



Geometría: Plano euclídeo

Matemáticas I

1º Bachillerato

Contenidos

Geometría
Plano Euclídeo

1. Posiciones relativas de rectas en el plano

"Sinuhé afrontaba su etapa final. No podía recordar los días que llevaba viajando, siguiendo las instrucciones de Eratóstenes.

Días y días mirando la posición del sol, hallando la ruta más corta, calculando y anotando distancias recorridas.

Sinuhé llegó a la ciudad de Luxor, y al acercarse a un pozo en el que beber agua, se encontró con Pazair, un egipcio que había conocido días atrás.

- Saludos Pazair, me alegro de encontrarte de nuevo, ¿cómo es que no hemos coincidido por el camino? - preguntó Sinuhé.

- Quisieran los dioses que volviéramos a encontrarnos, debemos haber seguido caminos paralelos desde que nos despedimos.

*- Lo dudo amigo Pazair, pues **los caminos paralelos nunca han de encontrarse**".*



Imagen de Falkenpost en [Pixabay](#). Licencia [Pixabay](#).



Importante

Las rectas en el plano sólo pueden situarse de tres formas: o no se cortan (**paralelas**), o se cortan en un punto (**secantes**), o una está sobre la otra (**coincidentes**).

¿Qué condiciones deben darse en cada caso? O dicho de otra forma: si sólo tenemos las ecuaciones de ambas rectas sin su representación gráfica, ¿cómo podemos saber cuál es la posición relativa de ambas?

En el siguiente applet de Geogebra puedes experimentar cómo cambia la posición relativa de dos rectas al modificar uno de los puntos por los que pasa (A o P) y sus pendientes (m_s y m_r).

Utilízalo para contestar las preguntas que se hacen a continuación, teniendo en cuenta que las ecuaciones de las rectas vienen dadas en la forma $r = Ax + By = C$, $s = A'x + B'y = C'$.

<https://tube.geogebra.org/material/iframe/id/536765/width/888/height/600/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/true/>

Escena de iedamaticas en [GeoGebra.org](https://www.geogebra.org)



Comprueba lo aprendido

Dos rectas son secantes si:

- ☐ Sus vectores directores u y v son proporcionales
- ☐ Sus vectores directores u y v no son proporcionales
- ☐ Sus pendientes son diferentes
- ☐ Sus pendientes son iguales
- ☐ $A / A' = B / B'$

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Correcto
4. Incorrecto
5. Incorrecto

Dos rectas son paralelas si:

- ☐ Sus vectores directores u y v son proporcionales
- ☐ Sus vectores directores u y v no son perpendiculares
- ☐ Sus pendientes son iguales
- ☐ $A / A' = B / B' \neq C / C'$

Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto
4. Correcto

Dos rectas son coincidentes si:

- ☐ Tienen, como mínimo, tres puntos en común
- ☐ Sus vectores son proporcionales y tienen un punto en común
- ☐ $A / A' \neq B / B'$

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

Aquí tienes un [resumen](#) de lo anterior para que puedas resolver las actividades:

http://www.slideshare.net/slideshow/embed_code/key/tp6BpyAx5zLpf

Posición relativa de rectas en el plano

Saúl Val

1 of 5

Presentación de saulvalper en [Slideshare](#)



Comprueba lo aprendido

Completa los espacios en blanco de las siguientes actividades:

a) Las rectas
$$\left. \begin{array}{l} r \equiv x - 3y + 3 = 0 \\ s \equiv -2x + 6y - 6 = 0 \end{array} \right\}$$
 son (secantes/paralelas/coincidentes):

b) De las siguientes rectas, ¿cuáles son secantes con la número 1? La y la

1) $2x - y + 4 = 0$

2) $3x + y + 6 = 0$

3) $-4x + 2y - 3 = 0$

4) $x - y = 0$

5) $-2x + y - 4 = 0$

c) Si una recta pasa por los puntos $A=(1,0)$ y $B=(3,1)$, y otra por los puntos $P=(-2,4)$ y $Q=(0,3)$, ambas rectas son (secantes, paralelas, coincidentes)

d) Averigua el valor de m para que ambas rectas sean paralelas: $m =$

$$r \equiv 2x - my + 1 = 0$$

$$s \equiv -x + y - 3 = 0$$

En la siguiente escena del proyecto Descartes puedes seguir practicando sobre la posición relativa de dos rectas:

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_geometria_analitica-JS-LOMCE/q13_ejercicio_resuelto_2c.html

Escena de María José García Cebrian en [Proyecto Descartes](#). Licencia [CC](#)

Ángulo entre dos rectas

"Sinuhé y Pazair se reunieron al día siguiente en la salida de la ciudad para proseguir su camino.

- De nuevo nos separamos, amigo Sinuhé, pues nuestros rectos caminos se alejan.

- Desde luego, unos 50° de separación, me atrevo a aventurar.

- ¿Acaso puedes saberlo con sólo mirar?

- Podría calcularlo fácilmente, y apenas retrasaría nuestra marcha."

Calcular el ángulo que forman dos rectas secantes es sencillo. De hecho ya debes saber hacerlo, pues es el mismo que forman sus dos vectores directores. También puede calcularse a partir de las pendientes de ambas rectas. Dependiendo de los datos que tengas, deberás usar una u otra fórmula:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$



Caso práctico

Sinuhé y Pazair salieron de Luxor, cuyas coordenadas son (23.70, 32.60). Sinué se dirigía a Al Baghdadi (25.64, 32.61) y Pazair a Al Bayadiyah (25.67, 32.66). ¿Crees que el cálculo de Sinué se aproxima a la realidad?

