MT1 - Tema 1.3: Aritmética: Números complejos

Aritmética: Números complejos

Matemáticas I

1.º Bachillerato

Contenidos

Aritmética

Números complejos

1. Introducción: números imaginarios

Históricamente los números complejos tienen su origen en los intentos que llevaron a cabo los matemáticos europeos del siglo XVI para resolver ecuaciones como la siguiente:

$$x^2+1=0$$

Cuya solución:

$$x=\pm\sqrt{-1}$$

Imagen de Jakob Emanuel Handmann en Wikimedia Commons. Dominio Público

No es un número real. Este resultado no resultaba satisfactorio para matemáticos como Rafael Bombelli, el cual en 1572 dio los primeros pasos para encontrar una solución a este problema, la cual pasaba por la concepción de un nuevo tipo de números diferentes a los reales. Fue Euler quien en el siglo XVIII les dio nombre: los números imaginarios.

Importante

$\sqrt{-1}$ no existe dentro del conjunto de los números reales, es decir; no existe ningún número real que elevado al cuadrado de -1. Vamos a definir un nuevo número (que no pertenece los reales), el cual se designa por la letra i, que va a cumplir la condición $i^2=-1$, o bien i= $\sqrt{-1}$, a i se le conoce como unidad imaginaria .

Así pues, las raíces cuadradas del número real negativo -a serán.

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a(-1)}=\sqrt{a}\sqrt{-1}=\pm\sqrt{a}\ \ i$$

Por ejemplo. La ráiz cuadrada de -4 sería.

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=\pm 2\ \ i$$

Importante

A los números de la forma bi, siendo b un número real e i la unidad imaginaria, se les conoce como números imaginarios o imaginarios puros. Ejemplos de números imaginarios son los siguientes:

$2i,\ 3i,\ -i,\ \sqrt{2}i,\ \frac{2}{3}i,\ \ i,\ \ etc.$

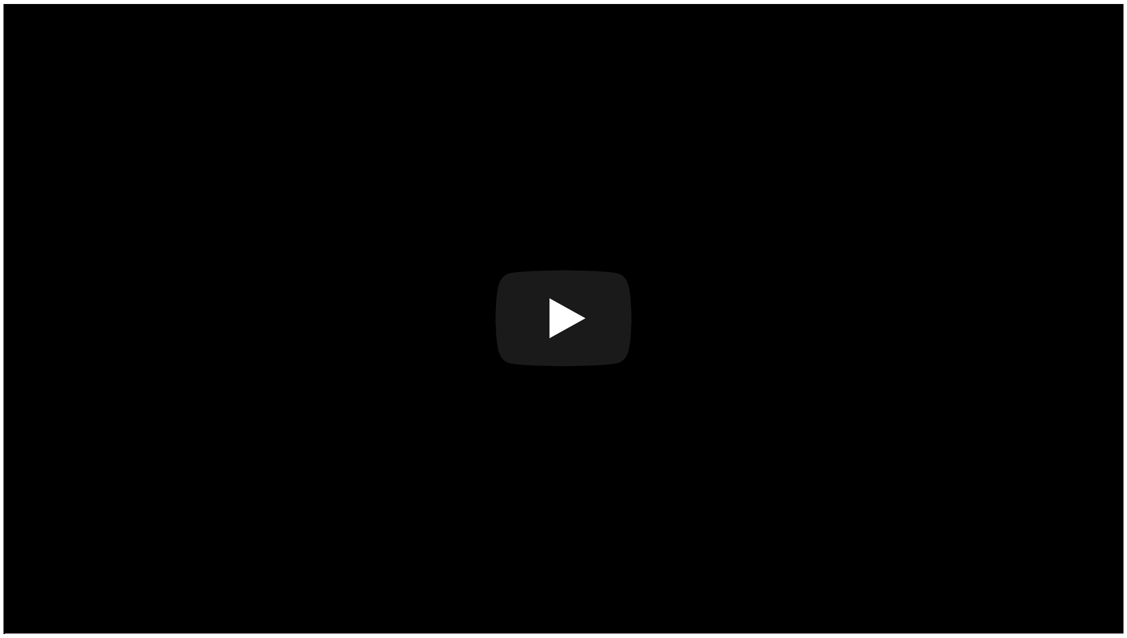
Ejercicio Resuelto

Hallar las siguientes raíces: $\sqrt{-9},\ \sqrt{-3}, \sqrt{-25}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{-9} &= \sqrt{(-1)9} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{9} = \pm 3i \\
\sqrt{-3} &= \sqrt{(-1)3} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{3} = \pm\sqrt{3}i \\
\sqrt{-25} &= \sqrt{(-1)25} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{25} = \pm 5i
\end{aligned}$$

Para saber más

¿Qué son los números complejos?



