INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Funciones: Límite de funciones. Continuidad

Fotografía en Flickr de El Bibliomata bajo CC

En 1613, el astrónomo y científico alemán Johannes Kepler acaba de cumplir 42 años. Está a punto de casarse por segunda vez. La costumbre obliga al novio a hacerse cargo de adquirir las bebidas para la celebración de la boda. Hombre curioso, observa cómo el bodeguero que le va a vender el vino mide con una vara la cantidad de licor que hay en los toneles. Se da cuenta de que aquellos cálculos a "ojo de buen cubero" no pueden ser correctos. Investiga e intenta encontrar reglas que permitan calcular el volumen de los toneles.

Pasados tres años, en una pequeña obra publicada en 1616, Kepler presenta una teoría que incluyen unas normas para la construcción y el cálculo de la capacidad de los toneles, dependiendo de su forma y tamaño.

Kepler se ve obligado a introducir el concepto de lo **infinitamente pequeño** en sus razonamientos.

El **infinito**, definirlo y trabajar con él había traído de cabeza a matemáticos y pensadores desde la antigüedad griega. Un ejemplo de este conflicto son las paradojas de Zenón relacionadas con el movimiento.

Se puede afirmar que los métodos mecánicos y geométricos utilizados por Arquímedes para el cálculo de áreas y volúmenes suponen un anticipo de lo que ya en el siglo XVIII se denominaría **cálculo infinitesimal**.

Al igual que Kepler, científicos como Galileo, Cavalieri, Torricelli, Descartes o Fermat, se ocuparon del cálculo de áreas y volúmenes. Y también de problemas relacionados con el movimiento, determinación de centros de gravedad de figuras, o el cálculo de la tangente a una curva en punto.

Todos ellos tuvieron que negociar con el infinito y el paso al límite, con mayor o menor éxito y rigor en sus razonamientos. Pero fueron **Newton** y **Leibniz** quienes idearon una teoría general que abarcara y unificara todo el cálculo de sus predecesores. Ellos dos son los padres del **cálculo integral y diferencial**.

Matemáticos posteriores como los Bernoulli, Euler, Cauchy, entre otros, fueron formalizando y afinando esa etapa inicial del cálculo. Y para ello fue necesario que se enfrentarán tanto al concepto de **límite** como al de **continuidad** de una función.

Imagen en Flickr por Fenanov bajo CC

Nos debería quedar claro a todos: con línea continua no se puede adelantar. Con discontinua sí se puede adelantar en el caso de que no venga ningún vehículo por el carril opuesto.

La pregunta que viene a continuación te parecerá una perogrullada: ¿cómo sabemos que la línea es continua o discontinua? Intenta explicarlo.

En este apartado haremos un primer acercamiento al concepto de continuidad de una función. Y para ello utilizaremos el formato más descriptivo que hay de expresar una función: la gráfica.

No olvidamos la pregunta que te hemos hecho. Piensa en los términos que has utilizado para definir las líneas continua y discontinua. Seguro que alguno de ellos aparece en la siguiente definición.

Una primera aproximación al concepto de continuidad, nos permite decir que **una función es continua** si se puede dibujar su gráfica sin levantar el bolígrafo del papel.

A esta definición se le pueden poner muchos peros que iremos aclarando a continuación.

Si haces clic en la imagen inferior, puedes acceder a una escena de **GeoGebra** en la que se representan de forma aleatoria las gráficas de funciones elementales. Observa con detenimiento y analiza cuáles de ellas son candidatas a ser continua, según la definición anterior.

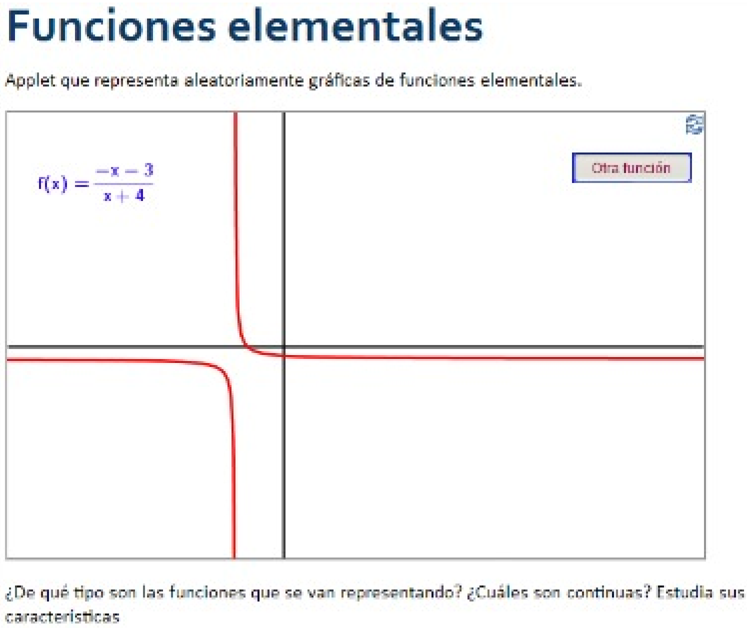


Imagen de elaboración propia

¿Cuáles de las funciones anteriores se pueden representar sin levantar el bolígrafo del papel?

Desde luego, las **afines** y las **cuadráticas**. Por tanto **son funciones continuas**. Lo mismo ocurre para cualquier **función polinómica**, es decir, aquellas que su expresión analítica sea un polinomio.

A la vista de la gráfica de las funciones de **proporcionalidad inversa**, podríamos afirmar que **no son funciones continuas**, ya que no podemos representarlas sin levantar el bolígrafo. El número donde hay que levantar el bolígrafo es justamente donde se anula el denominador, es decir, el punto que no pertenece al dominio de la función.

Por ejemplo, para representar gráficamente la función $f(x)=\frac{2x+3}{x-4}$ tendríamos que levantar la mano en el punto $x=4$. Podríamos decir entonces que $f(x)$ es continua en todos los números reales menos en el 4.

Como se puede ver, tantos las funciones **exponenciales** como las **logarítmicas son continuas**. También lo son el **seno** y el **coseno**.

La función **tangente no es continua**, ya que es necesario levantar la mano en todos los puntos en donde el coseno se hace cero.

Las funciones **definidas por partes** no son continuas en aquellos puntos de separación de las partes en donde exista **un salto**. Y eso ocurre en todas las que aparecen en la escena anterior.

Ejercicio resuelto

Si haces clic en la siguiente escena de GeoGebra creada por Jesús Fernández, tendrás que dar un valor para que la función definida por partes que aparece sea continua.

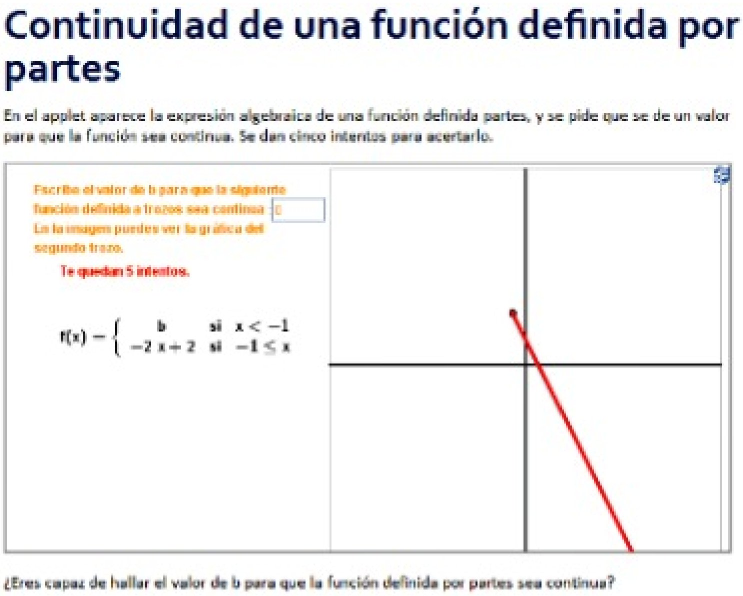


Imagen de elaboración propia

Mostrar retroalimentación

Si no aciertas al quinto intento, la escena te dará la solución.

