



2º de Bachillerato
Matemáticas II

Contenidos

Límites y continuidad
Repaso del concepto de función y operaciones

1. Introducción



Ya conoces que la factura que debes pagar en una panadería depende del número de panes que hayas comprado o que el dinero que debe poner un grupo de personas para comprar un regalo determinado depende de la cantidad de miembros que tenga el grupo. A nuestro alrededor nos encontramos a diario con multitud de ejemplos de este tipo en los que el valor de una determinada cantidad depende de otra claramente. Así, podemos decir que la segunda la podemos poner en función de la primera.

Ya conoces las funciones y algunas de sus propiedades. Ahora nos proponemos hacer un repaso de ellas y profundizar en ciertos aspectos.

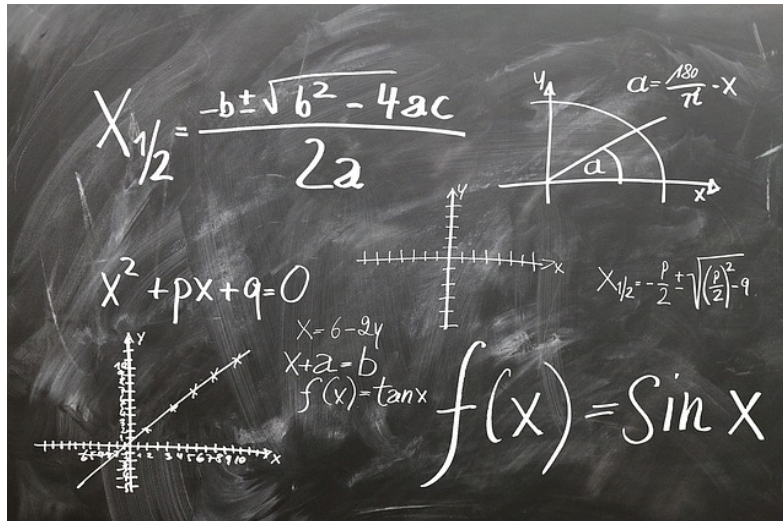


Imagen de geralt en [Pixabay](#). Dominio Público

1.1. Concepto de función. Dominio

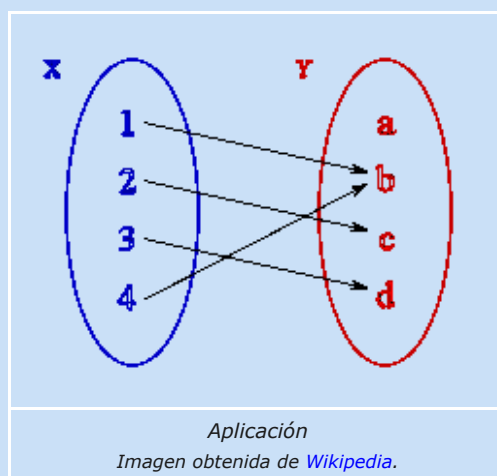
Como ya hemos comentado anteriormente, existen situaciones en las que un determinado valor depende de otro mediante algún tipo de relación. Por ejemplo, si un libro cuesta 21€, si una persona compra 2 libros debe pagar 42€, si compra 3 deberá pagar 63€ y si compra k libros, deberá pagar $21 \cdot k$ €. Pero además, esta situación en algunos casos no está tan clara, por ejemplo, imagina la situación en la que tienen una oferta y por la compra de dos libros te regalan un tercero. En este caso se nos fastidió el invento anterior, pero nuevamente existe una relación clara entre el número de libros que adquirimos y el precio que vamos a pagar al final. Existen además, otras situaciones en las que la relación se intuye, pero no está clara. Entre ellas podemos citar la relación entre el peso y la altura de una persona, entre la cantidad de alimento propio de un depredador y el número de depredadores... y otros cuya relación ya se conoce como puede ser la velocidad de un vehículo y el espacio que recorre en un tiempo determinado. Pero ¿Cómo se formaliza científicamente esta situación?

Importante

Una función o aplicación f es una relación entre dos conjuntos X e Y de forma que cada elemento x del conjunto X le hace corresponder un único elemento y del conjunto Y . En ese caso se dice que $f(x) = y$.

En la imagen de la derecha podemos observar gráficamente una función. En ese caso tenemos que: $f(1) = b$, $f(2) = c$, $f(3) = d$ y que $f(4) = b$.

Todo elemento de X debe participar en la relación, aunque no todos de Y . De hecho, el elemento a no recibe relación.



Aplicación
Imagen obtenida de [Wikipedia](#).

Ejercicio resuelto

Antes hemos narrado dos situaciones que deseamos retomar. La primera se refiere a la venta de un libro por 21€ cada ejemplar.

La segunda se refiere a que conocida la velocidad de un vehículo, podemos determinar el espacio que recorre en función del tiempo transcurrido.

Te pedimos que calcules la función que representa cada una de las situaciones anteriores.

Mostrar retroalimentación

a) En la primera situación, los valores que puede tomar son valores naturales y el cero, es decir, 0, 1, 2, 3,

La función la definiríamos como $f(x) = 21x$ donde x representa el número de ejemplares que compra y $f(x)$ la cantidad, en euros, que debe pagar.



Libros

Imagen obtenida del [banco de imágenes del ITE](#).

b) En el segundo caso, los valores que puede tomar el tiempo son todos los reales positivos. Si la velocidad a la que va el vehículo es V

La función la definiríamos como $e(t) = V \cdot t$ donde t representa el tiempo transcurrido y $e(t)$ el espacio recorrido.

Según hemos observado en el ejercicio anterior, cada una de las funciones está definida en un conjunto determinado. La primera está definida para los números naturales y el cero y la segunda para todos los valores reales positivos. ¿Para qué valores está definida una función determinada?

Importante

Si tenemos una función $f(x)$, se llama **dominio de la función** al conjunto de valores para los que esa función queda perfectamente definida. Pero ¿cuáles son los valores para los que una función no existe o no está definida? Muy sencillo, aquellos valores para los que las reglas del cálculo nos indican que no se pueden realizar los propuestos en la función. Mejor lo vemos con algunos ejemplos.

Ejercicio resuelto



Máquina impresora
Imagen obtenida del [Banco de imágenes del ITE](#)

En la empresa de Amalia han adquirido una antigua máquina de imprenta que quieren automatizar. Una vez comprobados todos los mecanismos, el programador informático ha diseñado una función que proporciona la presión de los inyectores de tinta en función de la rotación de la rueda que da movimiento a la introducción del papel. Esta función es

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{x^2-x-20}$$

Pero en algunas operaciones no funciona correctamente. ¿Puedes ayudar a calcular los valores en los que tiene problemas?

Mostrar retroalimentación

Los valores en los que tiene problemas el programador son aquellos en los que no está definida la función, es decir, los que no están en el dominio.

Para averiguarlo vamos a calcular el dominio de la función. En este caso, dado que la función es:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{x^2-x-20}$$

Observamos que aparece una raíz cuadrada, por lo que

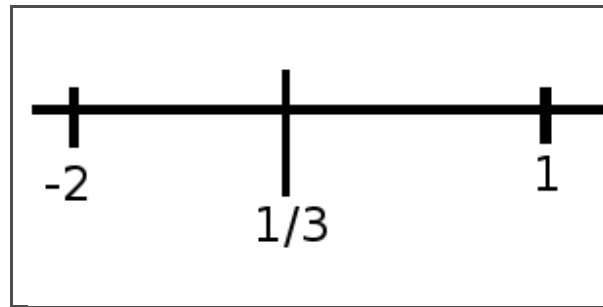
debemos exigir que lo que hay dentro de la raíz cuadrada, el radicando, sea positivo.

Por otra parte también aparece una división, por lo que debemos exigir también que el denominador sea distinto de cero. Estas son las dos condiciones que debemos poner.

Para la primera $3x+1 \geq 0$ $3x > -1$ $x > -1/3$

Si no eres amigo de las desigualdades, puedes seguir estos pasos: calcula los valores que lo anulan.

$3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ así tomamos un valor antes y otro después que este:



Si $x=-2 \Rightarrow 3 \cdot (-2)+1=-5$ que es negativo, por lo que esta parte no nos sirve.

