y meticulado en los procedimientos. Por ello, te dejamos un vídeo muy sencillo que te ayudará a interiorizar y mecanizar estas operaciones.

[Enlace a recurso reproducible >>](https://www.youtube.com/embed/q!DudXvPz6c) <https://www.youtube.com/embed/q!DudXvPz6c>



Video de lasmatematicas.es alojado en [Youtube](#).



Ejercicio Resuelto

Resuelve las siguientes operaciones:

a. $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{6}\right)$

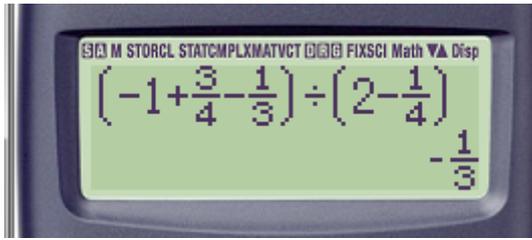
b. $\left(-1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) : \left(2 - \frac{1}{4}\right)$

No te olvides: simplificar los resultados y comprobarlos con la calculadora.

a. $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{10}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{6} = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}$



b. $\left(-1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) : \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{-12 + 9 - 4}{12}\right) : \left(\frac{8 - 1}{4}\right) = \frac{-7}{12} : \frac{7}{4} = -\frac{1}{3}$



Ya hemos dicho que las operaciones aparecen en muchas situaciones reales, pero si te paras a pensar descubrirás que en muchos de los casos aparece ligada a la preposición "de". Por ejemplo: "un tercio de los diputados del congreso", "una cuarta parte del dinero es destinado al consumo de alimentos de primera necesidad"...

En el siguiente vídeo, vas a descubrir a través de varios ejemplos cómo calcular la fracción de un número.

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/gmFjI0IxFMk](https://www.youtube.com/embed/gmFjI0IxFMk)

Video de TutoMate alojado en [Youtube](https://www.youtube.com).



Caso práctico

1. Un profesor sabe que en su próxima clase encontrará más chicas que chicos. $\frac{5}{7}$ del grupo son chicas y en total son 28. ¿Cuántas chicas hay en esa clase?

Calcula $\frac{5}{7}$ de 28.

Recuerda para hacer la fracción de un número se multiplica el número por el numerador y se divide, el producto, por el denominador.

$$\frac{5}{7} \cdot 28 = \frac{5 \cdot 28}{7} = 20. \text{ Hay 20 chicas en la clase.}$$

2. Uno de las alumnas, Meki que tiene 250 € ahorrados, piensa gastarse $\frac{3}{5}$ de su dinero en ropa, $\frac{7}{10}$ de lo que aún le quede en música y 30 € en un libro. Lo que le sobre se lo regalará a su hermana. ¿Es muy generosa con su hermana?

Calcula cada uno de los gastos y réstalo del total restante. Verá como tras comprar el libro no le queda nada.

Veamos: $\frac{3}{5} \cdot 250 = \frac{3 \cdot 250}{5} = 150$, luego en ropa se ha gastado 150 €, le queda por tanto, 100 €, la diferencia $250 - 150 = 100$.

Ahora gasta siete décimos de los 100 en música, $\frac{7}{10} \cdot 100 = \frac{7 \cdot 100}{10} = 70$, gasta 70 € en música y, por tanto, le quedan 30 € ($100 - 70 = 30$). Como en el libro se va a gastar 30 €, no le queda nada para su hermana.



Comprueba lo aprendido

Puedes repasar las operaciones combinadas con fracciones con el siguiente applet:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_fracciones-JS-LOMCE/2q2_ejercicios_resueltos_3f.htm

Escena de J. Rodríguez Villanego en [Proyecto Descartes](#). Licencia [CC](#)



Reflexiona

Seguro que recuerdas que el primer viaje del hombre a la Luna fue realizado por la nave espacial Apolo XI, siendo sus tripulantes los astronautas Neil Armstrong, Edwin Aldrin y Michael Collins.