Reflexiona

El partido de la primera división española, jugado el 10 de abril de 2011 entre el Gijón y el Osasuna, terminó con un 1-0, siendo Barral, jugador del Sporting, quien marcó el único tanto del encuentro en el minuto 66.

Está claro que uno de los instantes que quedará para el recuerdo de los aficionados gijoneses será ese minuto en que su equipo marcó el gol. Casi

Fotografía en INTEF bajo CC

en que su equipo marcó el gol. Casi todo el resto del partido quedará en el olvido.

Consideramos la función que asocia a cada uno de los 90 minutos que dura el partido, los goles que se han marcado hasta ese momento.

Representa la gráfica de dicha función, y di si es continua o no. ¿En qué punto no es continua?

Mostrar retroalimentación

a) La gráfica de dicha función, debe ser similar a la siguiente:

b) No, la función no es continua. Como se puede ver, no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

c) El punto de discontinuidad es 66. Corresponde al minuto en que se marcó el único gol del partido.

En el apartado anterior hemos mirado la función en su conjunto. Hemos decidido si la función era continua o no en su totalidad.

A partir de ahora iremos más al detalle. Nos plantearemos la siguiente pregunta: ¿qué ocurre con $f(x)$ cuando x se aproxima a un punto determinado?

En el golf, a la zona donde se sitúa la bandera que señala el hoyo, se le denomina con la palabra inglesa "green". Cuando una bola está en el "green" quiere decir que está en las proximidades del hoyo. A partir de ese momento quedan pocos golpes, y estos deben ser suaves y precisos. De esta forma, el jugador conseguirá que la bola se acerque lentamente pero con decisión hasta el hoyo.

Cuando estudiamos el límite de una función $f(x)$ en un punto $x = a$, solo nos interesan los puntos muy cercanos a él, los que están situados en el "green" que lo rodean.

En este apartado profundizaremos en los distintos comportamientos que puede tener una función cuando centramos nuestra atención en cómo cambia $f(x)$ cuando x está muy próxima a dicho punto.

Fotografía en Flickr por chispita_666 bajo CC

Mira la imagen inferior. En ella aparece un caso particular de la escena de GeoGebra que hemos visto en un ejercicio resuelto. Recuerda, se nos pide que determinemos el primer trozo de una función definida por partes, de tal forma que la función resultante sea continua.

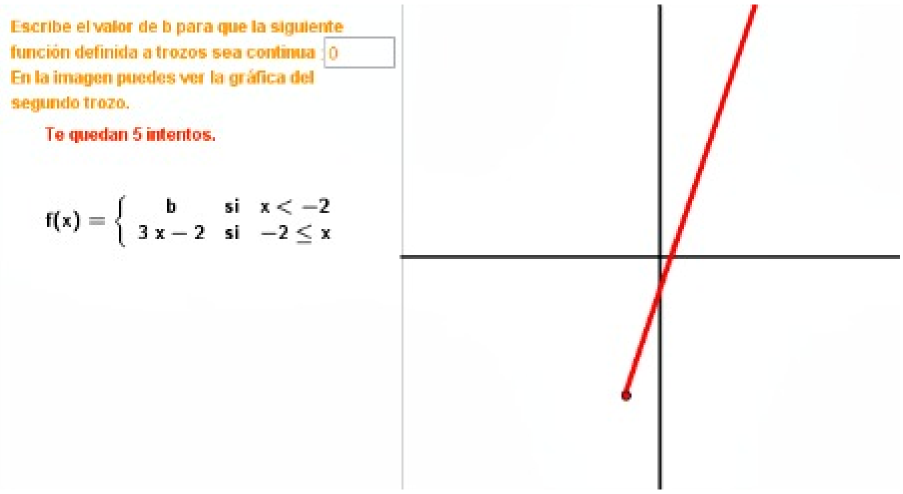


Imagen de elaboración propia

Este primer trozo es una función constante $f(x)=b$, cuando $x<-2$. ¿Cuánto valdrá b ? Esa es la pregunta a la que tenemos que contestar.

Está claro que el punto culpable de que $f(x)$ pueda no ser continua es $x=-2$. Y para evitar que esto ocurra tendremos que saber **cuanto vale** $f(x)$ **en** $x=-2$ y en sus **cercanías**.

Sabemos que $f(x)=3x-2$ si $-2\leq x$. Por tanto, $f(2)=3\cdot(-2)-2=-6-2=-8$. Es decir, $f(x)$ en $x=2$ vale -8, y para los valores de x mayores que 2, $f(x)$ **se acerca a -8**.

¿Cuánto tendrá que valer entonces b ? Eso es, $b=-8$. De esa forma $f(x)$ también será continua en $x=-2$.

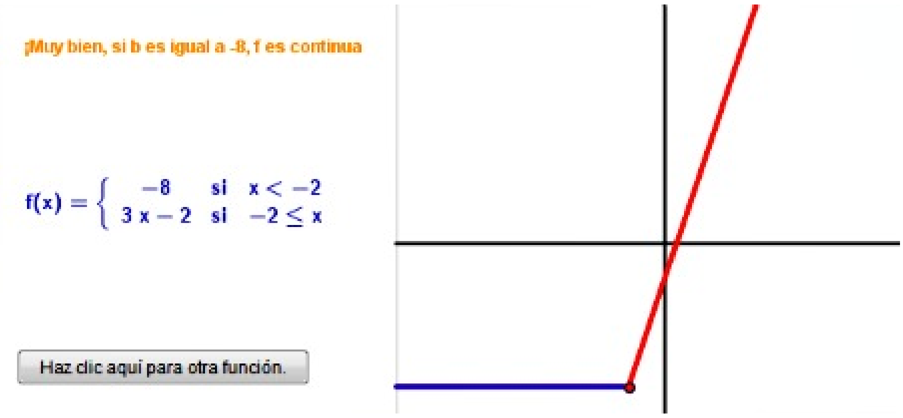


Imagen de elaboración propia

Estudiar el límite de una función en un punto consiste en saber **cómo se comporta la función** cuando **nos acercamos** a ese punto.

En el ejemplo anterior, para conseguir que $f(x)$ fuera continua en $x=-2$, hemos obligado a que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a -2 sea -8.

Escrito de forma más abreviada: $\lim_{x\to -2} f(x)=-8$

Importante

Si $f(x)$ se acerca a l cuando x se aproxima al punto a , diremos que l es el límite de $f(x)$ en el punto a .

Lo anterior se expresa de la siguiente forma: $\lim_{x \to a} f(x) = l$

Si haces clic en la siguiente imagen, puedes acceder a una escena de GeoGebra muy similar a la anterior. En ella también se pide que determines un valor para que una función definida a trozos, sea continua en el punto $x=1$.