Vídeo de Derivando alojado en Youtube

2. Números complejos

La creación de los números imaginarios era solo un primer paso para resolver el problema que planteaba la aparición de raíces cuadradas de números negativos en la resolución de ecuaciones. No fue hasta el siglo XIX cuando Gauss aportó una solución definitiva dando a luz a los números complejos , los cuales resultan de la unión de los números reales que vimos en el tema 2 de esta unidad, con los números imaginarios que hemos visto en el apartado anterior, concibiéndolos gráficamente como puntos y vectores del plano. Hoy en día los números complejos tienen importantes aplicaciones en los campos de la física y la ingeniería de tal manera que ya no podemos pasar sin ellos.

Fotografía de Free-Photos en Pixabay. Licencia Pixabay

2.1. Forma binómica

Importante

Llamaremos número complejo z a todo número de la forma a+bi, siendo "a" la parte real y "bi", la parte imaginaria . A la forma a+bi se la conoce como forma binómica de un número complejo. El conjunto de todos los números complejos se designa por C.

Ejemplo

Los números 3+4i, -2+2i, $\sqrt{5}+4i$, $\pi-4i$ son números complejos.

Los números imaginarios pueden ser considerados números complejos cuya parte real es cero, así por ejemplo: 2i=0+2i, -i=0-i, 4i=0+4i, etc. A partir de ahora solo hablaremos de números complejos.

Para representar gráficamente números reales o conjuntos de números reales, se usa la recta numérica, que tiene sólo una dimensión. Sin embargo, los números complejos (z=a+bi) al tener dos componentes para representarlos utilizamos lo que se conoce como plano complejo , en el cual cada punto del mismo es un número complejo. Para representar el número complejo a +bi, en primer lugar definimos en este plano dos ejes, un eje real para la parte real, y un eje imaginario para la parte imaginaria, a continuación marcamos el punto que viene dado por el par ordenado de números (a, b), tal como se muestra en la imagen de la derecha.