No es necesario que calculemos las ecuaciones de las rectas, pues nos basta con calcular sus vectores directores con los siguientes datos:

A = Luxor = (23.70, 32.60)

B = Al Baghdadi = (23.64, 32.61)

C = Al Bayadiyah = (23.67, 32.66)

Calcularemos los vectores $u=AB$ y $v=AC$:

$$\vec{u} = (-0.06, 0.01)$$

$$\vec{v} = (-0.03, 0.06)$$

Ahora aplicamos la primera fórmula y obtenemos:

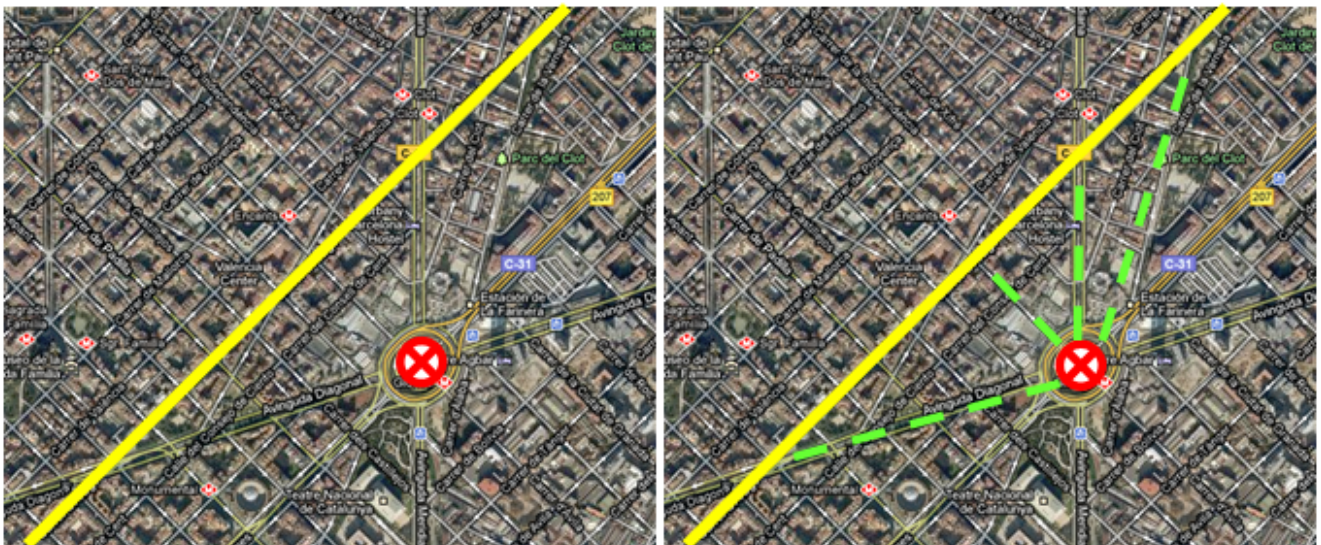
$$\cos\alpha = \frac{|u \cdot v|}{|u| \cdot |v|} = \frac{|0.0024|}{0.06 \cdot 0.07} = 0.5714 \Rightarrow \alpha = \arccos(0.5714) \approx 55^\circ 09'$$

2. Distancia entre un punto y una recta

"Sinuhé avanzaba por una zona desértica. Hacía tiempo que no se encontraba con nadie, y todo por intentar atajar distancias. Se decidió a alcanzar un sendero conocido que se encontraba al sur de su posición y conseguir algo de comida y agua, pero ¿cuál sería el camino más corto?"

Recordó que dicho camino seguía una dirección sur-este. Por tanto Sinué miró la posición del sol y se decidió a avanzar en dirección sur-oeste ¿habría hecho una buena elección?"

Mira la imagen de abajo. Se trata de un plano de la ciudad de Barcelona, concretamente de la Avenida Diagonal. Si desde la glorieta donde está la cruz roja queremos llegar a la Calle de Aragón (la línea amarilla), tenemos varias opciones, marcadas a la derecha con líneas verdes. Si nos preguntamos qué distancia hay desde la glorieta a la Calle de Aragón, ¿qué camino elegirías para medir? Es evidente que el más corto, y como puedes ver, el camino más corto se obtiene siguiendo una **recta perpendicular** a la que tenemos.



¿Y, cómo conseguimos una recta perpendicular? Está claro que necesitamos un punto, aquel de donde partimos, y un vector, que debe ser perpendicular a la recta, y por tanto a su vector director.



Importante

Si tenemos una recta r , que tiene por vector director $\vec{u} = (a, b)$, llamaremos **vector normal** a la recta, a cualquier vector **perpendicular** al vector director.

Por ejemplo $\vec{n} = (-b, a)$, podría ser un vector normal de la recta, por que el producto escalar con \vec{u} es cero.

Por tanto, para medir la distancia de un punto P a una recta r , el procedimiento más intuitivo sería:

- calcular la ecuación de una recta s perpendicular a r que pase por P
- hallar el punto Q donde se cortan r y s
- medir la distancia de P a Q , que es la medida del módulo del vector PQ

En el applet que tienes a continuación puedes ver un ejemplo. Para ello, pulsa el botón **Reproduce**:

<https://tube.geogebra.org/material/iframe/id/536825/width/870/height/607/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/true/>

Escena de iedamaticas en [Geogebra.org](https://www.geogebra.org)



Afortunadamente, no es necesario dar todos esos pasos para calcular la distancia de un punto a una recta ya que disponemos de una fórmula.