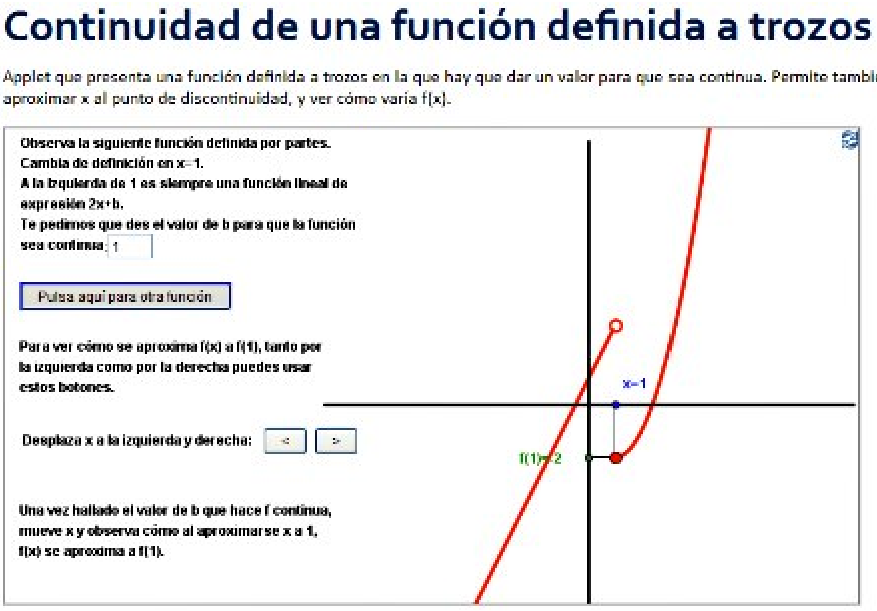


Imagen de elaboración propia

La escena también te permite ver cómo varía $f(x)$ cuando x se acerca a 1. Puedes comprobar que, si la función aún no es continua en $x=1$, los valores a los que se aproxima $f(x)$ son distintos si lo hacemos para valores más pequeños que 1, o mayores. Por tanto no existe el límite de la función cuando x tiende a 1.

Pero, si repetimos el proceso cuando ya se ha conseguido que la función sea continua en 1, los valores a los que se aproxima $f(x)$ cuando x se acerca a 1, son iguales tanto si lo hacemos para valores menores o mayores que 1. En ese caso, sí existe el límite cuando x tiende a 1, y coincide con $f(1)$.

Repite la escena varias veces, hasta que entiendas lo que se ha explicado.

Importante

Hallar el límite de una función $f(x)$, **continua en un punto** $x=a$, es muy fácil. Se cumple que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Esto facilita muchísimo el límite de una función en punto para las funciones continuas, que, como ya hemos visto, son la mayoría de las funciones elementales.

Calcular el límite de $f(x)=x^3+4x+7$ cuando x tiende, por ejemplo, al punto -1, es muy fácil. Como $f(x)$ es una función polinómica, por tanto continua en todo su dominio, basta con hallar $f(-1)$.

$$\lim_{x\to -1} x^3+4x+7 = (-1)^3+4\cdot(-1)+7=2$$

Ejercicio resuelto

Calcula los siguientes límites de funciones en los puntos que se indican:

a. $\lim_{x\to 2} 4x-5$

b. $\lim_{x\to 3} 2^x$

c. $\lim_{x\to 1} \frac{2+x}{1-x}$

d. $\lim_{x\to 2} \frac{2+x}{1-x}$

Mostrar retroalimentación

a. Al ser $f(x)=4x-5$ una función afín, por tanto continua en todo su dominio, basta con hallar el valor de la función en el punto 2, es decir $f(2)=4\cdot 2-5=8-5=3$. Luego el límite es 3.

b. El razonamiento es similar al del apartado anterior, $f(x)=2^x$ es continua en todo su dominio, hallamos el valor de la función en el punto 3, es decir $f(3)=2^3=8$. El límite, por tanto, es 8.

c. La función no está definida en el punto $x=1$ en que se quiere hallar el límite, ya que el denominador $1-x$ se anula en 1. Al acercarnos a $x=1$, el denominador se aproxima a 0 y, por tanto, los valores que toma la función racional se harán cada vez más grandes. En este caso decimos que el limite es infinito: $\lim_{x\to 1} \frac{2+x}{1-x}=\frac{3}{0}=\infty$

d. La función $f(x)=\frac{2+x}{1-x}$ en el punto $x=2$ es continua, luego si queremos hallar el límite, sólo tenemos que sustituir 2 en la función: $f(2)=\frac{2+2}{1-2}=\frac{4}{-1}=-4$. Por tanto, el límite es -4.

Ejercicio resuelto

Calcula el siguiente límite de una función racional. Se denominan **funciones racionales** aquellas cuya expresión algebraica es el cociente de dos polinomios.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-3x-4}{x-4}$$

Mostrar retroalimentación

Para calcular dicho límite vamos a sustituir x por 4 en la expresión analítica de la función: $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-3x-4}{x-4} = \frac{16-12-4}{4-4} = \frac{0}{0}$

Al cociente $\frac{0}{0}$ se le denomina una **indeterminación**, es decir, no sabemos cuánto vale el límite.

¿Qué hacemos entonces? En este caso, como al sustituir por 4 en los dos polinomios nos da 0, significa que 4 es raíz de dichos polinomios. Es decir, $x-4$ es un factor de ambos. Simplificamos, a ver qué ocurre:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-3x-4}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)\cdot(x+1)}{x-4} = \lim_{x \to 4}(x+1) = 5$$

Por tanto, en este caso, el límite es 5.

Comprueba lo aprendido

Completa los valores de los límites de las siguientes funciones:

a. $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x} = \square$

b. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \square$

Enviar

En los ejercicios **13** y **14** de la página de Vitutor puedes ver cómo se resuelven ambos límites.

Para terminar este apartado, veamos un vídeo de juanmemol en el que se explica un límite muy similar al ejercicio anterior:

2.2. Límites laterales

Imagen de elaboración propia

¿Recuerdas el partido entre el Gijón y el Osasuna? ¿Sí, aquel que terminó con un 1-0, siendo Barral, jugador del Spórting, quien marcó el único tanto del encuentro en el minuto 66?

De aquel partido, la función que nos interesaba era la que asociaba a cada instante del partido los goles que se habían marcado hasta ese momento. Su gráfica era la que aparece en la imagen de la derecha.

En la definición de límite en un punto a, centrábamos nuestra atención en cómo varía $f(x)$ cuando x se acerca a a. Pero al punto a nos podemos acercar por la izquierda o por la derecha. Es decir, para valores menores que a o mayores que a.

En el partido, nos podemos acercar a 66 por instantes anteriores o posteriores. Para instantes anteriores, $f(x)=0$ puesto que aún no se ha marcado el gol. En tanto que para instantes posteriores $f(x)=1$ ya que se ha marcado el gol.

Eso quiere decir que $f(x)$ **no tiene límite** cuando x tiende a 66. Lo que, como ya habíamos visto, implicaba que $f(x)$ no era continua en 66. En este caso, jugar en el "green" del 66 da lugar a un buen salto.

Importante

Si $f(x)$ se acerca a l cuando x se aproxima al punto a para valores menores que a, diremos que l es el **límite por la izquierda** de $f(x)$ en el punto a.

Y se expresa: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$.

Si $f(x)$ se acerca a m cuando x se aproxima al punto a para valores mayores que a, diremos que m es el **límite por la derecha** de $f(x)$ en el punto a.

Se escribe: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = m$.

Si los dos límites anteriores coinciden, existe el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y es igual a ese valor común.

En la función del partido de fútbol $\lim\limits_{x \to 66^-} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 66^+} f(x) = 1$. Por tanto, como ambos valores no coinciden, se tiene que $\nexists \lim\limits_{x \to 66} f(x)$.

Reflexiona

Las tarifas postales del servicio de Correos para envío de paquetes, durante el año 2011 vienen expresadas en la siguiente tabla:

**PENÍNSULA Y BALEARES		
	DESTINO	
	CANARIAS, CEUTA, MELILLA y ANDORRA	RESTO NACIONAL
	Precio final	
Hasta 1 Kg.	6,00	6,00
Hasta 2 Kg.	6,60	6,60
Hasta 5 Kg.	7,60	7,60
Hasta 10 Kg.	8,70	8,70
Hasta 15 Kg.	11,45	11,45
Hasta 20 Kg.	13,80	13,80

Captura de pantalla de la web de Correos

Consideramos la función que al peso del paquete le asocia el precio que hay que pagar:

a. Representa gráficamente la función anterior.

b. ¿Es continua? ¿En qué puntos es discontinua?

c. Calcula los siguientes límites: $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 10^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 10^+} f(x)$.

d. Halla $\lim_{x \to 5} f(x)$.