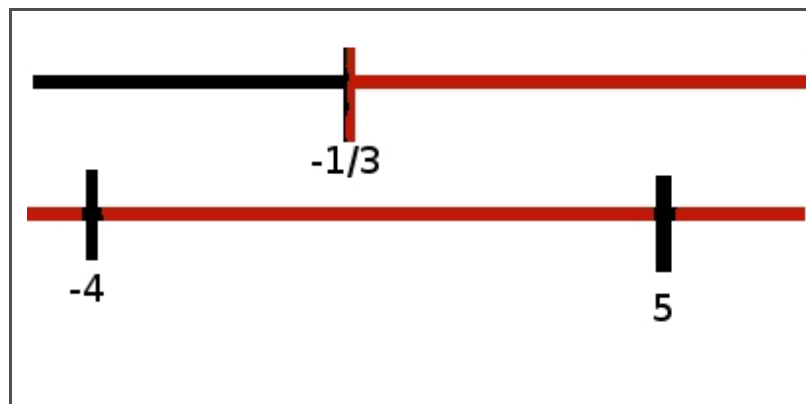
Si $x=1 \Rightarrow 3 \cdot 1+1=4$ que es positivo, por lo que esta parte es la que sirve. Por tanto, en esta primera condición el intervalo que nos sirve es $[-\frac{1}{3}, +\infty)$

Para la segunda condición debemos exigir que $x^2-x-20 \neq 0$
Para ello vamos a calcular los valores que anulan el denominador:

$$x^2-x-20=0 \Rightarrow x=\frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2}=\frac{1 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-4 \end{cases}$$

Así, para esta segunda condición, el intervalo que nos sirve es $(-\infty, -4) \cup (-4, 5) \cup (5, +\infty)$, es decir, todos los números reales menos el -4 y el 5.

El dominio de la función será la parte que se cumplan las dos condiciones simultáneamente. Gráficamente sería la zona en la que coincidan las dos marcas rojas:



Por tanto, el dominio de $f(x)$ es la unión de dos intervalos $[-\frac{1}{3}, 5) \cup (5, +\infty)$, es decir, todos los valores mayores o iguales que -1/3 excepto el 5.

Curiosidad

Leonhard Euler (cuyo nombre completo era Leonhard Paul Euler) fue un respetado matemático y físico. Nació el 15 de abril de 1707 en Basilea (Suiza) y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo (Rusia). Se lo considera el principal matemático del siglo XVIII y como uno de los más grandes de todos los tiempos.

Vivió en Rusia y Alemania la mayor parte de su vida y realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos. También introdujo gran parte de la moderna terminología y notación matemática, particularmente para el área del análisis matemático, como por ejemplo la **noción de función matemática**. Asimismo se le conoce por sus trabajos en los campos de la mecánica, óptica y astronomía.



Sello conmemorativo emitido el año 1957 en la antigua Unión Soviética. El texto dice: 250 años desde el nacimiento del gran matemático y académico Leonhard Euler

Imagen obtenida de la aplicación ["Pitágoras, recursos para las matemáticas"](#) de Mariano Real Pérez

Euler ha sido uno de los matemáticos más prolíficos, y se calcula que sus obras completas reunidas podrían ocupar entre 60 y 80 volúmenes. Una afirmación atribuida a Pierre Simon Laplace expresa la influencia de Euler en los matemáticos posteriores: «Lean a Euler, lean a Euler, él es el maestro de todos nosotros.»

En conmemoración suya, Euler ha aparecido en la serie sexta de los billetes de 10 francos suizos, así como en numerosos sellos postales tanto suizos como alemanes y rusos. El asteroide (2002) Euler recibió ese nombre en su honor.

1.2. Composición de funciones. Simetría

Si tenemos dos funciones cualesquiera podemos efectuar con ellas las mismas operaciones que realizamos con los números: suma, resta, multiplicación y división. Podemos obtener también una potencia de la función, su raíz cuadrada, su logaritmo... Al realizar cualquiera de estas operaciones se vuelve a obtener otra función, pero ojo, lo más normal es que el dominio de la función resultante sea distinto del dominio de las funciones implicadas, por lo que habría que calcularlo. Así, si tenemos las funciones



Baraja

Imagen obtenida del [banco de imágenes del ITE](#)

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3 \\ g(x) = 2x + 7 \end{cases} \text{ podemos calcular la función}$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{2x + 7}} . \text{ Calcula el dominio de cada una de ellas y comprueba lo que te hemos indicado sobre el dominio.}$$

Importante

Si tenemos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se define la función compuesta $f \circ g(x) = f(g(x))$. Debemos tener en cuenta que la función resultante es distinta a $g \circ f(x) = g(f(x))$. Veámoslo con un ejercicio.

Ejercicio resuelto

Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{3x^2 + 6}$ y $g(x) = \frac{1}{x+3}$ calcula las funciones $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$

Observa en el cuadro interactivo que se encuentra más abajo que las gráficas de las funciones $f(x)$, $g(x)$, $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$ son distintas.

Mostrar retroalimentación

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{3(g(x))^2 + 6} = \sqrt{3\left(\frac{1}{x+3}\right)^2 + 6} = \sqrt{\frac{3}{(x+3)^2} + 6} = \sqrt{\frac{3}{x^2 + 9 + 6x} + 6}$$

Por otra parte:

$$g \circ f(x) = \frac{1}{f(x) + 3} = \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 6} + 3}$$

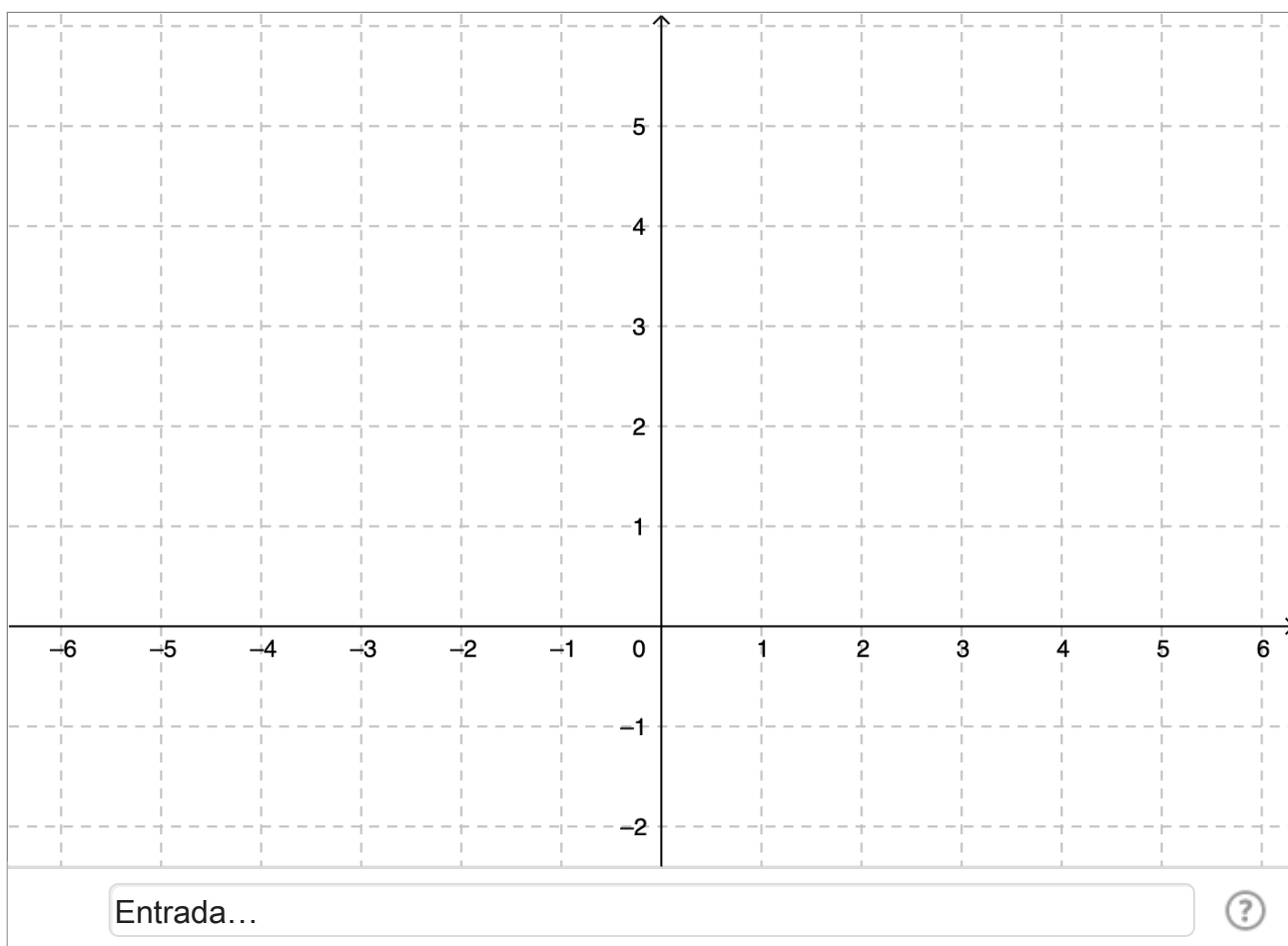
En la siguiente escena te ofrecemos una ventana interactiva cuyo funcionamiento es bastante sencillo. Si quieres representar gráficamente una función deberás escribirla antes en la zona inferior, donde aparece "Entrada". Una vez escrita la función aparecerá la gráfica de la misma.