Si tenemos un punto $P = (x_0, y_0)$ y una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$, la distancia de P a r viene dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



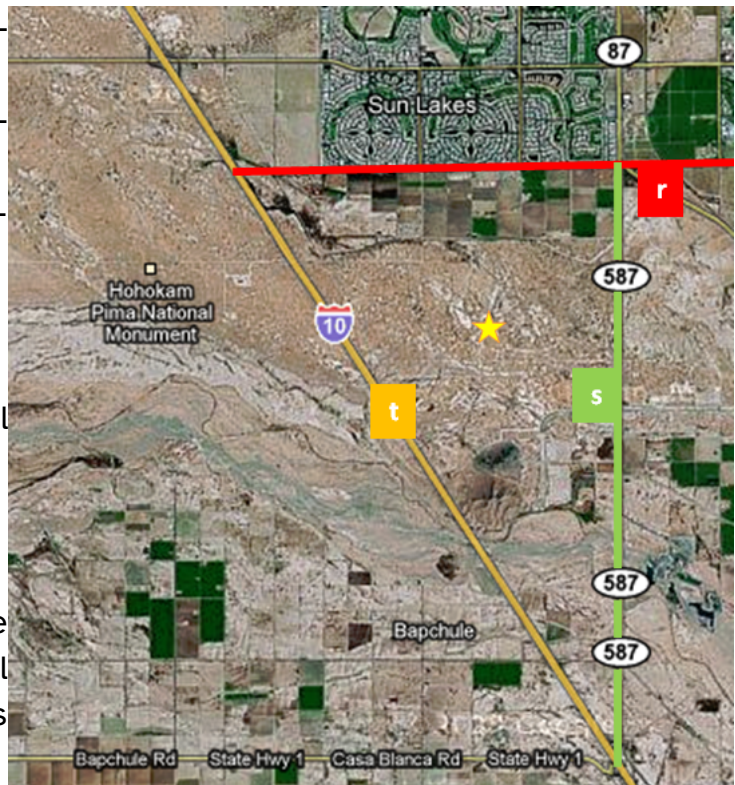
Comprueba lo aprendido

Éste es el desierto de Arizona, donde un rancho se encuentra en el lugar de la estrella, y está rodeada por tres carreteras:

- La carretera local (rojo): $r \equiv y - 5 = 0$
- La carretera 587 (verde): $s \equiv x - 4 = 0$
- La ruta 10 (amarillo): $t \equiv 5x + 4y + 24 = 0$

En este sistema de referencia, el rancho tiene coordenadas $P(0,0)$.

Para abrir un camino que comunique el rancho, se ha decidido buscar el camino más corto hasta una de las carreteras del mapa.



a) ¿Qué distancia hay desde el rancho hasta la carretera local?

[Sugerencia](#)

- ☐ 4
- ☐ 5

¿Seguro? No has aplicado bien la fórmula.

Muy bien.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

¿Qué distancia hay del rancho a la carretera 587?

[Sugerencia](#)

- ☐ 4
- ☐ 5

Estupendo, has aplicado bien la fórmula.

No es esta la respuesta.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

c) ¿Qué distancia hay hasta la ruta 10?

 [Sugerencia](#)

- ☐ 3,75
- ☐ 4,52

Muy bien, se ve que has aplicado correctamente la fórmula anterior.

No es correcto

Solución

1. Opción correcta
 2. Incorrecto
-

3. Lugares geométricos

"Sinuhé se acercó al Nilo, donde un pescador desembarcaba la captura del día.

- Buena pesca. - dijo Sinuhé - ¿cómo es posible que un único pescador obtenga esta cantidad?

- Gracias a mis redes. - respondió el pescador - Dos extremos los ato en la orilla, y el tercero lo llevo en la barca hasta que llego a aquella estaca que hay en medio del río. Con ello cubro una superficie de unos 80 m^2 .

El pescador se alejó. Sinuhé pensó que debía ser un buen pescador al haber ideado aquella técnica, pero no estaba muy seguro de que su cálculo fuera exacto."



Imagen de Quangpraha en [Pixabay](#). Licencia [Pixabay](#).

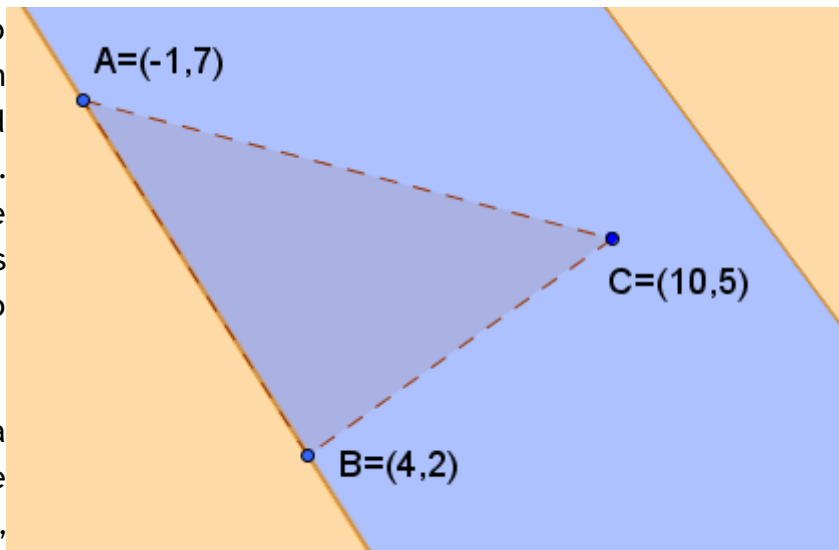
3.1. Definición



Caso práctico

Con lo que has aprendido hasta ahora se pueden resolver una amplia variedad de problemas métricos. Muchos de ellos donde aparecen distancias, y otros relacionados con el cálculo de superficies.