Mostrar retroalimentación

a. La gráfica de la función tiene la siguiente forma:

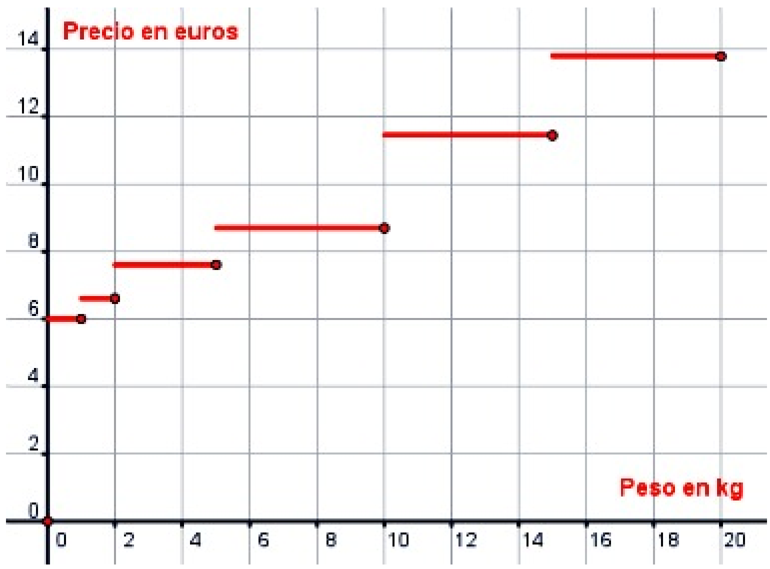


Imagen de elaboración propia

b. La función no es continua. Es discontinua en los puntos donde cambia la tarifa: 1, 2, 5, 10, 15 y 20.

c. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 6{,}60$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 7{,}60$, $\lim_{x \to 10^-} f(x) = 8{,}70$ y $\lim_{x \to 10^+} f(x) = 11{,}45$.

d. No existe $\lim_{x \to 5} f(x)$, ya que los los límites laterales no coinciden: $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 7{,}60 \neq 8{,}70 = \lim_{x \to 5^+} f(x)$.

Importante

Una función $f(x)$ tiene una **asíntota vertical** en el punto a , de ecuación $x=a$ si alguno de los límites laterales en ese punto es **más o menos infinito**.

En ese caso, la gráfica de la función se aproxima a la asíntota condicionada por el **signo** que tenga el infinito.

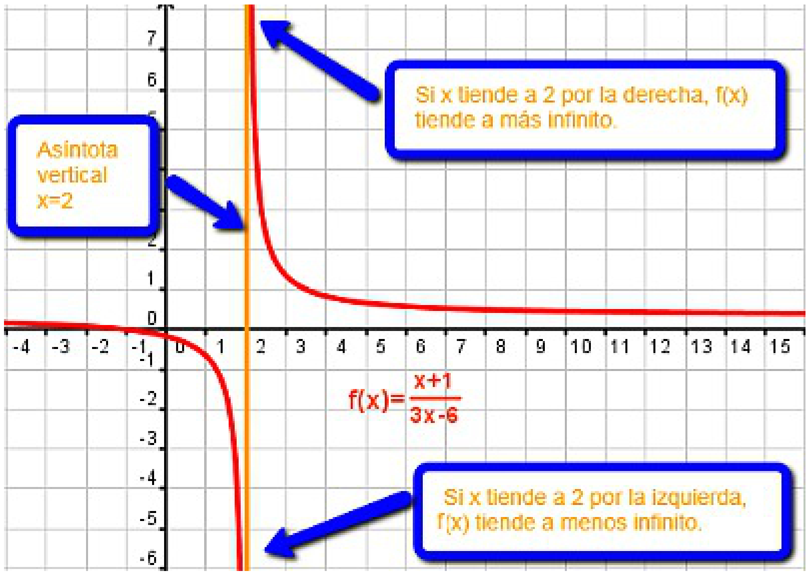


Imagen de elaboración propia

En el siguiente vídeo de juanmemol puedes ver con detenimiento cómo se calculan los límites laterales de una función de proporcionalidad inversa en el punto en que se anula el denominar, es decir, el punto que corresponde a la asíntota vertical.

Reflexiona

Si haces clic en la siguiente imagen, puedes acceder a una escena de GeoGebra en la que se representan funciones racionales. Te pedimos que halles las ecuaciones de las asíntotas de dichas funciones. Puedes comprobar si tu respuesta es correcta activando el controlador.

También debes calcular los límites laterales en el punto que corresponde a la asíntota vertical.

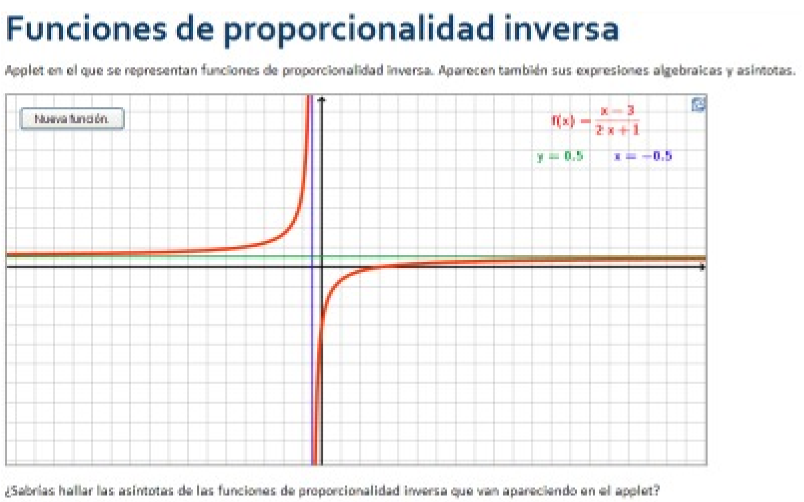


Imagen de elaboración propia

Mostrar retroalimentación

Si $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, la asíntota vertical se encuentra en la recta $x=\dfrac{-d}{c}$, es decir en el punto donde se anula el denominador. En tanto que la asíntota horizontal será $y=\frac{a}{c}$.

La forma en que la función se aproxima a dicha asíntota, junto a la explicación del vídeo anterior, te ayudará a calcular los límites laterales.

3. Función continua en un punto

Sabemos que, conocida la gráfica de un función, podremos afirmar si es continua o no si podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel. Ahora nos toca prestar nuestra atención a por qué "**tenemos que levantar el lápiz del papel**", en el caso de que exista **discontinuidad**. Es decir, ¿por qué una función es continua o discontinua en un punto?

Para este estudio no será necesario fijarnos en las funciones lineales, cuadráticas y **polinómicas** en general, ya que son continuas. Tampoco tendremos que mirar las funciones exponenciales, logarítmicas, senos y cosenos, pues también lo son.

La mayoría de las funciones que no son continuas se encuentran entre las funciones de proporcionalidad inversa, racionales, tangentes y **definidas a trozos**.

Si haces clic en la siguiente imagen, podrás acceder a una escena de GeoGebra en la que es posible estudiar la continuidad de cuatro funciones diferentes en el punto $a = 2$. La escena dispone de seis botones, cuatro sirven para seleccionar las distintas funciones, y los otros dos para mover un punto que se aproxima a 2. Mira con detenimiento qué ocurre con $f(x)$ cuando x se acerca a 2. De ese modo podrás deducir qué diferencias existen en esa aproximación teniendo en cuenta que la función sea o no continua en $a = 2$.