A la hora de representar una función debes tener en cuenta la forma de escribirla, así, algunas de las más utilizadas se escriben de la siguiente forma:

$$x^3 = x^3 \quad \sqrt{x} = \text{sqrt}(x) \quad e^x = e(x) \quad \log(x) = \log(x) \quad \ln(x) = \ln(x)$$

$$\text{sen}(x) = \sin(x) \quad \cos(x) = \cos(x) \quad \arccos(x) = \arccos(x) \quad \frac{1}{x^2} = 1/(x^2)$$

Moviendo la rueda del ratón puedes ampliar y alejar determinados trozos de la función y de esta manera observar mejor lo que sucede en un entorno próximo. A continuación te dejamos el enlace a un [manual](#) sobre la introducción de funciones en Geogebra.



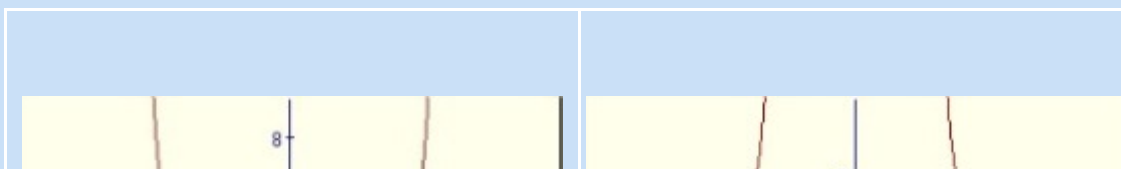
Applet alojado en [GeoGebra](#). Licencia CC

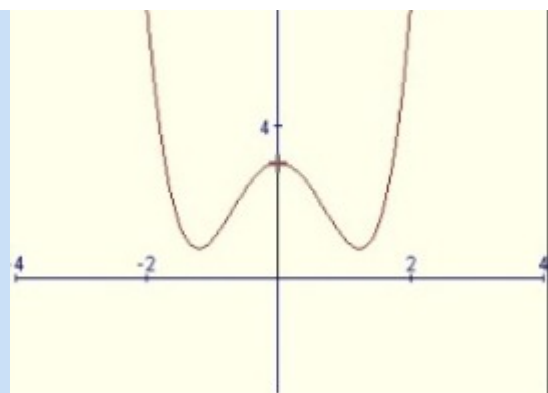
Importante

Si tenemos una función $f(x)$ diremos que es simétrica respecto al eje de ordenadas si cumple que $f(-x) = f(x)$ para todos los valores que pueda tomar la variable x .

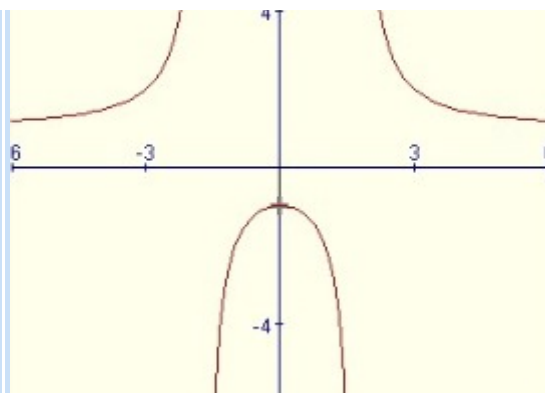
Gráficamente, la propiedad anterior se traduce en que su gráfica es simétrica respecto del eje y. Si dobáramos la gráfica por este eje, ambas partes de la gráfica coincidirían entre sí.

Este tipo de funciones se dice que son pares.





$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 3$$



$$g(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 3}$$

Ejercicio resuelto

Comprueba que la función

$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^5 + x}$ presenta simetría par. Representala gráficamente en la ventana interactiva que se encuentra más arriba.

Mostrar retroalimentación

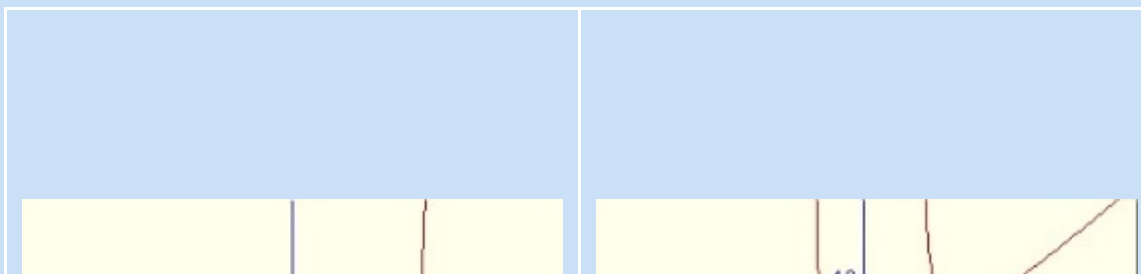
Vamos a comprobar que verifica la igualdad $f(-x) = f(x)$

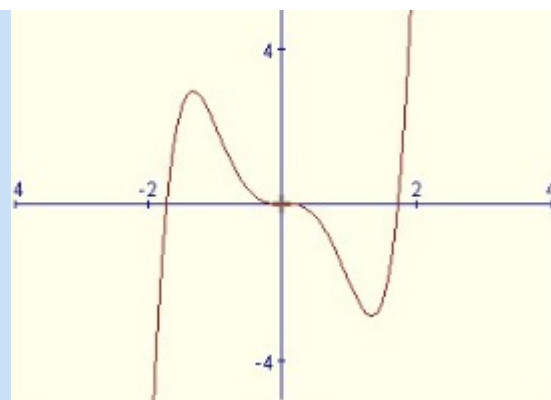
$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^5 + (-x)} = \frac{-x^3 + x}{-x^5 - x} = \frac{-(x^3 - x)}{-(x^5 + x)} = \frac{x^3 - x}{x^5 + x} = f(x)$$

Por tanto la función es par.

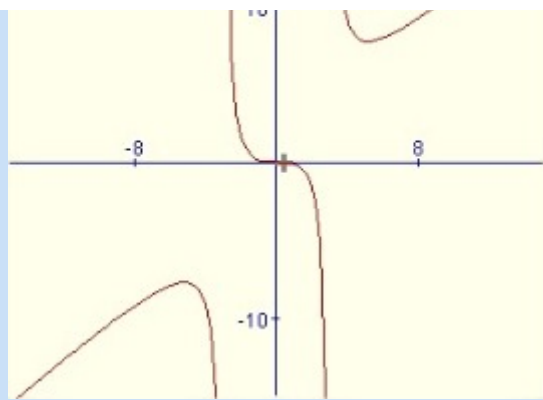
Importante

Si tenemos una función $f(x)$ diremos que es simétrica respecto al origen de coordenadas (punto $(0,0)$) si cumple que para todos los valores que pueda tomar la variable $f(-x) = -f(x)$. Gráficamente, la propiedad anterior se traduce en su gráfica en que podemos observar que el punto $(0,0)$ divide a la gráfica en dos partes simétricas respecto a este punto. Este tipo de funciones se dice que son impares.





$$f(x) = x^5 - 3x^3$$



$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$$

Ejercicio resuelto

Comprueba que la función $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3}$ es simétrica respecto al origen de coordenadas, es decir, es una función impar. Représentalas gráficamente en la ventana interactiva que has utilizado antes.

Mostrar retroalimentación

Para comprobar que es una función impar debemos ver que $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 + 2(-x)^2 - 3}{(-x)^3} = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{-x^3} = -\frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3} = -f(x)$$

Comprueba lo aprendido

De las siguientes funciones que te proponemos, escribe al lado de cada una P si la función es par, I si la función es impar, X si no es ninguna de las dos. Posteriormente, representa gráficamente cada uno de ellas en la ventana interactiva anterior y comprueba que has realizado bien el ejercicio.

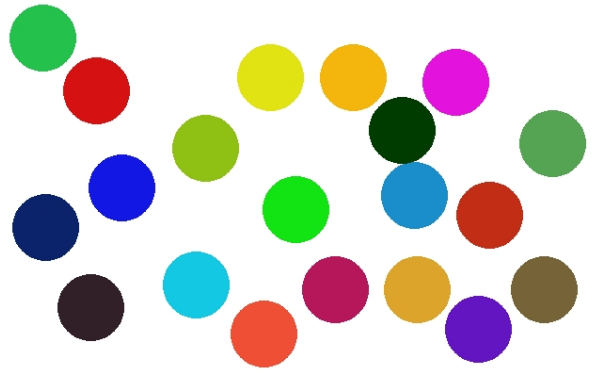
$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^5 + x}$ <input type="checkbox"/>	$f(x) = x^7 + 3x^3 - x$ <input type="checkbox"/>	$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x}$ <input type="checkbox"/>
$f(x) = x^4 + 3x^2$ <input type="checkbox"/>	$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 2}$ <input type="checkbox"/>	$f(x) = x^2 + 3 + \frac{x^3}{x^5 + x}$ <input type="checkbox"/>

Enviar



2. Puntos de corte con los ejes

Para representar gráficamente una función es fundamental conocer algunas de sus propiedades. A partir de ahora nos vamos a centrar en localizar distintos puntos característicos de las funciones que nos van a permitir conocerlas más de cerca y nos va a permitir discernir sobre su posible gráfica. Los puntos que localicemos de cada función son puntos por los que va a pasar su gráfica, pero además, son puntos que nos van a proporcionar información sobre algún caso concreto de la situación real de la que fue extraída esa función. Ahora debes estar atento. Ya verás como no es nada complicado.