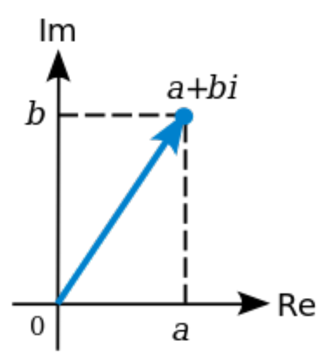
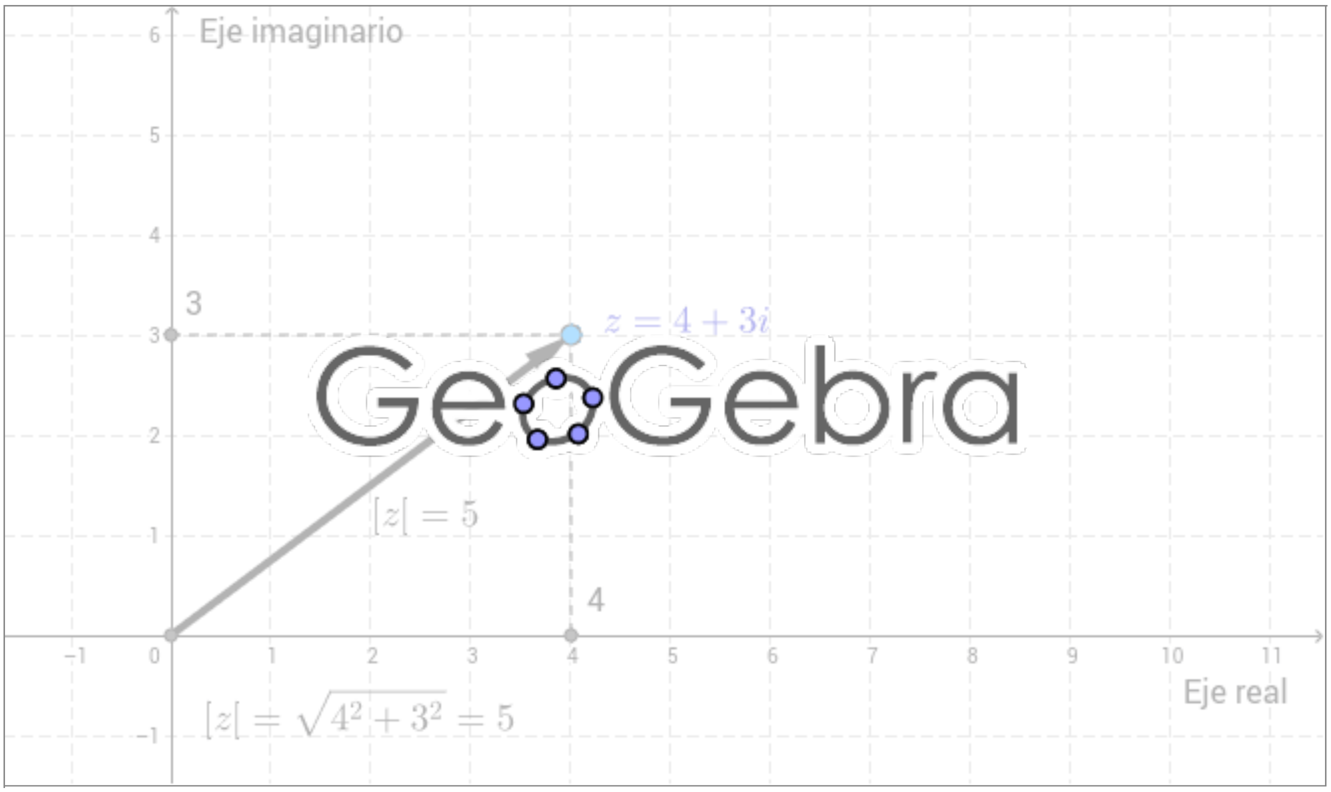


Imagen de Wolfkeeper en Wikimedia Commons.

Licencia CC

En esta imagen también podrás ver una flecha azul, esta figura es la representación gráfica de un vector, en la unidad dedicada a Geometría estudiarás los vectores en detalle, de momento lo que te interesa saber es que, geométricamente hablando, un vector es un segmento orientado, dotado de dirección (la recta donde se puede considerar situado el vector), sentido (el que marca la flecha) y módulo (longitud del vector). Un vector viene dado por sus coordenadas, que en el caso de la imagen de la derecha es (a,b). Un número complejo también puede ser considerado como un vector del plano, como vamos a ver más abajo.

La siguiente escena de Geogebra te muestra el plano complejo y la representación en el mismo, como un punto azul de coordenadas (4,3), del número complejo z=4+3i, este número también se puede considerar un vector (en negro) de las mismas coordenadas, cuyo módulo (longitud) viene dado por $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, en nuestro caso $|z|=\sqrt{4^2+3^2}=5$.Si en la escena mueves el punto azul por el plano podrás ver distintos números complejos asociados al mismo, con su representación gráfica y el módulo del vector que le corresponde.



Importante

Llamaremos módulo del número complejo z=a+bi al módulo del vector v=(a,b), es decir:

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

donde tomamos la raíz positiva.

Se llama opuesto del número complejo z=a+bi al número complejo -a-bi que designaremos por -z.

Se llama conjugado del número complejo z=a+bi al número complejo a-bi, que designaremos por $\bar{z}$.

Comprueba lo aprendido

Si tenemos el número complejo z=4+3i, su ________ es $|z|=\sqrt{4^2+3^2}=5$, su ________ es el -z=-4-3i y

su ________ sería $\bar{z}=4-3i$.

Ejercicio Resuelto

Halla el módulo de los siguientes números complejos.

a) 2+3i

b) 1-2i

c) 4+5i

$a)\ |z|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

$b)\ |z|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$c)\ |z|=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$

2.2. Suma y producto de números complejos en forma binómica

Con los números complejos podemos realizar las operaciones aritméticas básicas, lo mismo que con cualquier otro tipo de número.