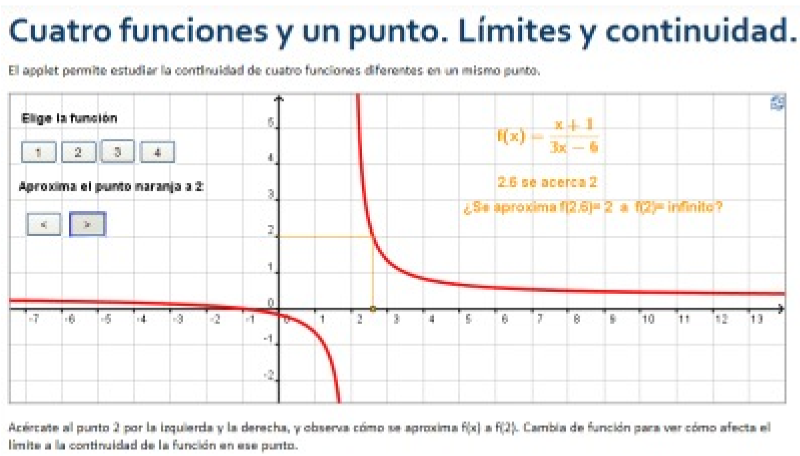
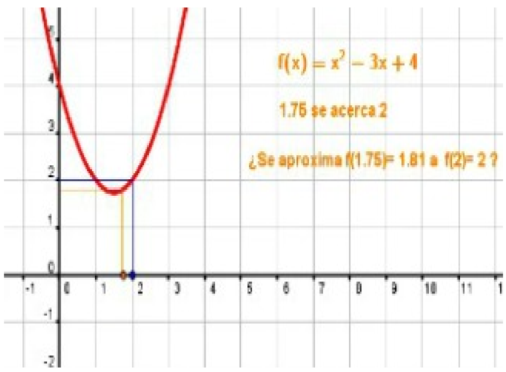


Imagen de elaboración propia

Podemos afirmar que una función no es continua en un punto por tres motivos: que **no esté definida la función en dicho punto**, que **no exista el límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende al punto**, o que aún existiendo el límite y la función en el punto, **ambos valores no coincidan**.

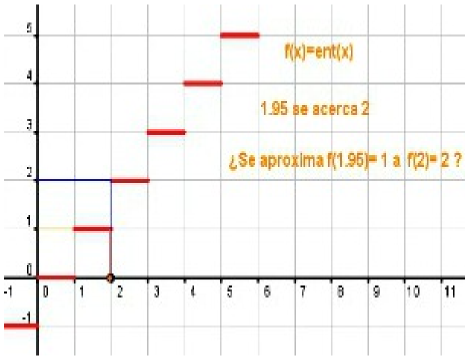


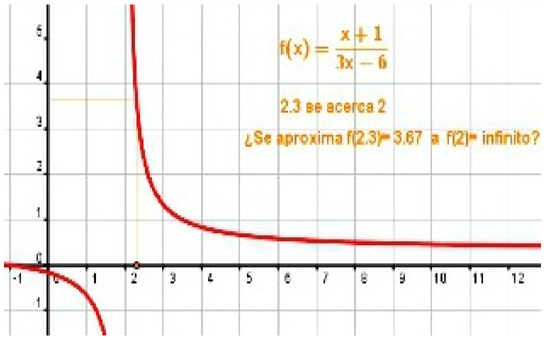
Para la función cuadrática, $f(x)$ es continua en 2. Se cumplen los tres requisitos:

Existe $f(2)$, también existe $\lim_{x \to 2} f(x)$, y ambos valores coinciden.

Para la función a trozos, $f(x)$ no es continua en 2:

Existe $f(2)$, pero no existe $\lim_{x \to 2} f(x)$, ya que los límites laterales son diferentes.
Por la izquierda tiende a 1 y por la derecha a 2.





Para la función de proporcionalidad inversa, $f(x)$ no es continua en 2.

No existe ni $f(2)$, y además $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$.

Comprueba lo aprendido

Vamos a estudiar la continuidad de la función que aparece representada en la imagen.

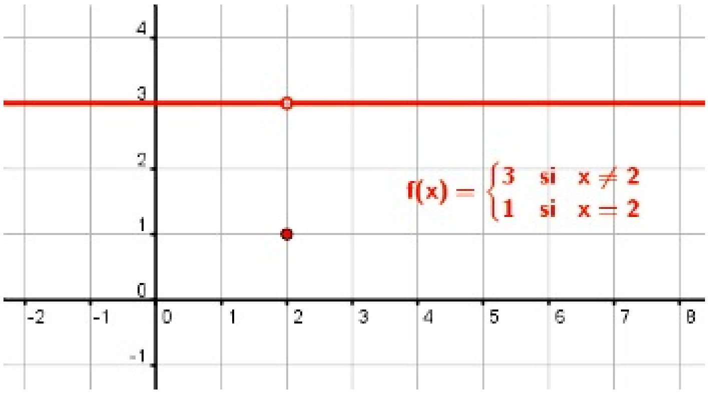


Imagen de elaboración propia

Para ello completa las siguientes frases:

Gráficamente se ve con claridad que f es discontinua en el punto ☐ .

f(2) = ☐ y el límite de f(x) cuando x tiende a 2 vale ☐ .

Por tanto f ☐ es continua en 2, ya que los dos valores anteriores ☐ son iguales.

Enviar

Importante

Una función $f(x)$ se dice **continua** en un punto $x=a$, si $f(x)$ se aproxima a $f(a)$ cuando x se acerca a a, o lo que es lo mismo, si cumple las siguientes tres condiciones:

1. Que exista $f(a)$
2. Que exista $\lim_{x \to a} f(x)$
3. Que los dos valores anteriores coincidan, es decir, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

En caso contrario, la función se dirá **discontinua** en dicho punto.

Una función que es continua en **todos los puntos donde está definida**, se dirá **continua**.

En el siguiente enlace puedes ver una clasificación de los distintos tipos de discontinuidades y su relación con la existencia o no del límite en un punto, o de los límites laterales.

Clasificación de discontinuidades

Comprueba lo aprendido

Para estudiar la continuidad de esta función definida por partes, es conveniente que completes los huecos que aparecen en las siguientes afirmaciones.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5 & \text{si} \quad x<3 \\ x & \text{si} \quad 3\leq x \end{cases}$$

a) Antes del punto 3 ___ es continua porque en ese trozo se define como una función ___ .

b) Después del punto ___ también es ___ pues se define como una función ___ .

c) Para ver si es continua en el punto 3 tendremos que estudiar el ___ de f(x) cuando x tiende a él.

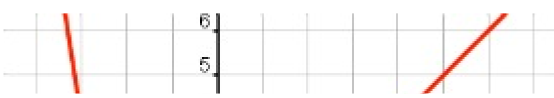
d) Si nos acercamos a 3 para valores menores que 3 la función tiende a ___ .

e) Si nos acercamos a 3 para valores mayores que 3 la función tiende a ___ .

f) De lo anterior deducimos que ___ existe el $\lim_{x \to 3} f(x)$.

Enviar

Para completar correctamente todos los huecos, seguro que te viene bien ver la gráfica de la función $f(x)$.



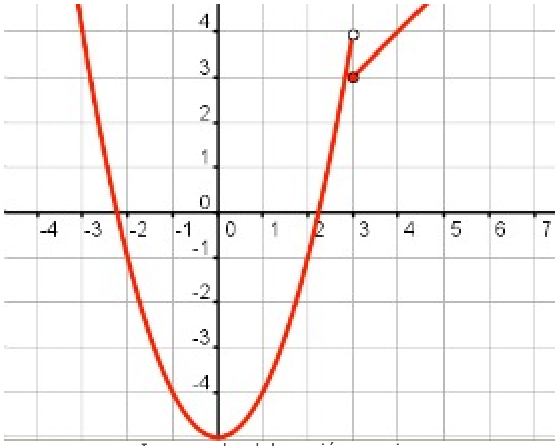


Imagen de elaboración propia

Ejercicio resuelto

Halla el valor de a para que la siguiente función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Mostrar retroalimentación

No hay duda de que el único punto en el que puede ser discontinua la función es en $x=1$, ya que antes de él la función es lineal, y después está definida como una función cuadrática, ambas continuas.