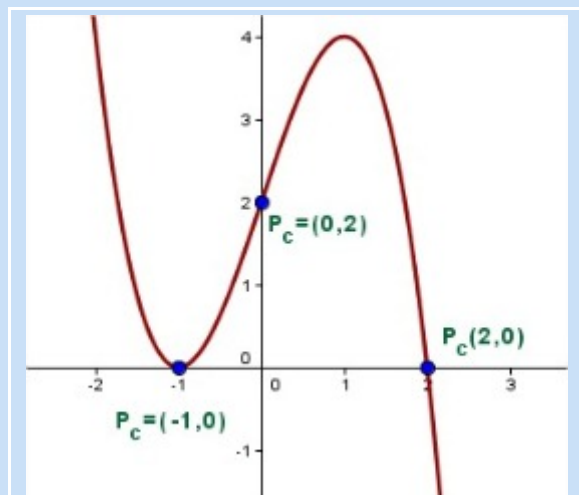
Entre los puntos que podemos considerar como característicos de una función se encuentran los puntos de corte con los ejes. Estos puntos nos proporcionan información sobre la función. Puede parecer que esta información sólo se refiere a estos puntos de corte, pero en ocasiones nos pueden ayudar a determinar otros puntos importantes de la misma.

Importante

Si tenemos una función $f(x)$ se llama punto o **puntos de corte con el eje de abscisas** a la/s soluciones del sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ si el punto $P = (a, 0)$ es una de las soluciones, por analogía con los polinomios, se dice que $x = a$ es una de la raíces de la función.

Por otra parte, se llama **punto de corte con el eje de ordenadas** a la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$. Si este sistema tiene solución, la misma será un punto $P = (0, b)$ por el que pasa la gráfica de la función.

A diferencia de la anterior definición, aquí el sistema de ecuaciones a lo sumo tiene una solución ya que, según hemos indicado en la definición de función, al valor $x = 0$ solamente le puede corresponder un único valor.



Ejercicio resuelto

La empresa de Amelia ha comprado una montadora de neumáticos mecánica y desea automatizarla. Han lijado la máquina, la han pintado de rojo y el ingeniero industrial ha diseñado un mecanismo para automatizarla. Este mecanismo lleva incorporado un pequeño ordenador que controlará todo el proceso, el programador informático ha creado un programa que



proceso: el programador informático ha creado un programa que automatiza todo lo que se puede hacer con la rueda, pero ha detectado que la máquina va cometiendo un error que va en función del tiempo que se utiliza la máquina. Este error en función del tiempo viene expresado por la siguiente función:

$$f(t) = \frac{8t^3 + t^2 - 49t + 70}{t^3 - 4t}$$

Este error no debe nunca ser 8 ¿Para qué valores del tiempo el error es 8?

Utiliza la pantalla interactiva que aparece más abajo para representar la función que hayas utilizado. Si mueves la rueda del ratón puedes aplicar un zoom y ver mejor la función, además si dejas pulsado el botón izquierdo del ratón y lo mueves puedes desplazarte a través de la vista gráfica.



Montadora de neumáticos
Imagen obtenida del [banco de imágenes del ITE](#).

Mostrar retroalimentación

Debemos hallar $f(t) = 8$, es decir, debemos resolver la ecuación.

$$\frac{8t^3 + t^2 - 49t + 70}{t^3 - 4t} = 8$$

$$8t^3 + t^2 - 49t + 70 = 8t^3 - 32t$$

$$t^2 - 49t + 70 = 8t^3 - 8t^3 - 32t$$

$$t^2 - 49t + 70 = -32t$$

$$t^2 - 49t + 32t + 70 = 0$$

$$t^2 - 17t + 70 = 0$$

La ecuación de arriba tiene de soluciones $t_1 = 7$ y $t_2 = 10$, para estos valores $f(t)$ vale 8.



Applet alojado en [GeoGebra](#). Licencia [CC](#)

Aquí tienes el enlace a un [manual](#) sobre la introducción de funciones en Geogebra.

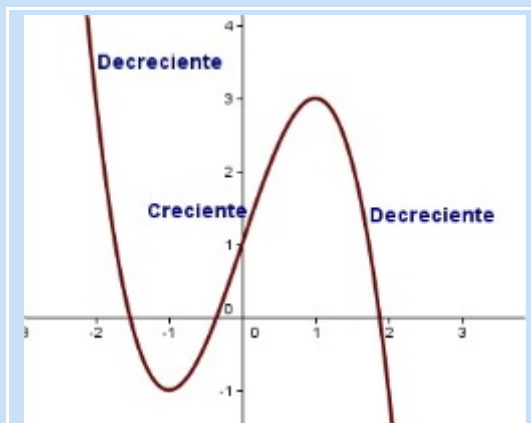
3. Monotonía

Vamos a repasar ahora algunos conceptos sobre las funciones. Como todos ellos están relacionados de alguna manera, vamos a verlos todos a la misma vez, aunque cada uno lo recojamos en un apartado diferente.

Todos ellos están relacionados con el comportamiento de la gráfica de la función, si es creciente, si es decreciente, cuándo se observa un extremo, es decir, un máximo o un mínimo...

Importante

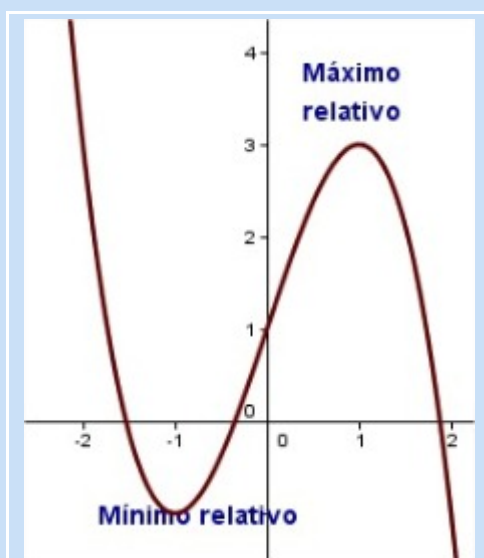
Si tenemos una función $f(x)$ decimos que es **creciente** si al dibujar su gráfica de izquierda a derecha el trazo cada vez es más alto. Por tanto, es creciente si al tomar dos valores a y b cualesquiera, si $a < b$ entonces $f(a) \leq f(b)$.



Si tenemos una función $f(x)$ decimos que es **decreciente** si al dibujar su gráfica de izquierda a derecha el trazo cada vez es más bajo. Por tanto, es decreciente si al tomar dos valores a y b cualesquiera, si $a < b$ entonces $f(a) \geq f(b)$.

Lo más normal es que la función no sea siempre creciente o decreciente, sino que se alternen los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Importante



Una función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en el punto $x = a$ si en todos los valores próximos a este punto, el valor de la función es más pequeño que $f(a)$ o lo que es lo mismo, hasta el valor a la función es creciente y después de este valor la función es decreciente.

Si para todos los valores b se cumple que $f(b) \leq f(a)$, entonces se dice que tiene un **máximo absoluto** en $x = a$.

Si tenemos una función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en el punto $x = a$ si en todos los valores próximos a este punto, el valor de la función es más grande que $f(a)$ o lo que es lo mismo, hasta el valor a la función es decreciente y después de este valor la función es creciente.

Si para todos los valores b se cumple que $f(b) \geq f(a)$, entonces se dice que tiene un **mínimo absoluto** en $x = a$.

Ejercicio resuelto

En una de las lijadoras que están automatizando en la empresa de Amalia han comprobado que la cantidad de líquido que debe circular por el inyector debe ser 12 unidades mas el triple de uno de los valores que resulta de un cálculo que proporcionan ciertas medidas del objeto que se quiere lijar.

Calcula la función que proporciona la cantidad de líquido en función del valor proporcionado por el cálculo y comprueba si es creciente o decreciente. Representala gráficamente en la ventana interactiva que se encuentra abajo.

Mostrar retroalimentación

Si x es el valor proporcionado por el cálculo, la función que indica la cantidad de líquido en función de ese valor es:

$$f(x) = 3x + 12$$

Dados dos valores $a < b$ tenemos que $3a < 3b$ y por tanto $3a + 12 < 3b + 12$ luego $f(a) < f(b)$, es decir, la función es creciente.