El lanzamiento se realizó el día 16 de julio de 1969, y la vuelta a la Tierra tuvo lugar el 24 de julio. En pocas palabras, el viaje consistió en ir de la Tierra a la Luna, alunizar en nuestro satélite, y el viaje de regreso de la Luna a la Tierra.

La mitad del tiempo de este viaje correspondió a la ida. Del resto del tiempo, una cuarta parte fue la que estuvo el módulo espacial en la superficie de la Luna.

¿Qué fracción del viaje total correspondió al regreso y a la estancia en la Luna?
¿Cuántos días duró cada una de las fases?

El viaje al completo duró 8 días. Luego la mitad que corresponde a la ida son 4 días.

Una cuarta parte del resto del viaje es 1 día. Por tanto, en el regreso tardó 3 días, que son las $\frac{3}{8}$ partes del total del viaje.

A la estancia en la Luna le corresponde una cuarta parte de la mitad, es decir $\frac{1}{8}$ del total.



Curiosidad

Está documentado que los babilonios ya conocían y operaban con fracciones hacia el 2000 a.C. Su forma de representarlas era muy parecida a la actual, con la curiosidad de utilizar sólo las potencias de 60 como valores del denominador.



En el **Papiro Rhind** de los egipcios, hallamos fracciones propias, con la unidad como numerador (unitarias).

Fotografía de Vulano en [Wikimedia Commons](#). Licencia [CC](#)

Las fracciones unitarias estaban escritas utilizando un símbolo en forma de boca y el denominador debajo de este símbolo. Excepto para la fracción $\frac{2}{3}$ que tenía un símbolo especial, todas las otras fracciones con numerador diferente a 1 las escribían como suma de fracciones unitarias.

Por ejemplo, en vez de $\frac{3}{5}$ escribían $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ o para $\frac{6}{7}$ escribían $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$.

En la actualidad, se ha llegado a la conclusión de que los hindúes escribían fracciones como lo hacemos hoy, pero sin la barra horizontal, elemento que fue invención árabe.

3. Números decimales

Los números decimales están tan integrados en nuestra vida cotidiana como las fracciones, aunque operar con ellos resulta mucho más intuitivo. Por ejemplo, cuando acudimos a una gasolinera y nos fijamos en los carteles en los que figura el precio del litro de gasolina, podemos descubrir que dicho precio aparece con tres decimales:



Fotografía en [Pxhere](#). Licencia [CC](#)

Sin embargo, cuando acudimos a la caja a pagar el precio total nos lo dan con dos decimales. Esto quiere decir que nuestra cuenta ha sufrido un redondeo, ya que en nuestro sistema monetario solo disponemos de monedas de céntimo para pagar.

3.1 Expresión decimal de una fracción

Como ya hemos visto, los números enteros no son suficientes para expresar todas las situaciones de la vida cotidiana. Precisamente utilizamos las fracciones para expresar partes de un total y las expresamos como una división sin realizar; pero... ¿qué ocurre si efectuamos dicha división entre el numerador y el denominador y obtenemos un resultado con resto distinto de 0? ¿Podemos seguir repartiendo el resto sobrante?

La respuesta es afirmativa, y obtendríamos un número decimal.

Los números decimales forman parte de nuestra rutina, puede que incluso más que las fracciones. Usamos los números decimales cuando pagamos con monedas de céntimo: esto cuesta 3,45 €, cuando expresamos nuestra altura: mido 1,62 metros...



Fotografía de Alexas_Fotos en [Pixabay](#). Licencia [CC](#)



Importante

Los números decimales están formados por una **parte entera** y otra **parte decimal**, **separadas por una coma**. Para expresar la parte decimal recurrimos a las unidades decimales (décimas, centésimas, milésimas...):



Donde el 5 son las décimas y 1 las centésimas.