Importante

Dados dos números complejos z=a+bi, w=c+di, definimos la suma z+w como el nuevo número complejo (a+c)+(b+d)i.

Ejemplo

Si tenemos los números complejos z=4+3i, w=2-i, su suma z+w sería: z+w=(4+2)+(3-1)i=6+2i.

La suma de números complejos cumple las siguientes propiedades:

Asociativa

$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3, \ \ para \ \ z_1,z_2,z_3 \in C$

Existencia de elemento neutro

Existe un número complejo 0=0+0i, tal que para todo número complejo z se tiene que z+0=0+z=z.

Existencia de elemento opuesto

Para cada número complejo z existe otro número complejo, -z, tal que:

z+(-z)=(-z)+z=0

Conmutativa

Dados dos números complejos z y w se cumple:

z+w=w+z

En el siguiente [applet de Geogebra](#) puedes practicar la suma de números complejos. Mueve los puntos z_1 y z_2 para variar los números complejos.

Veamos un ejemplo de operaciones con números complejos:

Vídeo de lasmatematicas.es alojado en [Youtube](#)

Importante

El producto del número real λ por el número complejo z=a+bi es el número complejo $\lambda\ a+\lambda\ bi$, es decir.

$$\lambda\ z=\lambda\ (a+bi)=\lambda\ a+\lambda\ bi$$

Ejemplo

Dado z=2-3i hallar 4z.

$$4z=4\cdot(2-3i)=4\cdot2-4\cdot3i=8-12i$$

Ejercicio Resuelto

Dados dos números complejos z=a+bi y w=c+di, el producto de los mismos se realiza de la siguiente forma, teniendo en cuenta que $i^2=-1$.

$$z\cdot w=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bic+bdi^2=ac+adi+bic-bd=ac-bd+(ad+bc)i$$

Ejemplo

Dados z=2-3i y w=3+3i hallar $z\cdot w$.

$$z\cdot w=(2-3i)(3+3i)=2\cdot3+2\cdot3i-3\cdot3i-3\cdot3i^2=6+6i-9i-3\cdot3(-1)=6+6i-9i+9=6+9+6i-9i=15-3i$$

El producto de dos números complejos cumple las siguientes propiedades.

Asociativa

$$z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3 \quad para \quad z_1,z_2,z_3 \in C$$

Conmutativa

$$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1 \quad para \quad z_1,z_2\in C$$

Existencia de elemento neutro

Existe un número complejo, el 1=1+0i, tal que para todo número complejo z se tiene que $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$.