Imagen de Alessandro Quisi tomada del [Banco de Imágenes](#) del ITE.

Presentación de Euler. Mariano Real



Presentación de Euler. Mariano Real
Vídeo alojado en [Youtube](#)

Importante

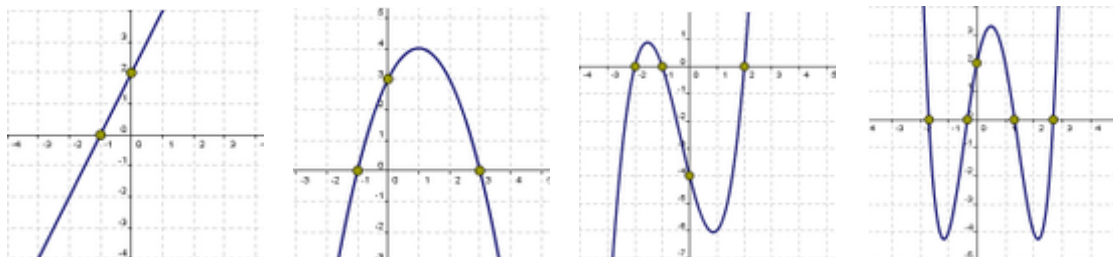
Si tenemos una función $f(x)$ decimos que es una **función polinómica** si tiene la forma

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d$$

Estas funciones son las más sencillas que existen y de ellas podemos destacar que:

- 1.- Su dominio son todos los números reales ya que las operaciones que aparece en la función son sumas y productos y estas operaciones siempre se pueden hacer se trate del número que se trate.
- 2.- Siempre cortan al eje de las ordenadas.
- 3.- Si cortan al eje de abscisas en varios puntos, entre dos de esos puntos consecutivos existe un máximo o un mínimo.
- 4.- Sabemos que un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces, por tanto, una función polinómica de grado n corta al eje de abscisas a lo sumo en n puntos.

Pero para observar todas estas propiedades vamos a utilizar varios ejemplos.



Comprueba lo aprendido

Representa las siguientes funciones polinómicas en el recuadro interactivo que aparece más abajo e indica el punto de corte con el eje de las ordenadas, el número de máximos relativos que tiene, el número de mínimos relativos, si tiene máximo absoluto o si tiene mínimo absoluto y si es una función par o una función impar y el número de puntos en los que corta al eje de abscisas.

No solamente deberás escribir la función, sino que deberás ajustar los valores $x_{\text{más}}$, $y_{\text{más}}$, $x_{\text{mín}}$ e $y_{\text{mín}}$ para poder ver la función correctamente.

En los huecos correspondientes a máximo o mínimo absoluto, función par o impar escribe sí

o no según corresponda.

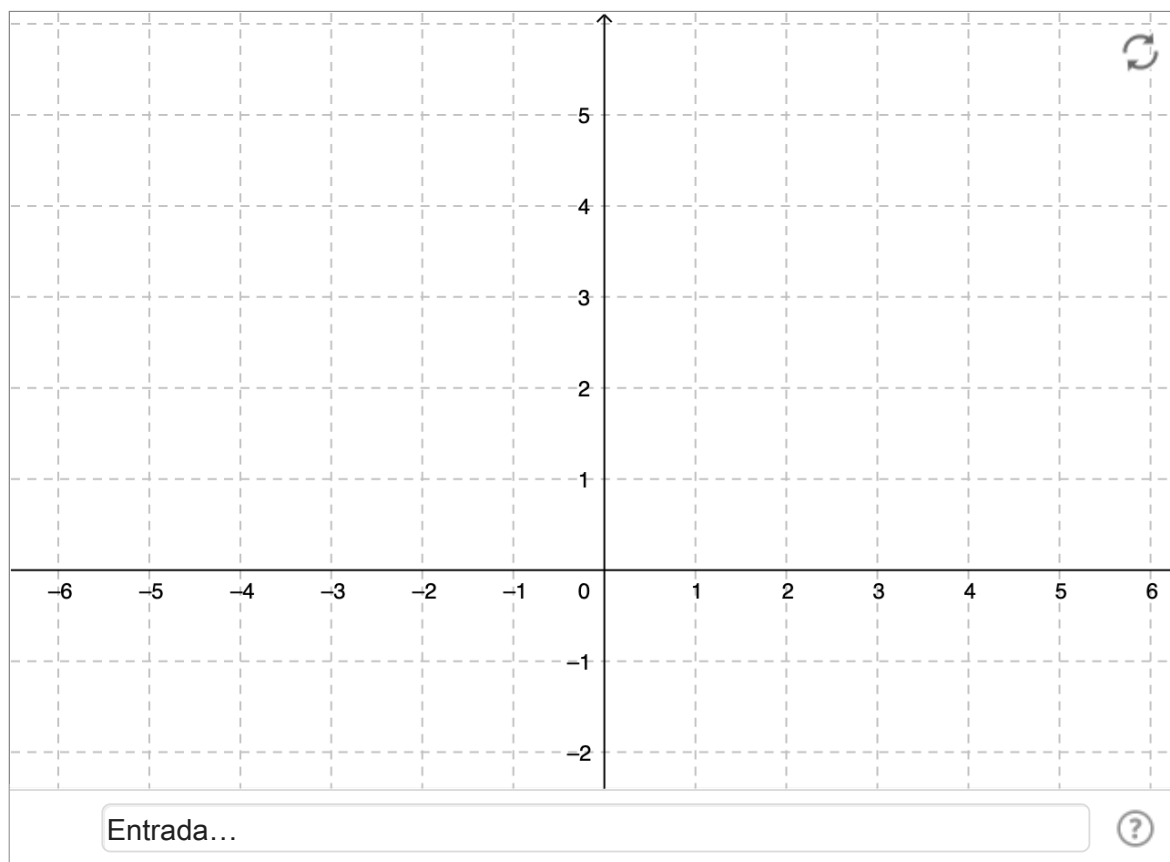
1.- $f(x) = x^5 + x^3 - 5x^2 - 3x + 4$

El punto de corte con el eje de las ordenadas es $P=(\square, \square)$, tiene \square máximos relativos, tiene \square mínimos relativos, \square tiene máximo absoluto, \square tiene mínimo absoluto, \square es una función par y \square es una función impar. Además corta al eje de abscisas en \square puntos.

2.- $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$

El punto de corte con el eje de las ordenadas es $P=(\square, \square)$, tiene \square máximos relativos, tiene \square mínimos relativos, \square tiene máximo absoluto, \square tiene mínimo absoluto, \square es una función par y \square es una función impar. Además corta al eje de abscisas en \square puntos.

Enviar



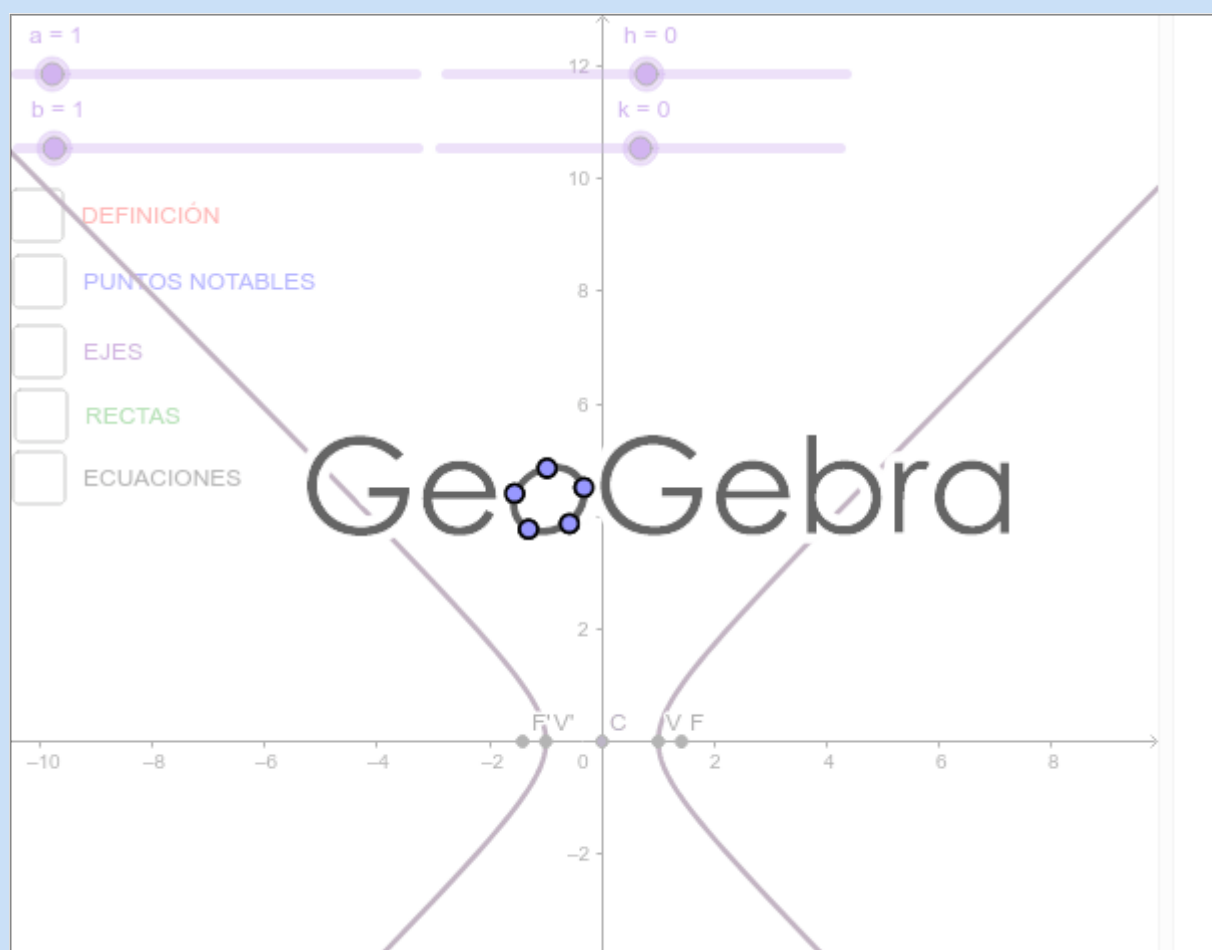
Applet alojado en [GeoGebra](#). Licencia [CC](#)