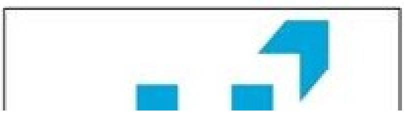
Por tanto, tenemos que estudiar la continuidad en 1. Si queremos que la función sea continua en él se deben cumplir las tres condiciones: que exista $f(1)$, exista $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, y que los dos valores anteriores coincidan.

En el ejercicio resuelto número 9 de esta página de Vitutor, podemos ver qué valor tomará a para que $f(x)$ sea continua en 1.

Ejercicio resuelto

Curso 2010/2011

Halla el valor de la constante a para que la función



$$f(x)=\begin{cases} ax^2-6 & \text{si} \quad x<3 \\ \frac{12}{x}-a & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases}$$

sea continua en todos los números reales.

Mostrar retroalimentación

Para que la función sea continua, debe serlo en todos sus puntos.

Antes de 3 lo es pues en ese intervalo la función está definida como una función cuadrática.

Después de 3 también lo es, ya que está definida como una función de proporcionalidad inversa que solo es discontinua en el punto en que se anula el denominador, que es 0, que no pertenece al intervalo.

Veamos en el punto 3. Esudiemos las tres condiciones que hemos citado anteriormente:

1. Existe $f(3)=\frac{12}{3}-a=4-a$

2. Existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$. Para ello deben existir los límites laterales y ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} ax^2-6=a\cdot 3^2-6=9a-6 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} \frac{12}{x}-a=\frac{12}{3}-a=4-a \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a-6=4-a\Rightarrow 10a=10\Rightarrow \boxed{a=1}$$

3. Para el valor $a=1$ se cumple que $f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Hasta ahora solo nos ha preocupado el límite de una función en un punto, pero también nos podemos preguntar qué ocurre con $f(x)$ cuando x, la variable independiente, se aleja mucho del origen. Es decir, qué ocurre con $f(x)$ cuando x **tiende a infinito**. Tanto a más infinito como a menos infinito.

En la imagen de la derecha puedes ver la gráfica de una función $f(x)=\frac{10}{x}$ que nos indica cómo cambia el volumen de un recipiente, $f(x)$, cuando la presión en el recipiente, x, se va modificando.

¿Qué ocurre con el volumen cuando la presión se hace muy grande? Es decir, cuánto vale:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{10}{x}$$

En el gráfico de la derecha podemos ver que si la presión es grande, el volumen es cada vez más pequeño, y tiende a cero. Es lógico, si x crece, $\frac{10}{x}$ decrece.

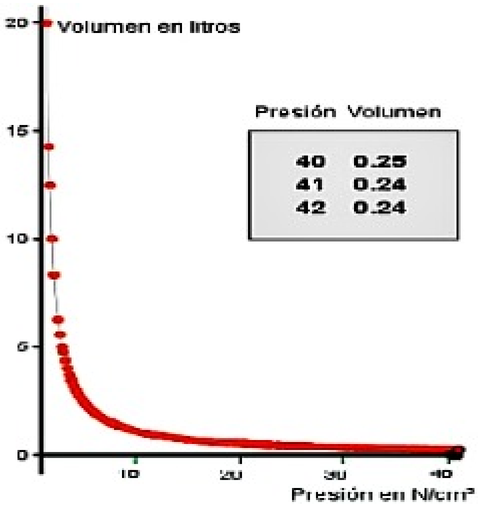


Imagen de elaboración propia

Se aprecia también que esa función tiene una asíntota horizontal en el eje de las X, es decir, $y=0$.

Importante

Si $f(x)$ se acerca a l cuando x se hace muy grande en valor absoluto, diremos que l es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a **infinito**.

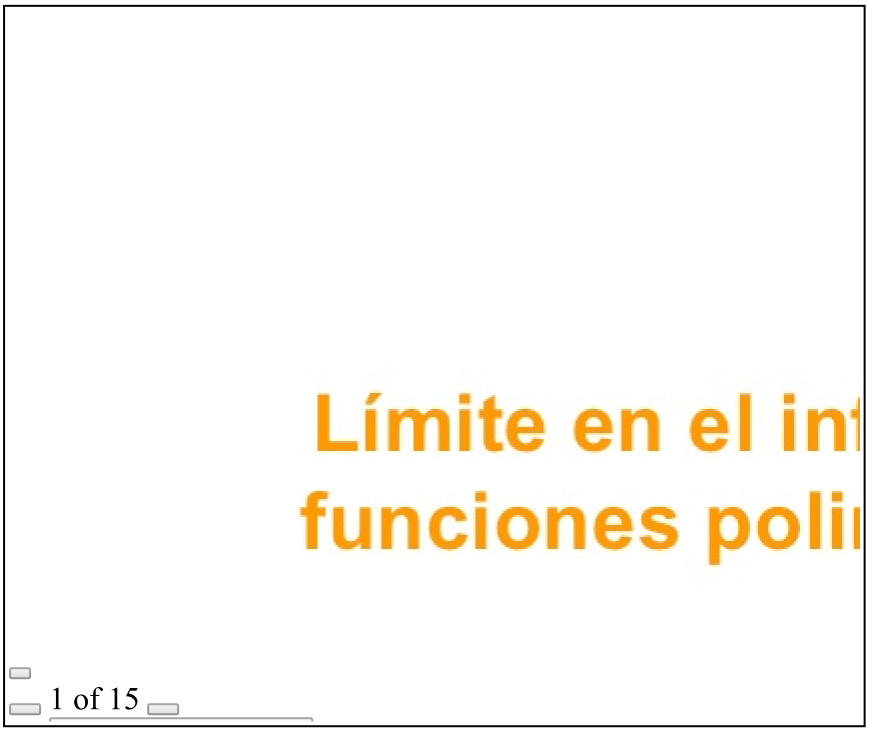
Se expresa de la siguiente manera: $\lim_{x \to \infty} f(x)=l$.

Si x tiende a infinito solo para valores positivos, diremos x tiende a **más infinito**. Y se escribe $\lim_{x \to +\infty} f(x)=l$. Cuando esto ocurre, la función tiene una **asíntota horizontal** en la recta $y=l$, para los valores positivos de x.

En el caso de que x tienda a infinito solo para valores negativos, se dirá que x tiende a **menos infinito**. Se expresa $\lim_{x \to -\infty} f(x)=l$. Cuando esto ocurre, la función tiene una **asíntota horizontal** en la recta $y=l$, para valores negativos de x.

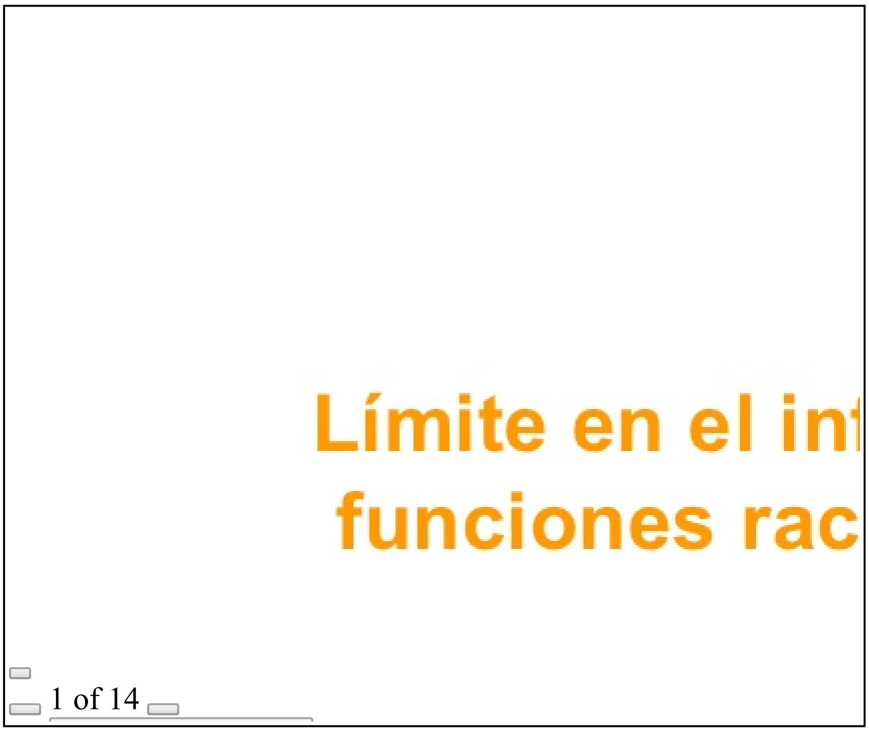
En estas dos presentaciones, puedes ver cómo se comportan en el infinito las funciones polinómicas:

Límite en el infinito de un polinomio



Y las funciones racionales:

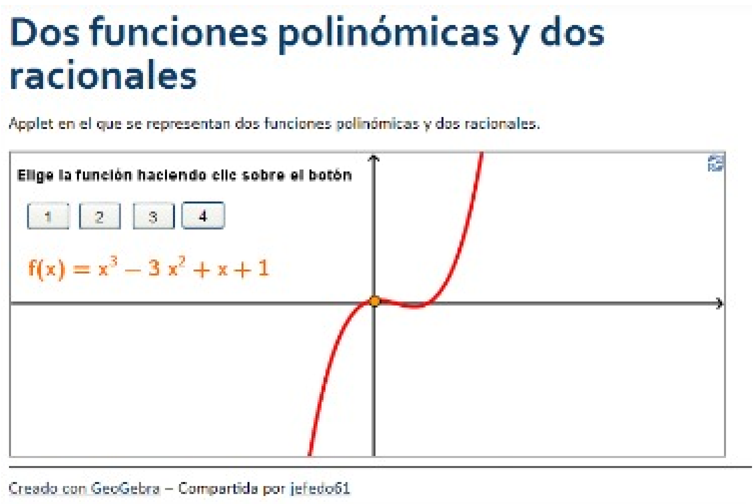
Limite en el infinito de funciones racionales



En las presentaciones hemos visto que el límite cuando x tiende a infinito puede ser infinito. Por ejemplo, en el caso de las funciones polinómicas y algunas racionales (aquellas en las que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador). Esto quiere decir que cuando x se hace muy grande en valor absoluto, $f(x)$ también crece indefinidamente en valor absoluto.

Comprueba lo aprendido

Si haces clic en la siguiente imagen, puedes acceder a una escena de GeoGebra en las que aparecen las gráficas y la expresión analítica de cuatro funciones que puedes ir que aparecen las gráficas y la expresión analítica de cuatro funciones que puedes ir viendo haciendo clic sobre los diferentes botones. También puedes mover el punto naranja a lo largo de la gráfica.



Completa los siguientes espacios en blanco que contienen cuestiones relacionadas con esas funciones.

a) Las dos funciones que no tienen ningún tipo de asíntotas son ____ y ____ por ser las dos funciones polinómicas (escribe sus nombres en orden alfabético).

b) g tiene una asíntota vertical en x= ____ , y horizontal en y= ____ .

c) El límite cuando x tiende a 2 por la izquierda de g(x) es ____ infinito.

d) El límite cuando x tiende a menos infinito de g(x) es ____ .

e) La única función que tiene asíntota oblicua es ____ .

f) i tiene una asíntota vertical en x= ____ , porque en ese punto se anula su denominador.

g) El límite cuando x tiene a 1 por la derecha de i(x) es ____ infinito.

h) El límite cuando x tiende a menos infinito de h(x) es ____ infinito.

Enviar

Estas cuestiones te servirán de repaso a todo lo que hemos visto en este tema. Si fallas en algunas de ellas, quizás debas volver a mirar un poco más los contenidos.

Ejercicio resuelto

Halla las asíntotas de la siguiente función racional:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$$

Mostrar retroalimentación

Asíntota vertical: el denominador se anula en $x=2$, hallemos el límite en dicho punto:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x-2} = \frac{5}{0} = \infty$$

Más concretamente :

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+1}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+1}{x-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Por tanto la función tiene una asíntota vertical en **x=2**.

Asíntota horizontal no tiene ya que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

Asíntota oblicua: sí tiene ya que el grado del numerador es una unidad más que el grado del denominador.
Para calcular dicha asíntota realizamos la división de los dos polinomios. Al hacerlo obtenemos $x+2$ como cociente y 5 de resto, por tanto:

$$\frac{x^2+1}{x-2} = \frac{5}{x-2} + (x+2)$$

Esto quiere decir que cuando x tiende a infinito la función $f(x)$ se comporta como la funcion afín $y = x+2$, ya que $\frac{5}{x-2}$ tiende a 0 cuando x tiende hacia infinito. Por tanto la asíntota oblicua es $y = x+2$.

En el siguiente vídeo se halla la ecuación de la asíntota oblicua de otra forma. De ti depende elegir la más adecuada para tu forma de operar.

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

Dada la función

$$f(x)=x-\frac{3}{x+2}$$

determina y representa sus asíntotas.

Mostrar retroalimentación

Asíntota vertical: el único punto de discontinuidad de la función es $x=-2$, el punto donde se anula el denominador. Se cumple que:

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\infty$$

Por tanto, la función tendrá en $x=-2$ una asíntota vertical.

Asíntota horizontal u oblicua. Si calculamos el límite cuando x tiende a infinito, debemos fijarnos que x tiende a infinito y $\frac{3}{x+2}$ tiende a 0, por tanto el límite sería:

$$\lim_{x\to\infty} x-\frac{3}{x+2}=\infty-0=\infty$$

No hay asíntota horizontal, ya que para que la hubiera, el límite tendría que ser un número finito.

Pero como $\frac{3}{x+2}$ tiende a 0 cuando x tiende a infinito, podemos decir que $f(x)$ se parece a x en el infinito, lo que quiere decir que $y=x$ es una asíntota oblicua de la función.

Las gráficas de las asíntotas serían.

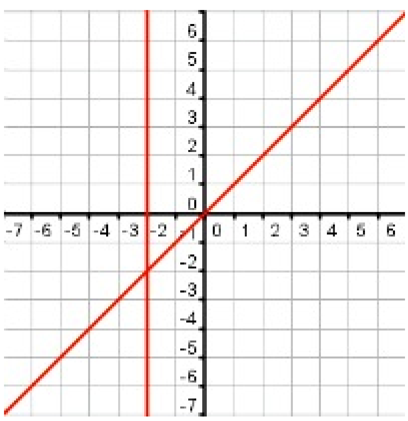


Imagen de elaboración propia

En este segundo tema se introducen dos conceptos fundamentales para el estudio de las funciones: límite y continuidad. Ambos están íntimamente ligados, siendo imposible estudiar cada uno de ellos sin que intervenga el otro.

En el desarrollo del tema hemos comenzado con la idea intuitiva y gráfica de la continuidad de una función, para seguir con el estudio del límite de una función en un punto, lo que nos lleva a definir los límites laterales y la aparición de las asíntotas verticales.

A continuación, definimos la continuidad en un punto, y analizamos los motivos que provocan que una función sea discontinua.

Por último, estudiamos el límite en el infinito y la posibilidad de que una función posea asíntotas tanto horizontales como oblicuas.

Importante

Con el siguiente gráfico puedes realizar un rápido repaso por todo lo visto en el tema.