Si el gráfico de la derecha representara el caso de Sinuhé y el pescador, podríamos resolverlo del siguiente modo:



Para calcular el área de un triángulo, necesitamos su base y su altura. Podemos tomar como base el segmento AB (curioso ¿verdad?, la base no tiene por qué estar en horizontal y en la parte inferior del triángulo), y por tanto la altura será la distancia de C a la recta que pasa por A y por B.

Vamos a hallar esa recta en primer lugar:

Pasa por $A=(-1,7)$ y tiene vector director $v=(5,-5)$

$$r \equiv x + y - 6 = 0$$

A continuación, calculamos la distancia de C a la recta anterior usando la fórmula que ya conocemos.

$$d(C,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|10 + 5 - 6|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{1.41} \approx 6.38$$

La base del triángulo será el segmento AB, y finalmente calculamos la superficie.

$$\left. \begin{array}{l} b = |\vec{v}| = 5\sqrt{2} \approx 7.07 \\ h = d(C, r) \approx 6.38 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{b \cdot h}{2} = 22.55 \text{ m}^2$$

Parece que el pescador iba un poco desencaminado...



Ejercicio Resuelto

Otro tipo de problema métrico es aquél en el que no te piden una medida como resultado, sino que te dan una serie de condiciones para averiguar una variable del problema.

Por ejemplo: imagina que de un triángulo isósceles conoces los dos vértices que forman el lado desigual, $A=(1,-2)$ y $B=(4,3)$, pero no sabes cuál es el tercer vértice. De él sólo sabes que se encuentra sobre la recta $r \equiv 3x - y + 2 = 0$.

Para resolver este tipo de problemas es fundamental entenderlo bien y ayudarse de un esquema. En este caso nos dan dos condiciones: el triángulo es isósceles, y el punto C está en la recta r.

Empecemos por esta última condición.

Nuestra incógnita es $C=(x,y)$. Como sabemos que C está en la recta r, cumple su ecuación. Por tanto en r podemos despejar una de las dos variables para tener C dependiendo de una única incógnita.

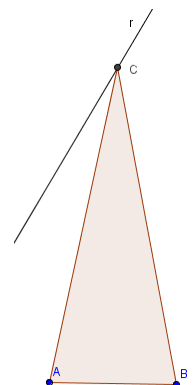
Este gráfico nos sirve de esquema para ver qué necesitamos.

Si despejamos y de la ecuación de la recta,

$$3x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 3x + 2$$

C pertenece a esa recta, luego $C = (x,y) = (x, 3x+2)$

De esta forma hemos eliminado una de las incógnitas.



Para eliminar la última incógnita utilizamos la otra condición: el triángulo es isósceles. ¿Qué quiere decir esto? Que tenemos dos lados iguales, que en nuestro caso son AC y BC. Podemos imponer una condición métrica: la distancia de A a C es la misma que de B a C, es decir

$$d(A,C) = d(B,C)$$

$$\begin{aligned}d(A,C) &= d(B,C) \\ |\overrightarrow{AC}| &= |\overrightarrow{BC}| \\ |(x-1, 3x+4)| &= |(x-4, 3x-1)| \\ \sqrt{(x-1)^2 + (3x+4)^2} &= \sqrt{(x-4)^2 + (3x-1)^2} \\ 22x + 17 &= -14x + 17 \\ x &= 0\end{aligned}$$

Si ahora sustituimos el valor de x, nos queda que el punto que buscamos es **C=(0,2)**

Este último problema se podría haber resuelto de otra forma, ya que el punto C pertenece a un "lugar especial", el de los puntos que están a la misma distancia de A y de B, que es la recta mediatriz de AB. Si averiguamos la ecuación de esa recta, el punto C sería la intersección de r y de la mediatriz.

En el applet que tienes a continuación puedes ver dos de esos lugares especiales: la mediatriz y la bisectriz. Puedes modificar los puntos del triángulo y verás que siempre las tres mediatrices y las tres bisectrices se cortan en un único punto.

<https://tube.geogebra.org/material/iframe/id/536901/width/776/height/598/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/true/s>

Escena de iedamaticas en [Geogebra.org](https://www.geogebra.org)



Importante

Al conjunto de puntos que tienen alguna propiedad en común se le llama **lugar geométrico**. Los dos que acabamos de ver y las cónicas que veremos en el siguiente apartado son lugares geométricos.

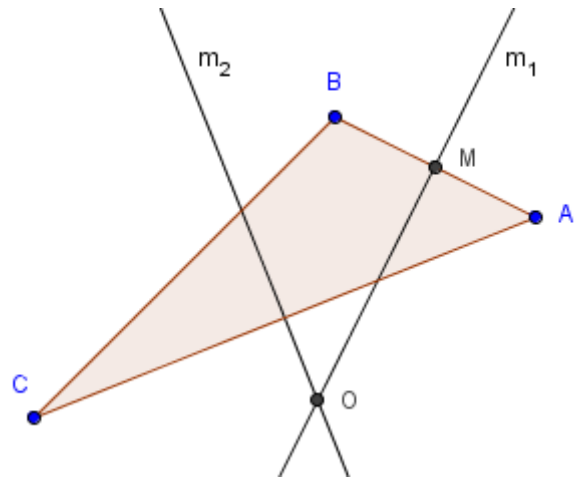


Comprueba lo aprendido

Sigue los pasos para resolver el siguiente problema y completa los huecos en blanco:

De un triángulo conocemos dos de sus vértices: $A(2,0)$ y $C(-3,2)$. También conocemos la mediatriz del lado AB , $m_1 \equiv 4x - 2y - 3 = 0$.