Aquí tienes el enlace a un [manual](#) sobre la introducción de funciones en Geogebra.

Importante

Si tenemos una función $f(x)$ decimos que es una **función racional** si tiene la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas. En este caso tenemos que:

- 1.- El dominio de la función $f(x)$ son todos los valores para los que $Q(x)$ es distinto de cero.
- 2.- Lo más normal es que tenga intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- 3.- Un caso particular de función racional lo tenemos en las funciones hiperbólicas cuya forma es $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ en la siguiente ventana puedes observar la representación gráfica de este tipo de funciones.



Applet alojado en [GeoGebra](#). Licencia CC

Ejercicio resuelto

En la empresa de Amelia, Lucas, el programador informático de una de las máquinas que están automatizando está teniendo muchos problemas con la misma. Según sus cálculos, cuando la persona que está manejando la máquina introduce un número cualquiera x , la máquina debe seguir un determinado proceso que

la lleva a hacer el cálculo siguiente: $\frac{x^4}{x^2+x-6}$, pero

Lucas se ha dado cuenta de que a veces tiene problemas para hacerlos. Por este motivo, Lucas está intentando saber si es lo mismo introducir un número negativo que uno positivo. Para este menester, está viendo los posibles valores que toma cuando se introduce el cero. Intenta echarle una mano averiguando los números para los que puede tener problemas. Ayúdale a saber si puede intercambiar los números positivos y negativos como pretende y a saber los valores en el cero y cuando la operación resulta ser cero.

Representa la función en la ventana interactiva que encuentras más abajo y observa si las propiedades de la gráfica que resulta se corresponden con las que has calculado.

Te aconsejamos a la hora de representarla en la ventana interactiva que apliques zoom tomando $x_{\min}=-25$, $x_{\max}=25$, $y_{\min}=-10$, $y_{\max}=25$ para poder contemplar mejor la gráfica.

Mostrar retroalimentación

Bueno, para saber los valores con los que tiene problemas necesitaremos calcular el dominio de la función, todos aquellos valores que no estén en el dominio serán los problemáticos. En el siguiente vídeo puedes ver cómo se calcula.

Dominio de función racional. Mariano Real



Dominio de función racional. Mariano Real

Vídeo alojado en [Youtube](#)

Para saber si puede intercambiar los valores positivos y negativos vamos a ver si es simétrica:

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6} \Rightarrow f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^2+(-x)-6} = \frac{x^4}{x^2-x-6}$$

Vemos que $f(x)$ y $f(-x)$ no son iguales, por tanto, la función no es simétrica y los valores negativos y positivos no se pueden intercambiar.

Ahora vamos a calcular los valores en los que se anula la función o el valor que toma en



Fotografía de Launa Fischer Ferreira
tomada del [Banco de Imágenes](#) del ITE.

el cero, es decir, los puntos de corte con los ejes:

Con el eje de las ordenadas:

$$\begin{cases} x=0 \\ f(x)=\frac{x^4}{x^2+x-6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ f(0)=\frac{0^4}{0^2+0-6}=0 \end{cases}$$

Luego el punto de corte es $O=(0,0)$.

Con el eje de abscisas:

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ f(x)=\frac{x^4}{x^2+x-6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ 0=\frac{x^4}{x^2+x-6} \Rightarrow x^4=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

Luego el punto de corte con el eje de abscisas vuelve a ser $O=(0,0)$.



Applet alojado en [GeoGebra](#). Licencia [CC](#)

Aquí tienes el enlace a un [manual](#) sobre la introducción de funciones en Geogebra.

4.3. Funciones logarítmicas y exponencial

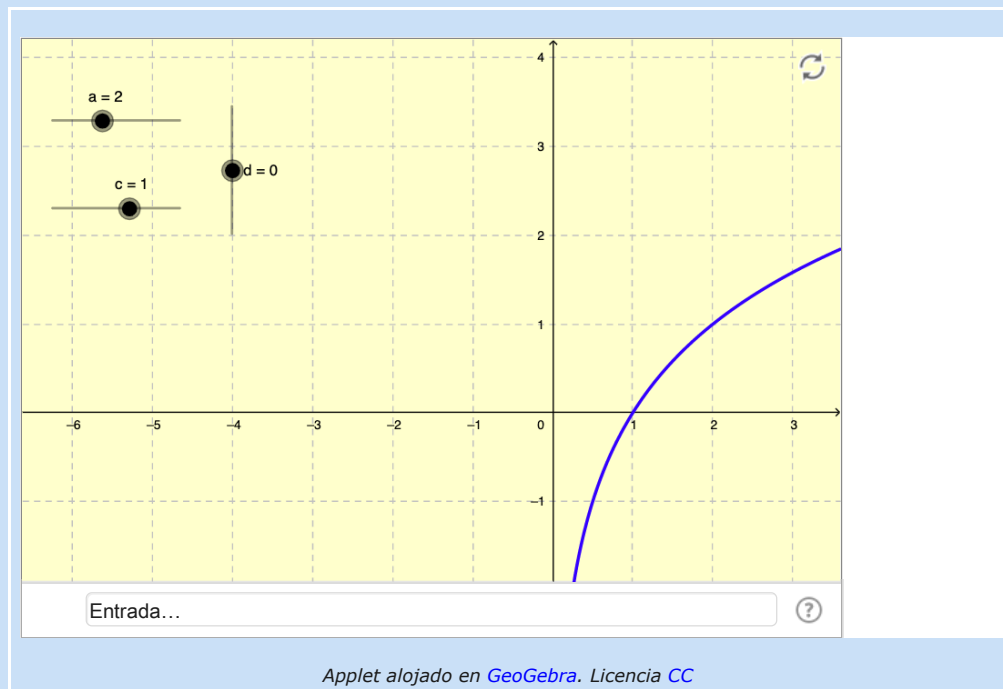
Dos tipos de funciones que se suelen encontrar en la naturaleza a pesar de lo raras que nos puedan parecer son la función logarítmica y su inversa, la función exponencial.

Importante

Si tenemos una **función** diremos que es **logarítmica** si tiene la forma $f(x) = \log_a(x)$ donde $a > 0$ es un número.

Entre sus propiedades podemos citar que:

- 1.- El dominio son todos los valores que sean mayores que cero. Por tanto, no se corta con el eje de ordenadas
- 2.- No es par ni impar.
- 3.- Si $a < 1$ es una función decreciente y si $a > 1$ es una función creciente.



- 4.- Se corta con el eje de abcisas en el punto $P = (1,0)$.

Practica en la siguiente ventana con distintos valores de α y comprueba que todas las propiedades anteriores son ciertas.

Ejercicio resuelto

En una revisión rutinaria de un hospital, la empresa de mantenimiento ha detectado que uno de los tensiómetros del quirófano necesita un ajuste ya que los valores que aparecen en la pantalla no son correctos.

Según han calculado deben aplicar la siguiente corrección:

$f(x) = \log_2(8-2x)$ donde x son los



valores que aparecen actualmente en la pantalla.