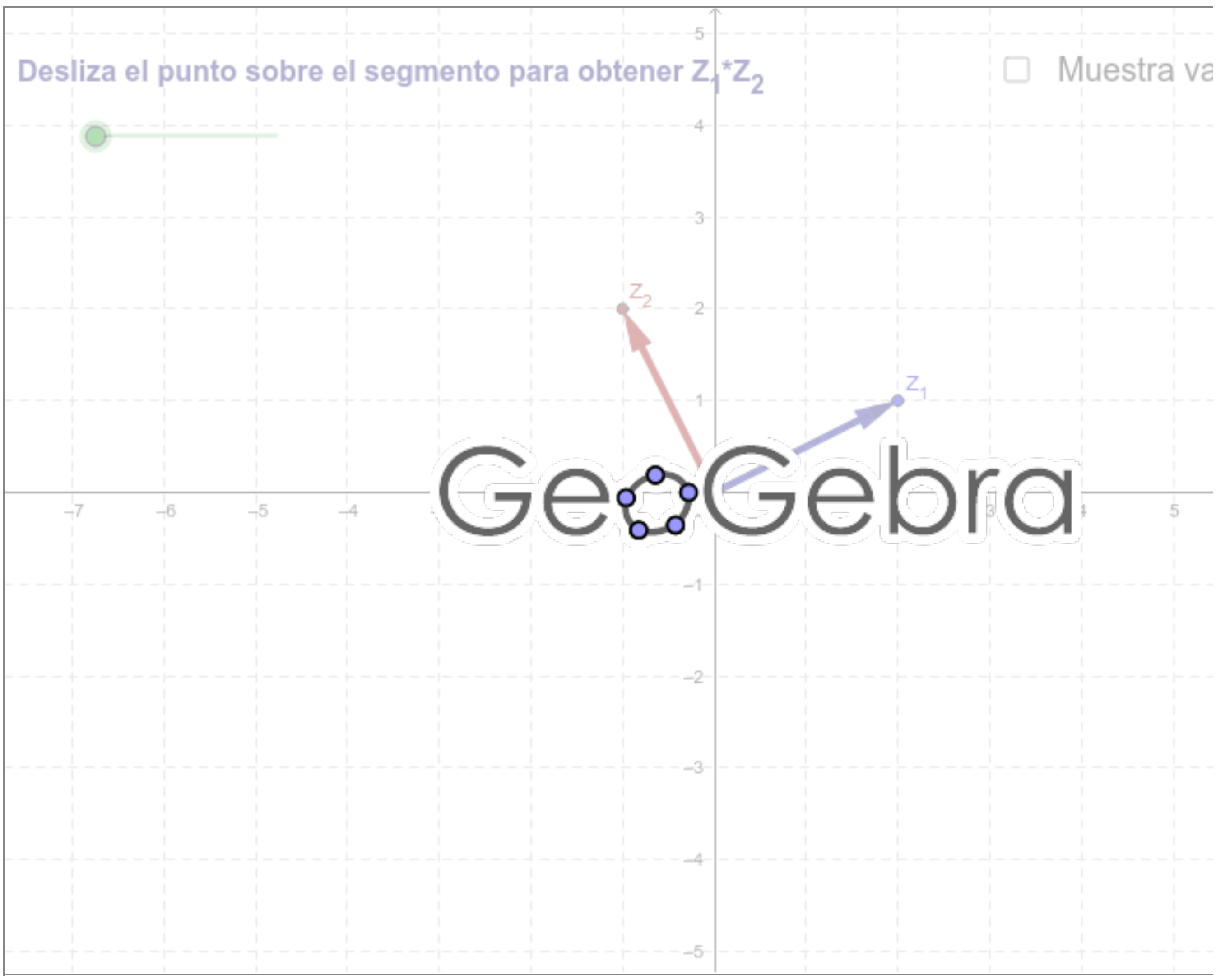
Existencia de elemento simétrico (inverso)

Para todo número complejo $z \neq 0$ existe otro número complejo, que designamos por z^{-1}, tal que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

Distributiva respecto de la suma

$$z_1(z_2+z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad para \quad z_1, z_2, z_3 \in C$$

En el siguiente applet de Geogebra de Ana Guadalupe Del Castillo puedes practicar el producto de números complejos. Mueve los puntos z_1 y z_2 para variar los números complejos.



Realiza las siguientes operaciones.

a) $(3-2i)(4+3i)$
b) $(-2+4i)(2i)$
c) $(3+4i)(3-4i)$

a) $(3-2i)(4+3i)=3\cdot 4+3\cdot 3i-2\cdot 4i-6i^2=12+9i-8i+6=18+i$
b) $(-2+4i)(2i)=-4i-8=-8-4i$
c) $(3+4i)(3-4i)=3\cdot 3-3\cdot 4i+4\cdot 3i-16i^2=25$

2.3. Cociente y potencias de números complejos en forma binómica

El producto de un número complejo z por su conjugado $\bar{z}$ siempre es un número real, es decir:

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in R$$

Además se observa que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Este último resultado nos va a servir para definir el cociente de dos números complejos.

Importante

Dado los números complejos z_1 y z_2 su cociente es:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

En el siguiente applet de Geogebra de Ana Guadalupe Del Castillo puedes practicar el cociente de números complejos. Mueve los puntos z1 y z2 para variar los números complejos.

Ejercicio Resuelto

Dados $z_1 = 1+3i \quad y \quad z_2 = 2+4i$ halla $\frac{z_1}{z_2}$.

$$\overline{z_2} = 2-4i$$
$$|z_2|^2 = 2^2+4^2 = 20$$
$$\frac{1+3i}{2+4i} = \frac{(1+3i)(2-4i)}{20} = \frac{14+2i}{20} = \frac{14}{20}+\frac{2}{20}i = \frac{7}{10}+\frac{1}{10}i$$

Antes de ver cómo se calculan las potencias de un número complejo hemos de estudiar las sucesivas potencias de i.