Halla el vértice B y el circuncentro del triángulo.



a) Empezaremos hallando el vértice B . Este punto debe estar en el lado AB , que es (paralelo/perpendicular) a la mediatriz. Además pasa por el punto A . Utilizando estos dos datos, obtenemos la ecuación simplificada del lado AB : $= 0$.

b) El punto medio M entre A y B debe ser la intersección de m_1 y el lado AB . Si resuelves el sistema formado por las dos ecuaciones, el resultado es $M = (\text{ } , \text{ } / \text{ })$.

c) Para averiguar el punto medio entre otros dos, se suman las coordenadas y se dividen entre dos. Si llamas a $B = (x, y)$, conociendo A y M podemos calcular que $B = (\text{ } , \text{ })$

d) Ahora buscaremos el circuncentro. Para ello necesitamos otra mediatriz, por ejemplo m_2 . Ya sabes que la condición que tiene que cumplir es que $d(X, A) = d(X, C)$. De esta forma obtenemos la mediatriz $m_2 \equiv \text{ } = 0$.

e) El circuncentro es la intersección de las dos mediatrices que ya conocemos: $O = (\text{ } / \text{ } , \text{ } / \text{ })$



Para saber más

En los siguientes enlaces de lasmatematicas.es, dispones de más ejemplos y actividades relativos al cálculo de lugares geométricos, incluidos la mediatriz y bisectriz.



Reflexiona

Calcula las rectas bisectrices del ángulo definido por las rectas

$$\begin{cases} r \equiv 2x - 3y + 5 = 0 \\ s \equiv 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Queremos hallar el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de las dos rectas anteriores. Es decir, deseamos conocer los puntos $P(x,y)$ que cumplan $d(P,r) = d(P,s)$.

Si aplicamos la fórmula que nos da la distancia de un punto a una recta, dichos puntos cumplirán la igualdad siguiente:

$$\frac{|2x - 3y + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|3x + 2y - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$$

Simplificando, tenemos:

$$\frac{|2x - 3y + 5|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x + 2y - 1|}{\sqrt{13}}$$

Por tanto, quitando denominadores, y debido a los valores absolutos, nos quedan dos igualdades:

$$2x - 3y + 5 = 3x + 2y - 1$$

$$2x - 3y + 5 = -(3x + 2y - 1)$$

De esas igualdades, obtenemos las ecuaciones generales de las dos rectas bisectrices:

$$-x - 5y + 6 = 0$$

$$5x - y - 4 = 0$$

3.2. Cónicas

"En la época en la que Sinuhé recorría su camino por Egipto siguiendo las indicaciones de Eratóstenes, vivía en la ciudad de Alejandría otro gran matemático llamado **Apolonio de Perga**. Casualmente Sinuhé se lo encontró en un mercado, frente a un puesto de quesos. Aún cuando no sabía quién era, se quedó extrañado por la forma en que miraba uno de los quesos.

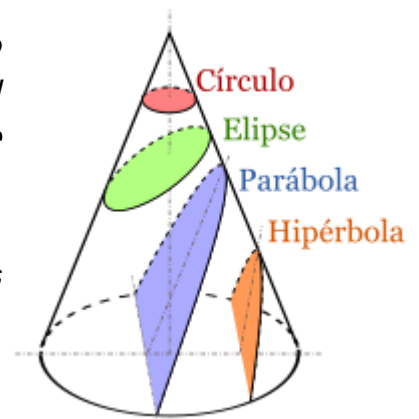


Imagen de Drini en [Wikimedia Commons](#).
Licencia [CC 3.0 by-sa](#)

- ¿Os pasa algo señor? - preguntó Sinuhé.

- Es curioso cómo las matemáticas siguen apareciendo donde menos te lo esperas.

- Ciertamente es curioso, aunque si os referís a ese queso con forma de cono, se debe a la forma del recipiente donde se cuajó, no a la mano de la naturaleza.

- Veo que algo de matemáticas sabes, así que contéstame a esto: si corto paralelo a la base, ¿qué forma obtengo?

- Una **circunferencia**, es sencillo.

- Sí, y es una forma curiosa, pues todos sus puntos están a la misma distancia del centro. ¿Y si inclino un poco el corte?

- Sería una circunferencia algo aplastada ¿qué tiene eso de curioso?

- Yo llamo **elipse** a esa figura, y por supuesto que es curiosa. Hay dos puntos especiales dentro de ella. Si mides desde cualquier sitio del borde hasta esos dos puntos y sumas las cantidades, siempre obtendrás el mismo valor.

- Pero eso no puede ser siempre verdad, pues si inclino aún más el corte ya no tendré ninguna circunferencia aplastada.

- Elipse.

- Bueno... ninguna elipse - contestó Sinuhé, intentando buscar algún fallo en aquella teoría.

- Si haces eso, ya no tienes una elipse, sino una forma que yo llamo **parábola** y que también tiene una curiosa propiedad. - Dijo Apolonio sonriendo.

- ¿Y si corto verticalmente?

- Obtendrás una **hipérbola**... o al menos una parte de una hipérbola. Pero para explicártelo mejor te invito a que nos comamos este queso y sigamos razonando."



Importante

En el siguiente vídeo puedes ver la definición como lugar geométrico de estas curvas y su ecuación:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/s_gXaeNrR7A](https://www.youtube.com/embed/s_gXaeNrR7A)

Vídeo de Leslie Jimenez en [Youtube](#)



Comprueba lo aprendido

Completa los huecos con la sección correcta: circunferencia, elipse, parábola o hipérbola.

a) **Sección cónica:** Si cortamos el cono con un plano...