Para pasar de fracción a decimal ya hemos visto que hay que efectuar la división entre numerador y denominador. Aunque lo normal es que recurras a la calculadora para dicha

operación, si quieres refrescar la memoria te dejamos el siguiente [vídeo](#).

Una vez realizada la operación el cociente puede ser:

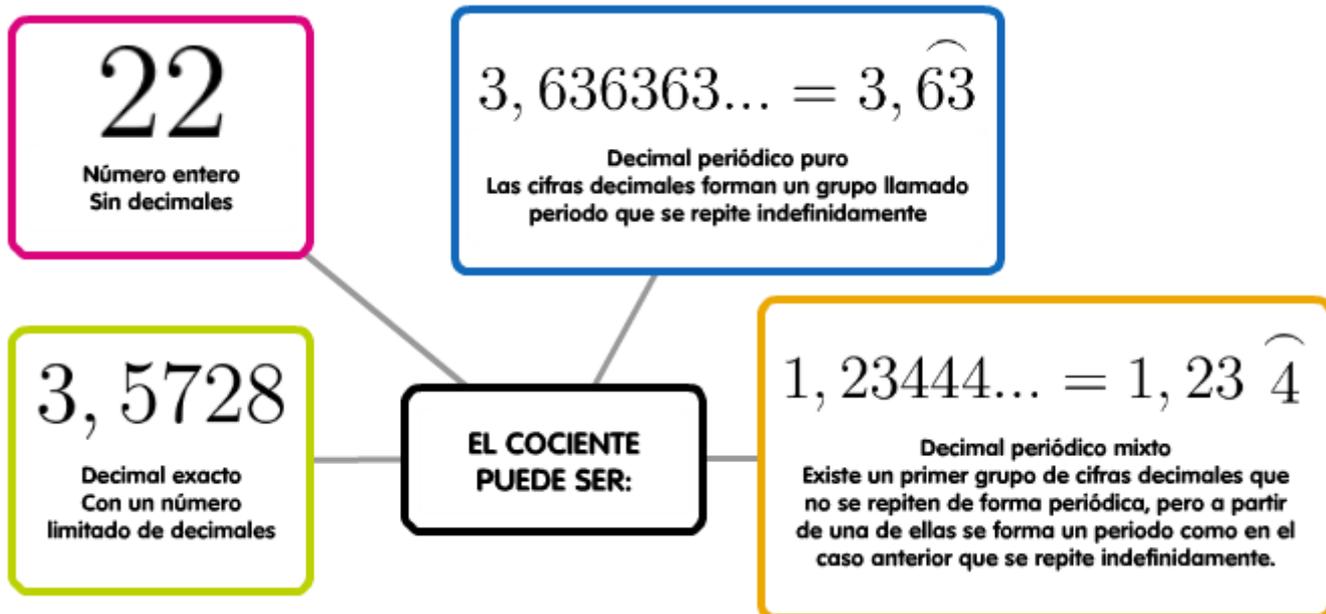


Imagen de elaboración propia.



Comprueba lo aprendido

En el siguiente applet puedes practicar estos conceptos. Para hacer la actividad más ágil, te recomendamos que uses la calculadora para realizar las divisiones:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_decimales-JS-LOMCE/2q3_ejercicios_resueltos_3a.htm

Escena de J. Rodríguez Villanego en [Proyecto Descartes](#). Licencia [CC](#)

Operaciones con números decimales

En la siguiente presentación puedes descubrir cómo se opera con números decimales. Al igual que pasaba con las fracciones las operaciones básicas, conservan las mismas propiedades:

https://docs.google.com/presentation/d/1S-WvXPEv_MybTwS8MSDiNVqzJsgoCoG0wzisZe71ue0/embed?start=false&loop=false&delayms=3000

Presentación de elaboración propia.