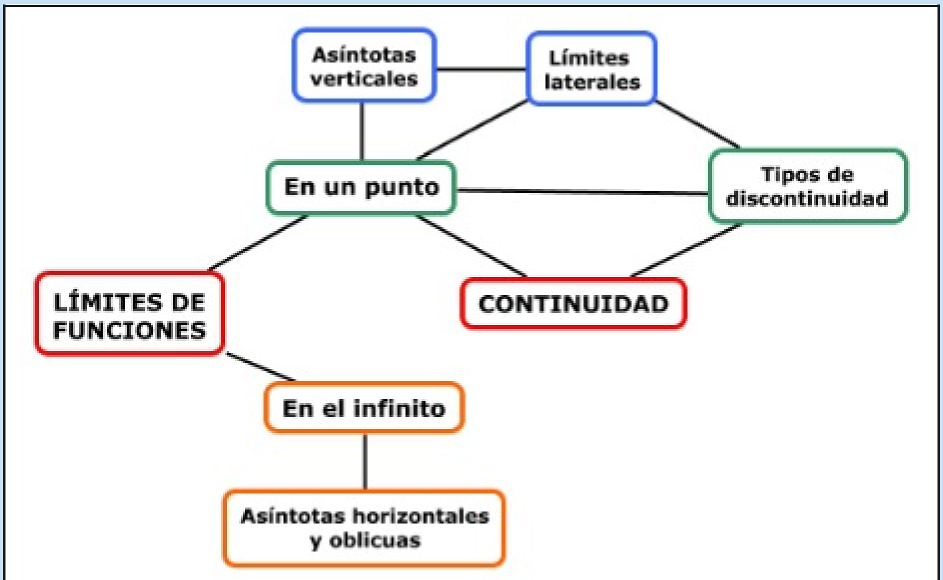


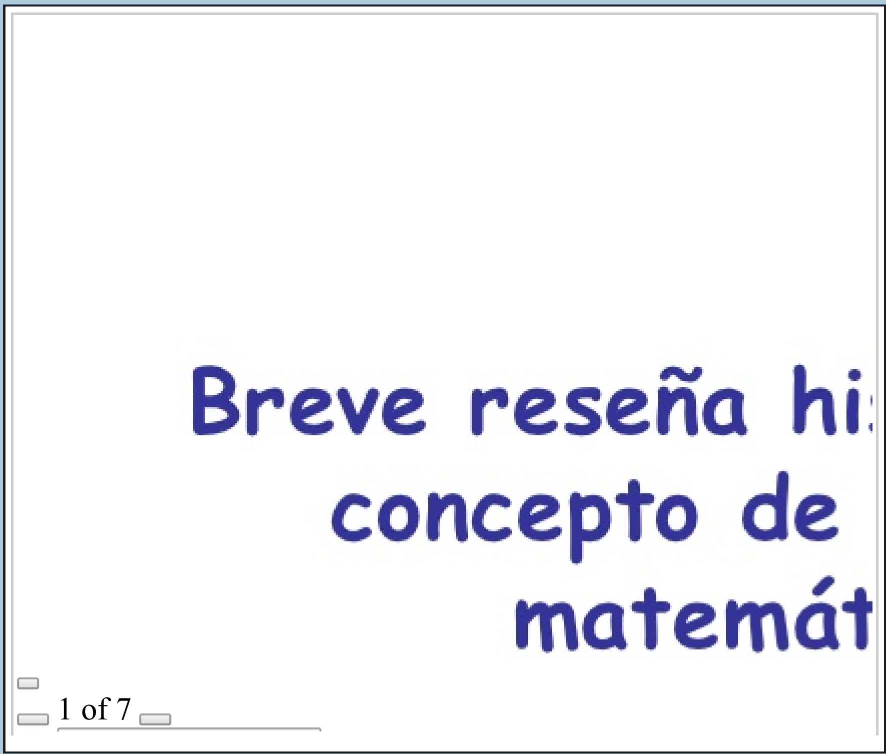
Imagen de elaboración propia

5.1. Recursos

Las nuevas herramientas informáticas nos ayudan mucho a calcular los límites. Por ejemplo, en la siguiente presentación se puede ver cómo se utiliza Geogebra para hallar las asíntotas de una función.

Curiosidad

Ya comentamos en el tema anterior que el concepto de función tardó siglos en construirse. Para recordar cómo fue esa historia puedes ver la siguiente presentación:



La definición de continuidad de una función es una cuestión de los siglos XIX y XX. En los dos siglos anteriores, las funciones estaban determinadas por curvas o por su expresión analítica. Y todas eran continuas. Fue a principios del XIX cuando matemáticos como Fourier, piensan que es necesario alejar la idea de función como una relación que viene dada por una fórmula.

A partir de entonces la veda queda abierta, y las posteriores definiciones permiten la aparición de **funciones definidas a trozos** o como límite de otro conjunto de funciones. Algunas de ellas podrían ser consideradas verdaderas patologías incluso para mentes muy abiertas como la de Euler.

Un ejemplo podría ser la función que se define de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ es racional}\\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional}\end{cases}$$

¿Te imaginas cómo es su gráfica?

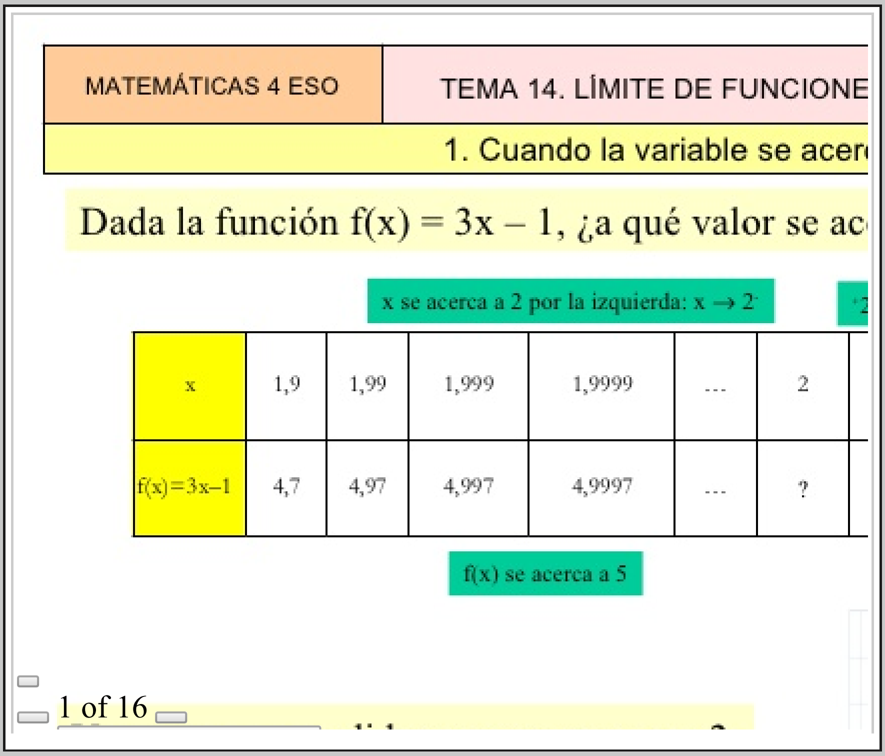
Curiosidad

Nos debe quedar claro que no todas las funciones tienen asíntotas. Por ejemplo, ya hemos visto que las funciones lineales, cuadráticas o el seno y coseno no las tienen. Por el contrario, hay funciones con infinitas asíntotas verticales, como por ejemplo, la tangente.

Las gráficas de las funciones que tienen asíntotas están muy condicionadas por ellas. En el siguiente vídeo podemos comprobarlo:

Para saber más

Para ampliar y profundizar tus conocimientos sobre límites y continuidad, puedes realizar una mirada atenta y detenida de la siguiente presentación:



Para saber más

En los siguientes enlaces también podrás acceder a más información sobre los contenidos tratados:

- Límite de una función en un punto
- Límite en el infinito
- Cálculo de asíntotas
- Continuidad
- Continuidad funciones definidas a trozos