- ... paralelo a una generatriz, se obtiene una .
- ... paralelo a dos generatrices, se obtiene una .
- ... que corta a todas las generatrices, se obtiene una .

b) **Lugar geométrico:** El lugar geométrico formado por todos los puntos del plano cuya...

- ... suma de distancias a otros dos puntos fijos llamados focos es constante, se llama .
- ... distancia a un punto fijo llamado centro es constante, se llama .
- ... resta de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, se llama .

c) **Parámetros:**

- Una tiene foco y directriz.

- En una , $c < a$

- En una , $c > a$

d) **Ecuación:** La ecuación reducida de una...

- ... es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- ... es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- ... es $y^2 = 2px$



Ejercicio Resuelto

Para terminar el apartado veamos cómo resolver algunos ejercicios de cónicas dependiendo de los datos que nos aporten.

ELIPSES: Averigua la ecuación reducida de una elipse cuyos focos son los puntos $F = (-2, 0)$ y $F' = (2, 0)$, sabiendo que la longitud del eje mayor es 10.

Ayuda: intenta resolverlo a partir de los parámetros a , b y c de la elipse.

La distancia entre los focos es 4, y por tanto la semidistancia focal es $c = 2$.

El eje mayor mide 10 unidades, luego el semieje mayor es $a = 5$.

Como $b^2 = a^2 - c^2$, nos queda $b^2 = 21$. Sustituyendo en la ecuación reducida de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

PARÁBOLAS: Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $F = (3, 0)$ y de la recta $d \equiv y + 3 = 0$.

Ayuda: Plantea la ecuación con la condición que se da en el problema.

Tomando el punto $P = (x, y)$, la condición del problema nos dice que:

$$\begin{aligned}
 d(F, P) &= d(P, r) \\
 |(x-3, y)| &= \frac{|y+3|}{1} \\
 \sqrt{(x-3)^2 + y^2} &= |y+3| \\
 (x-3)^2 + y^2 &= (y+3)^2 \\
 x^2 + y^2 - 6x + 9 &= y^2 + 6y + 9 \\
 x^2 - 12x &= 0
 \end{aligned}$$

HIPÉRBOLAS: Halla la ecuación de una hipérbola que tiene por focos los puntos $F = (-3, 0)$ y $F' = (3, 0)$, y que pasa por el punto $P = (8, 5\sqrt{3})$

Ayuda: Escribe la ecuación reducida a partir de los focos y luego utiliza que el punto verifica la ecuación.

Sabemos que la semidistancia focal es $c=3$, y en las hipérbolas se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$, luego podemos despejar b^2 : $b^2 = 9 - a^2$.

Si sustituimos en la ecuación reducida,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9 - a^2} = 1$$

Ahora podemos utilizar que el punto P verifica la ecuación y despejamos a :

$$\begin{aligned}
 \frac{8^2}{a^2} - \frac{(5\sqrt{3})^2}{9 - a^2} &= 1 \\
 \frac{64}{a^2} - \frac{75}{9 - a^2} &= 1 \\
 576 - 64a^2 - 75a^2 &= 9a^2 - a^4
 \end{aligned}$$

Si resolvemos esta ecuación bicuadrada nos queda que $a=12$ o que $a=2$ (pues las soluciones negativas no son válidas). Como en las hipérbolas $c > a$, la solución es $a=2$ y la ecuación reducida queda:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

4. Proporción cordobesa y rectángulo cordobés

La matemática argentina [Vera G. de Spinadel](#) descubrió la familia de los **números metálicos** en 1994. Estos números representan **proporciones** que pueden encontrarse en las medidas de multitud de objetos que nos rodean, como puede ser la forma del edificio en que vivimos, las dimensiones de nuestro documento nacional de identidad, la disposición de los elementos pictóricos de un cuadro, etc.



Importante

Números metálicos

Se denomina números metálicos al conjunto de números irracionales que son solución de la ecuación cuadrática $x^2 - bx - c = 0$ para ciertos valores naturales de b y c . Los principales números metálicos podemos verlos en la siguiente tabla.

b	c	Símbolo	Nombre del número	Valor exacto	Valor aproximado
1	1	ϕ	Número de oro	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1,618
2	1	$\sigma_{2,1}$	Número de plata	$1+\sqrt{2}$	2,414
3	1	$\sigma_{3,1}$	Número de bronce	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	3,303



Imagen en [Wikimedia Commons](#). Licencia [CC](#)

Como muestra de la importancia de los números metálicos en la historia de la civilización podemos mencionar los siguientes ejemplos.

- Las proporciones del Partenón de Atenas se ajustan al número de oro.
- Los elementos de la fachada de la iglesia de Santa María de Novella en Florencia se relacionan unos con otros en la

proporción áurea (número de oro).

- Las proporciones de algunos documentos de uso diario, como el documento nacional de identidad, se corresponden con el número de oro.
- En la obra de Dalí "[Leda atómica](#)" sus elementos están dispuestos siguiendo la proporción áurea (número de oro).
- El cuadro de Dalí "[Hyperxiological sky](#)" se puede descomponer en rectángulos en los cuales la proporción entre sus lados es el número de plata.