Caso práctico

Marcos ha sacado dinero de su cuenta corriente utilizando la tarjeta de crédito en un cajero automático. Ha sacado 120 €, pero ha perdido el comprobante de la operación y no puede saber el saldo que tiene. Mirando el comprobante de la última vez que usó la tarjeta observa que tenía 904,21 €. Después le han ingresado la nómina del mes, de 1339,56 € y ha pagado de esa cuenta los recibos de la luz cuyo importe ha sido de 53,21 €, del alquiler del piso, por un valor de 320,80 € y la letra del coche, de 207,95 €.

1. ¿Qué saldo indicaba el comprobante que ha perdido Marcos?

Si tenía 904,21 € y recibe la nómina:

$904,21 + 1339,56$ sería el saldo antes de pagar los gastos y sacar dinero.

Luego, el saldo final se obtiene de:

$904,21 + 1339,56 - 53,21 - 320,80 - 207,95 - 120 = 1541,81$ €.

2. Al llegar a su casa Marcos encuentra el aviso de cobro de dos domiciliaciones: agua, 32,67 €, y seguro del coche, 437,45 €. Con el dinero que le quede después de esos pagos quiere hacer 3 partes iguales, una para comprar un

ordenador que cuesta 380 €, otra para libros y música y la tercera para sus gastos. ¿Podrá comprarse el ordenador?

Tenía 1541,81.

Ahora: $1541,81 - 32,67 - 437,45 = 1071,69$

Y esta cantidad dividida entre 3 sale a 357,23 €.

Si quiere comprarse el ordenador no podrá cumplir los planes previstos.



Curiosidad

Aunque todas las fracciones se pueden expresar en forma decimal, no todos los números decimales se pueden expresar en forma de fracción. Estos números se llaman **irracionales**, y los estudiaremos más adelante.



Comprueba lo aprendido

Puedes repasar las operaciones **combinadas con decimales** con el siguiente applet, eligiendo en el desplegable combinadas:

http://proyectodcartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_decimales-JS/1q4_ejercicios_resueltos_2c.htm

Escena de Juan Simón Santamaría en [Proyecto Descartes](#). Licencia [CC](#)



Juego del Rosco

Los recursos de tipo Juego, no se muestra en las versiones imprimibles

Resumen



Importante

Lo esencial de las fracciones

Una **fracción** es una expresión $\frac{a}{b}$ siendo a y b números enteros y $b \neq 0$. Al número de arriba se le llama numerador y al de abajo denominador.

Una **fracción** también puede entenderse como el **cociente de dos números**. Es decir, es una división sin realizar. Donde el numerador es el dividendo y el denominador el divisor.

Todo número que pueda ponerse en forma de fracción se dice que es un **número racional**.

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes**, si se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$.

Reducir fracciones a común denominador es buscar otras fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Para **sumar o restar** fracciones se transforman en fracciones equivalentes con el mismo denominador (que es el mcm de los denominadores). A continuación, el denominador común se divide entre cada denominador y se multiplica por el numerador correspondiente. Por último, se deja el denominador común y se suman o restan los numeradores.

El **producto** de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

La **división** de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y como denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.



Importante

Lo esencial de los números decimales

Para expresar en **forma decimal una fracción**, dividimos el numerador entre el denominador.

Todo número decimal tiene una **parte entera** y **otra decimal**, separadas por la **coma decimal**.

Un número decimal puede ser:

- **Decimal exacto.** Posee una cantidad limitada de decimales: 45,128
- **Periódico puro.** Un grupo de decimales se repite indefinidamente, el periodo: 4,8585...
- **Periódico mixto.** Tiene uno o más decimales seguidos de un periodo: 4,21777...

Para **sumar o restar** números decimales se colocan los números en columna y se opera como si fueran números naturales, manteniendo la coma en su lugar correspondiente.

Para **multiplicar números decimales** se opera como si fueran números naturales. A continuación, se sitúa la coma en el resultado contando tantas cifras de derecha a izquierda como decimales tengan entre los dos factores.

Para **dividir números decimales**, al bajar la primera cifra decimal se pone la coma en el cociente. En otros casos, cuando hay decimales en el divisor, se multiplican dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya en el divisor.

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

<http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space>