$i^1 = i$
$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i^1 = (1)(i) = i$
$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (1)(-1) = i^2 = -1$
......

Se observa que las sucesivas potencias de i se repiten después de cuatro pasos, proporcionando tan sólo cuatro valores distintos, i, -1, -i y 1. Como $i^4 = 1$, se tiene que $(i^4)^k = 1$,cualquiera que sea el número natural k. Para calcular i^nbastará expresar el exponente como 4k+r, siendo k un entero no negativo y el resto r es 0,1,2 ó 3. Por tanto:

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$$

Y este número será i, -1, -i ó 1, según que r sea 1,2,3 ó 0.

Ejercicio Resuelto

Halla las siguientes potencias de i.

a) i^{325}
b) i^{219}
c) i^{1000}

a) $i^{325} = i$

Dividimos 325 entre 4 y obtenemos de cociente(k) 81 y resto(r) 1, por lo que i^{325} podemos ponerlo de la forma $i^{4 \cdot 81+1}$. De arriba sabemos que $i^{4 \cdot 81+1} = i^1 = i$

b) $i^{219} = -i$

Dividimos 219 entre 4 y obtenemos de cociente(k) 54 y resto(r) 3, por lo que i^{219} podemos ponerlo de la forma $i^{4 \cdot 54+3}$. De arriba sabemos que $i^{4 \cdot 54+3} = i^3 = -i$

c) $i^{1000} = 1$

Dividimos 1000 entre 4 y obtenemos de cociente(k) 250 y resto(r) 0, por lo que

i^{1000} podemos ponerlo de la forma $i^{4\cdot 250+0}$. De arriba sabemos que $i^{4\cdot 250+0}=i^{0}=1$

Importante

Sea z=a+bi, para calcular z^n, siendo n un número natural, emplearemos la fórmula del binomio de Newton.

En el siguiente applet de Geogebra de Ana Guadalupe Del Castillo puedes practicar la potencia de un número complejo.

Calcular $(1+2i)^5$.

$$(1+2i)^5=1^5+5\cdot1^4\cdot(2i)+10\cdot1^3\cdot(2i)^2+10\cdot1^2\cdot(2i)^3+5\cdot1\cdot(2i)^4+(2i)^5$$
$$(1+2i)^5=1+10i-40-80i+80+32i$$
$$(1+2i)^5=41-38i$$

Curiosidad

Existen otras formas de expresar un número complejo: forma trigonométrica y forma polar, que veremos en el último bloque de este curso, ya que se precisan algunos conocimientos de geometría plana.

Dada la complejidad que presenta el cálculo de la raíz de un número complejo en forma binómica, esta operación también se verá más adelante aplicando el Teorema de Moivre, cuando demos la forma trigonométrica de un número complejo.

Resumen

Importante

$\sqrt{-1}$ no existe dentro del conjunto de los números reales, es decir; no existe ningún número real que elevado al cuadrado de -1. Vamos a definir un nuevo número (que no pertenece los reales), el cual se designa por la letra i, que va a cumplir la condición $i^2 = -1$, o bien i=$\sqrt{-1}$, a i se le conoce como unidad imaginaria .

Importante

A los números de la forma bi, siendo b un número real e i la unidad imaginaria, se les conoce como números imaginarios o imaginarios puros. Ejemplos de números imaginarios son los siguientes:

$2i,\ 3i,\ -i,\ \sqrt{2}i,\ \frac{2}{3}i,\ \ i,\ \ etc.$

Importante

Llamaremos número complejo z a todo número de la forma a+bi, donde a y b son números reales. El conjunto de todos los números complejos se designa por C.

Un número complejo a+bi se puede considerar formado por una parte real "a", y una parte imaginaria "bi", de ahí que el número imaginario bi sea en realidad un número complejo de la forma 0+bi (a=0). A partir de ahora solo hablaremos de números complejos.

A la forma a+bi se le conoce como forma binómica de un número complejo.

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito NDVA.

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y