Mihrab de la Mezquita de Córdoba
Imagen en [Wikimedia Commons](#). Licencia [CC](#)

En los años 50 el arquitecto Cordobés Rafael de la Hoz Arderius recibió un encargo de la Diputación de Córdoba de estudiar la huella de la proporción áurea (número de oro) en los edificios y monumentos de la ciudad. Córdoba llegó a ser en el siglo X capital del califato Omeya de Occidente, siendo uno de los centros científicos y culturales más importantes de aquel tiempo. La proporción áurea viene recogida en el libro de los Elementos

de Euclides, cuyo único ejemplar existente se había conservado durante siglos en la capital cordobesa, por lo que se suponía que en esta ciudad más que en ningún otro lugar debía haberse observado esta proporción en su diseño arquitectónico y urbano. Sin embargo, después de veinte años de investigación, el estudio mostró que las proporciones observadas eran más próximas a 1,3 que a 1,6 (valor aproximado del número de oro).

Este resultado se plasmó en una ponencia que pronunció Rafael de la Hoz en Córdoba en 1973, llamando a la proporción encontrada ($\simeq 1,3$) proporción cordobesa.



Importante

Proporción cordobesa

Llamamos proporción cordobesa (c) a la relación entre el radio (R) de la circunferencia circunscrita a un octógono regular y el lado de este (L). Esta relación viene definida de la siguiente manera.

$$c = \frac{R}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 1,306562965...$$

Rectángulo cordobés

Es aquel rectángulo en el cual la proporción entre sus lados es ϕ .

En la escena de Geogebra de abajo si pulsamos sobre el botón etiquetado "Proporción cordobesa" podemos ver esta relación gráficamente. Si pulsamos sobre el botón etiquetado como "Rectángulo cordobés" vemos como se construye un rectángulo cuyos lados mantienen la proporción cordobesa. Otro número relacionado con el octógono regular es el número de plata, el cual es la relación entre la longitud de una de sus diagonales y uno de sus lados, podemos ver gráficamente esta relación si pulsamos sobre el botón correspondiente. Por último si variamos el deslizador (r) podemos cambiar el radio de la circunferencia circunscrita y comprobar cómo las proporciones se mantienen.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/TeMmq2T6/width/852/height/496/border/888888/smb/false/stb/false/stt>



Objetivos

Según los trabajos del alemán Fechner la proporción cordobesa se establece en multitud de obras pictóricas. Para el arquitecto Rafael de la Hoz Arderius (uno de los máximos investigadores del tema), considerando las últimas técnicas de medición del [Papiro Rhind](#) (museo británico), entre las diagonales de un rectángulo con dicha proporción queda perfectamente encajada la [Gran Pirámide](#). En este video puedes aprender más sobre la proporción cordobesa y su presencia en el arte y la arquitectura.

[Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/mwlnj9TI8ow](http://www.youtube.com/embed/mwlnj9TI8ow)

La proporción cordobesa en la arquitectura.

Vídeo de educaciontv alojado en [Youtube](#)

5. Transformaciones geométricas

Si nos pidieran multiplicar los números romanos XII por XIV seguramente procederíamos a transformarlos en números arábigos, es decir efectuaríamos la operación 12×14 cuyo resultado es 168, y luego transformaríamos esta solución a números romanos (CLXVIII). Este proceso de transformar, con el fin de resolver un problema también se presenta en la geometría. Cuando un problema geométrico es complicado de solucionar suele ser ventajoso someterlo a una o más transformaciones que faciliten la resolución, o bien reducirlo a uno más sencillo que sea conocido. Las transformaciones geométricas más conocidas son la traslación, la rotación, la homotecia y la simetría, a esta última vamos a dedicar el siguiente apartado.



Imagen de Zienith en [Pixabay](#) . Licencia [Pixabay](#)

5.1 Simetría central

Un elemento arquitectónico de espectacular belleza que podemos contemplar en las catedrales góticas son los rosetones, los cuales son ventanas circulares dotadas de vidrieras cuya tracería (combinación de figuras geométricas) se dispone en forma radial. En el de la fotografía de abajo podemos observar como todos los elementos que lo componen parecen ordenarse alrededor de su centro, mostrando un bello ejemplo de simetría central.



Imagen de falco en [Pixabay](#) . Licencia [Pixabay](#)



Importante

Dos puntos son simétricos si existe un elemento geométrico (punto, recta o plano) mediatriz, respecto al segmento que los une. La simetría también es conocida como reflexión.

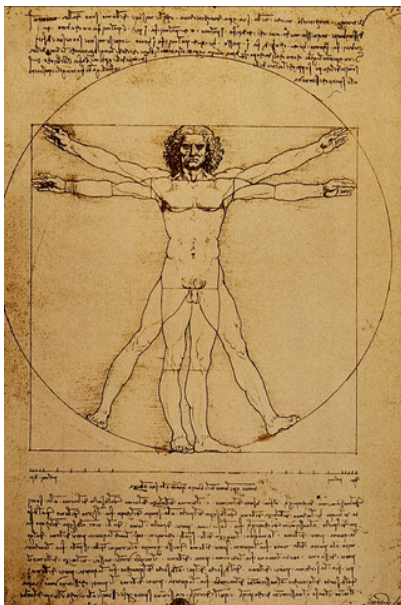


Imagen en [Wikipedia](#), [Dominio Público](#)

Dos puntos son simétricos respecto de un punto fijo llamado O, si este último es punto medio del segmento que los une.

En la siguiente escena de Geogebra podemos ver como se construye el simétrico de un punto P respecto a otro llamado O. Se traza un segmento que tenga su origen en P y pase por el punto O, dado que este último punto es el punto medio de dicho segmento prolongando el mismo una distancia igual a la de P al O obtenemos el simétrico P'. Puedes variar la posición del punto P y verás como cambia su simétrico P', la distancia de ambos al punto O es la misma, y viene indicada por la cifra que aparece debajo de los segmentos que unen P y P' a dicho punto.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/sJXAtsH7/width/700/height/500/border/888888/smb/false/stb/false/stb/>



Importante

Figuras simétricas respecto de un punto

Una figura es simétrica de otra respecto del punto fijo O, si para todo punto de la primera le corresponde un punto de la segunda; de tal manera que O es el punto de simetría de estos puntos.

En la siguiente escena de Geogebra podemos ver como se construye una figura simétrica a otra respecto a un punto O. Cada uno de los vértices del triángulo rojo (B,D y A) se unen

mediante un segmento con el punto O, a partir de dicho punto los segmentos se prolongan una distancia igual a la de los vértices (B,D y A) respecto a O, según se hizo más arriba, obteniendo los vértices B', D' y A'. Uniendo estos vértices obtenemos el triángulo verde simétrico del rojo respecto del punto O. En la escena de abajo podemos mover el triángulo rojo y alterar sus vértices, obteniendo una nueva figura simétrica a dicho triángulo.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/M5AAwrhg/width/700/height/500/border/888888/smb/false/stb/false/stt>



Comprueba lo aprendido

Decimos que un movimiento es directo cuando la figura original y la figura transformada por el movimiento se pueden hacer coincidir sin salir del plano.

¿Dirías que la simetría central es un movimiento directo?

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

5.2 Simetría axial

La simetría proporciona orden y sentido a un mundo de confusa diversidad, esto hace que de manera intuitiva percibamos una belleza en las cosas regulares y simétricas. Podemos observar la simetría en muchos elementos de nuestro entorno, como es el caso del diseño de palacios, templos, y en todo tipo de obras arquitectónicas, así como en los adornos y formas que presentan plantas, animales e insectos.



Imagen de lapping en [Pixabay](#) . Licencia [Pixabay](#)



Importante

Simetría axial

Dos puntos son simétricos respecto de una recta fija, si dicha recta es mediatriz del segmento que une estos dos puntos. A la recta se le llama eje de simetría.

En la escena de Geogebra de abajo podemos ver un punto A y su simétrico A' respecto a una recta fija llamada eje de simetría. Para trazar el simétrico de A trazamos un segmento (en trazo discontinuo) desde este punto hasta el Eje, a continuación prolongamos este segmento una longitud igual a la que va desde A al Eje, en el extremo de esta prolongación se encuentra el punto A' buscado. Podemos mover el punto A y ver como se obtiene el nuevo punto A' simétrico del anterior.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/T2VveR3s/width/689/height/433/border/888888/smb/false/stb/false/stb/>



Importante

Figuras simétricas respecto de una recta

Una figura es simétrica de otra respecto a una recta fija, si para todo punto de la primera le corresponde un punto en la segunda; de tal manera que la recta es el eje de simetría de estos dos puntos.

En la escena de Geogebra de abajo a la izquierda podemos ver una imagen de Lisa Simpson y a la derecha su simétrica respecto a un eje de simetría. Para obtener la imagen de la derecha se ha tomado cada uno de los puntos que componen la de la izquierda, y siguiendo el procedimiento descrito más arriba se ha hallado el simétrico de estos puntos respecto al eje de simetría, el resultado es la imagen de la derecha. Si movemos el punto A de la escena de abajo podemos modificar la imagen y obtener la nueva simétrica de la anterior.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/Wt2FKFFU/width/757/height/433/border/888888/smb/false/stb/false/stb/>



En la siguiente escena de Geogebra aparte de poder mover el punto A podemos mover los puntos rojo y verde y cambiar el eje de simetría, esto nos permite observar como afecta la modificación del eje a la imagen de la derecha simétrica de la izquierda..

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/y7fAdmXw/width/757/height/433/border/888888/smb/false/stb/false/stb/>



Pregunta Verdadero-Falso

¿Todas las simetrías son movimientos inversos (no directos)?

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Para hacer coincidir ambas figuras siempre debemos salirnos del plano.



Curiosidad

En la obra de Salvador Dalí, Cisnes que reflejan elefantes (1937). Se destaca el perfil de los cisnes que, reflejados mediante simetría axial en un lago, se convierten en elefantes.

<http://lab.rtve.es/revelando-a-dali/cuadro/cisnes-reflejando-elefantes>

Resumen



Importante

Las rectas en el plano sólo pueden situarse de tres formas: o no se cortan (paralelas), o se cortan en un punto (secantes), o una está sobre la otra (coincidentes).

En el caso de ser secantes, podemos calcular el ángulo usando los vectores directores. También puede calcularse a partir de las pendientes de ambas rectas. Dependiendo de los datos que tengas, deberás usar una u otra fórmula:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \quad \text{tg } \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$



Importante

Si tenemos un punto $P = (x_0, y_0)$ y una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$, la distancia de P a r viene dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Importante

Al conjunto de puntos que tienen alguna propiedad en común se le llama **lugar geométrico**. Algunos ejemplos de lugar geométrico: mediatriz, bisectriz, cónicas...



Importante

Llamamos proporción cordobesa (c) a la relación entre el radio (R) de la circunferencia circunscrita a un octógono regular y el lado de este (L). Esta relación viene definida de la siguiente manera.

$$c = \frac{R}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 1,306562965...$$



Importante

Simetría puntual

Dos puntos son simétricos respecto de un punto fijo llamado O , si este último es punto medio del segmento que los une.

Simetría axial

Dos puntos son simétricos respecto de una recta fija, si dicha recta es mediatriz del segmento que une estos dos puntos. A la recta se le llama eje de simetría.

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.



Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito [NDVA](#).

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

<http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space>