Calcula los valores a los que se les podrá aplicar esta corrección:

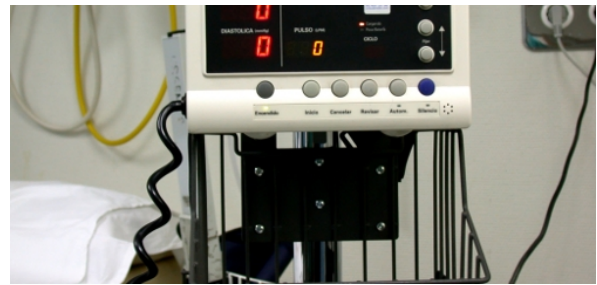
Mostrar retroalimentación

Los valores a los que se les podrá aplicar esa corrección son los que se encuentren en el dominio de la función. Así, debemos calcular el dominio de $f(x)$ y eso lo puedes ver en el siguiente vídeo.

Dominio de función lo...



Dominio de función logarítmica. Mariano Real
Vídeo alojado en [Youtube](#)



Tensiómetro

Imagen obtenida del [banco de imágenes del ITE](#).

Importante

Un **función** diremos que es **exponencial** si tiene la forma $f(x) = a^x$ con $a > 0$.
Observa el siguiente vídeo:

Función Exponencial Mariano Real



Función exponencial. Mariano Real

Vídeo alojado en [Youtube](#)

Imagina que estás calculando las potencias de 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64, Esos valores se pueden obtener de la función $f(x) = 2^x$ dándole como valores de x los números naturales.

Comprueba lo aprendido

En la siguiente ventana puedes dibujar cualquier función exponencial. Utilízala para indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.





Applet alojado en [GeoGebra](#). Licencia [CC](#)

La función es siempre creciente.

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

La función es siempre decreciente.

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

Si $a > 1$ la función es creciente.

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

La función corta al eje de las ordenadas en el punto $P=(0,1)$

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

La función corta al eje de abscisas en el punto $P=(1,0)$

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

El dominio de la función es el intervalo $(0, +\infty)$

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

Si $a < 0$ la función es impar.

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

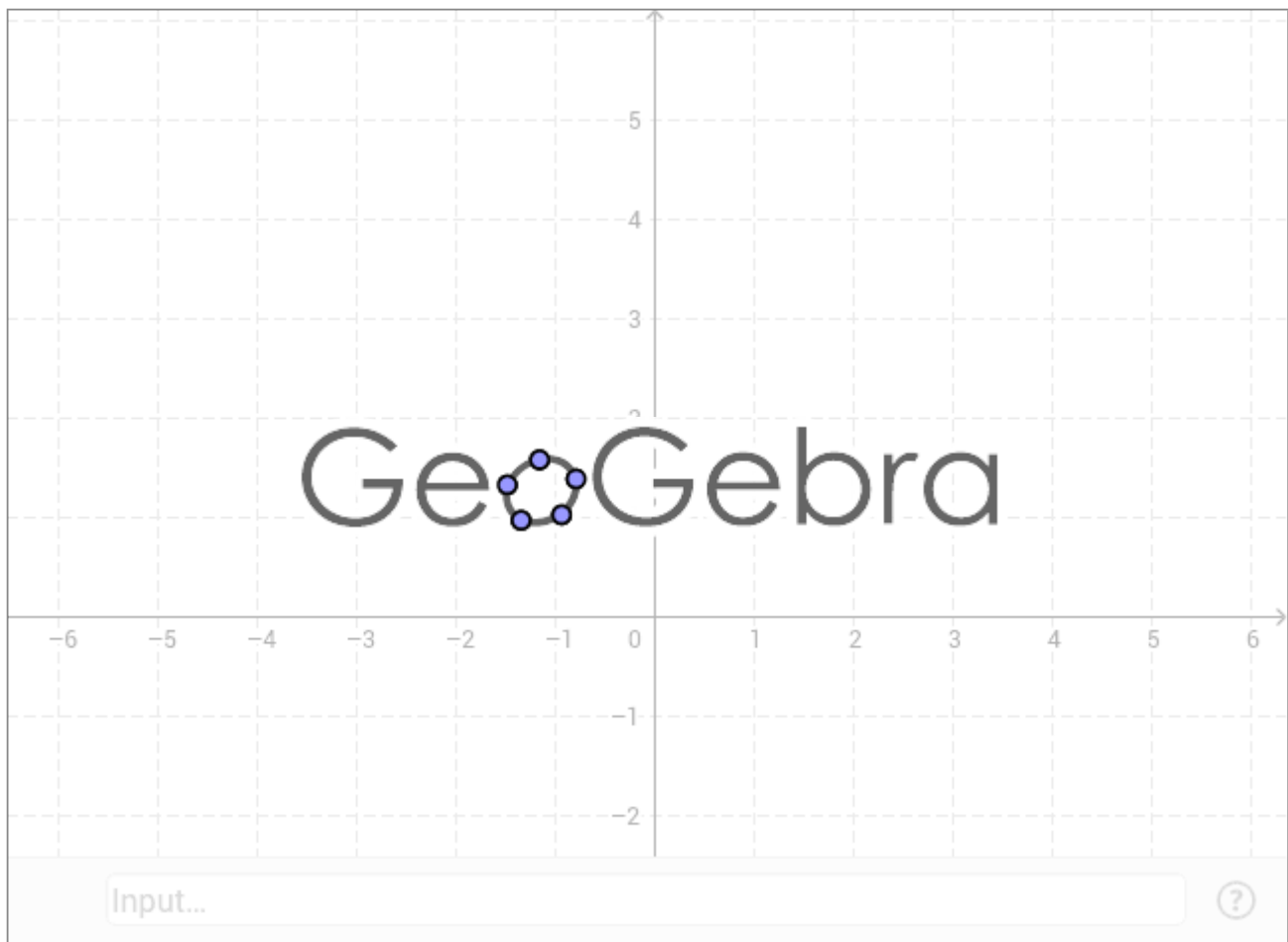
Reflexiona

Utiliza la ventana interactiva que aparece más abajo para representar gráficamente las siguientes funciones. reflexiona sobre la imagen obtenida:

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+3x-5}\right) \quad g(x) = e^{\frac{x}{x^3-4}} \quad h(x) = \ln\left(\frac{2x+5}{x^2-25}\right)$$

Mostrar retroalimentación

Utiliza los valores x_{\min} , x_{\max} , y_{\min} e y_{\max} para poder contemplar mejor la función dibujada.



Applet alojado en [GeoGebra](#). Licencia [CC](#)

Aquí tienes el enlace a un [manual](#) sobre la introducción de funciones en Geogebra.

Importante

Una función $f(x)$ es una **función definida a trozos** cuando a lo largo de todos los números reales no queda definida mediante una única expresión, sino que dependiendo del tramo en el que nos encontremos adquiere una forma distinta. Un ejemplo de este tipo de funciones sería:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1 \\ -x+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En este caso, para valores menores que 1 la función toma la expresión $f(x) = x+1$ y para valores mayores o iguales que 1 la función toma la expresión $f(x) = -x+2$.

¿Cómo se representa este tipo de funciones?, pues tomando el trozo de representación gráfica de cada una de las expresiones que toma en el intervalo correspondiente. Así, para la función anterior, su representación gráfica sería:

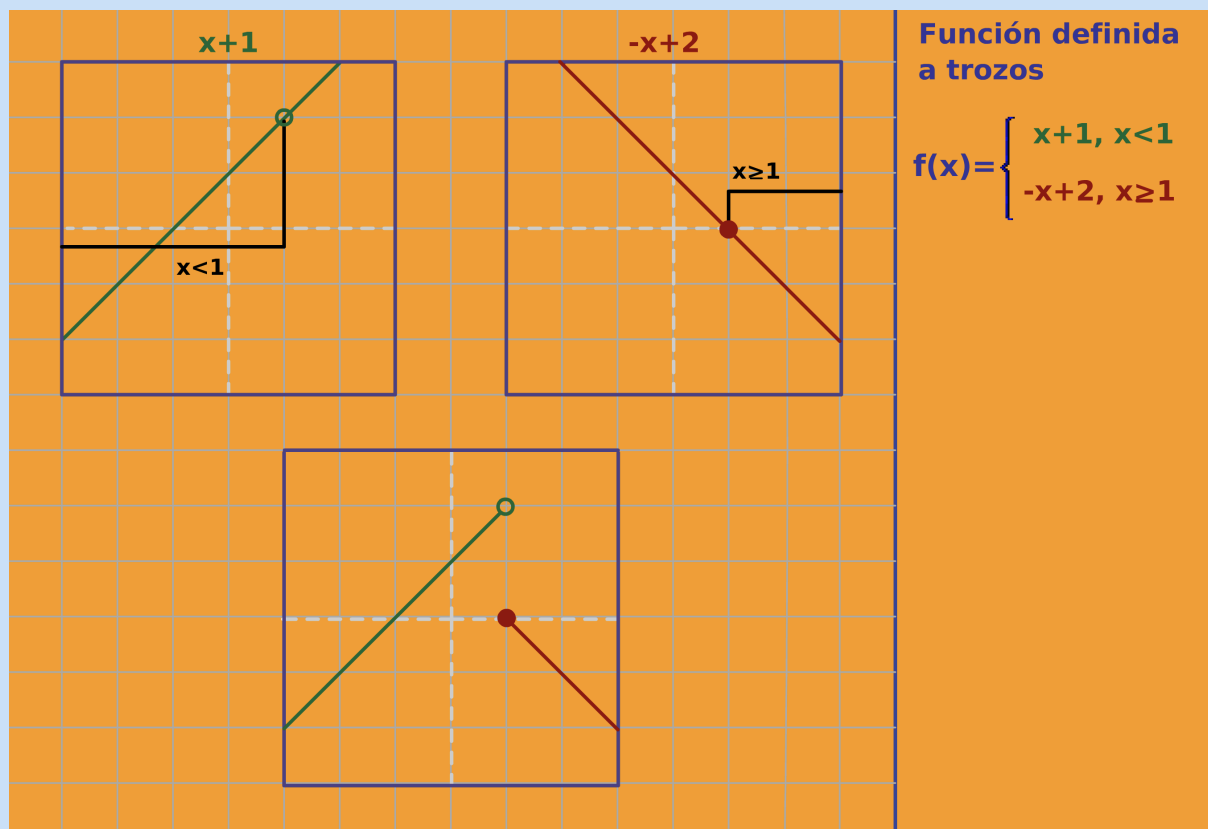


Imagen de elaboración propia

En el caso de la función anterior tenemos que $f(-4) = (-4) + 1 = -3$ ya que -4 es menor que 1 y que $f(3) = -3 + 2 = -1$ ya que 3 es mayor que 1 y por tanto se utiliza la segunda definición.

La anterior función está definida en dos trozos, pero una función definida a trozos puede tener tantos como se necesite. De este tipo de funciones podemos decir que:

1.- El dominio de la función es la unión de cada uno de los intervalos en los que está dividida, quitando de cada uno de ellos los valores en los que no esté definida la expresión correspondiente. Para ello te invitamos a que observes el ejercicio resuelto que aparece seguidamente.

2.- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos dependen de cada una de las expresiones que toma.

Observa en el siguiente vídeo cómo se realizaría la representación gráfica de la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Gráfica de Función a trozos



Gráfica de función a trozos
Vídeo alojado en [Youtube](#)

Ejercicio resuelto

El Teatro romano de Mérida es una construcción promovida por el cónsul Marco Vipsanio Agripa, en la ciudad romana de Emerita Augusta, actual Mérida, España. Según fecha inscrita en el propio teatro su construcción se produjo en los años 16 a 15 a. C. Si quieres ver una imagen panorámica del teatro pulsa [aquí](#) y muévete por la ventana que aparece.

El teatro ha sufrido varias remodelaciones, la más importante, a finales del siglo I o principios del

Teatro romano de Mérida. M...

al finales del siglo I o principios del siglo II, posiblemente en época del emperador Trajano, cuando se levantó la actual fachada o frente de escena, y otra en época de Constantino entre los años 330 y 340, introduciéndose nuevos elementos arquitectónicos-decorativos y construyéndose una calzada que rodea el monumento.

Actualmente el Teatro de utiliza para representaciones teatrales en el festival de teatro de Mérida y para la celebración de conciertos culturales. En uno de esos conciertos a cargo del grupo Acetre y cuyas imágenes puedes

contemplar en el vídeo, uno de los técnicos de sonido está tomando medida de los decibelios de sonido que se producen en el concierto en función del nivel de los graves que haya sintonizado. Según sus cálculos, la función que le resulta es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 6x} & \text{si } -1 < x < 5 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

donde x es el nivel de los graves. Pero está teniendo algunos problemas con alguna medida. Ayúdale a determinar el dominio de la función para saber con qué valores puede utilizarla. Utiliza la pantalla interactiva que aparece más abajo para hacer una representación de la gráfica de la función.

Recuerda que para la representación gráfica deberás representar cada una de las partes y quedarte con el trozo de función de cada intervalo, usando el comando: Si[<Condición>, <Entonces>]. Por ejemplo. Para introducir el primer tramo de la función escribiremos en la barra de entrada: Si[$x \leq -1$, $x^2 + 2x - 3$] pulsando al terminar la tecla "enter", haciendo lo mismo con el resto de tramos de la función.

Mostrar retroalimentación

Para calcular el dominio de la función $f(x)$ vamos a ir calculando el de cada uno de sus trozos.

1.- El dominio de la función $g(x) = x^2 + 2x - 3$ son todos los números reales según hemos visto en las funciones polinómicas, y como $f(x) = g(x)$ para los valores menores o iguales que -1, entonces el intervalo $(-\infty, -1]$ es parte del dominio de $f(x)$.

2.- El dominio de la función $h(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 6x}$ son todos los números reales excepto aquellos que anulan el denominador. calculamos los que anulan el denominador:

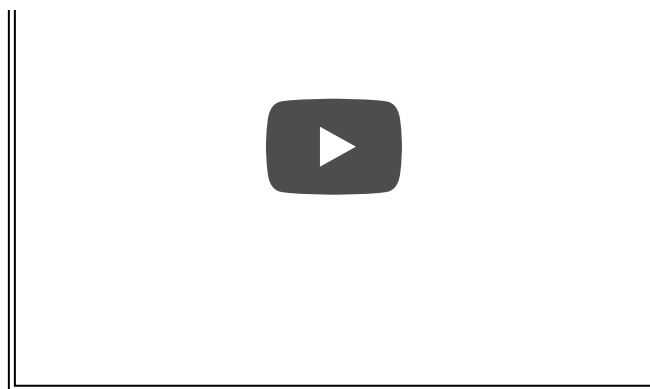
$$x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

Luego el dominio de la función $h(x)$ son todos los números menos el cero y el seis. Como $f(x) = h(x)$ en $(-1, 5)$, los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 5)$ son parte del dominio de $f(x)$.

3.- El dominio de la función $d(x) = 3x^2 + 1$ son todos los números reales según hemos visto en las funciones polinómicas, y como $f(x) = d(x)$ para los valores mayores o iguales que 5, entonces el intervalo $[5, +\infty)$ es parte del dominio de $f(x)$.

Luego el dominio de la función $f(x)$ es $(-\infty, -1] \cup (-1, 0) \cup (0, 5) \cup [5, +\infty) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

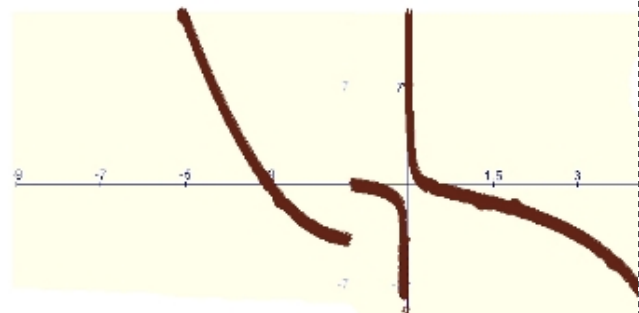
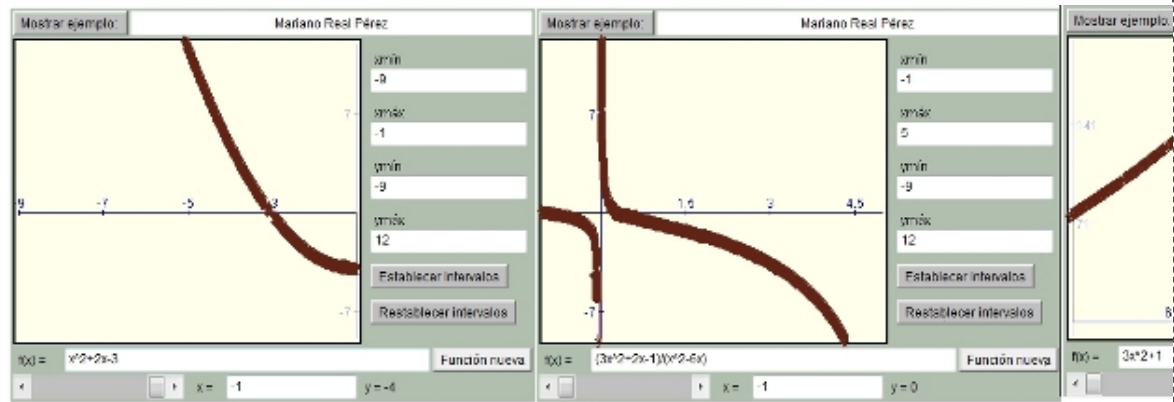
La representación gráfica quedaría de la forma:



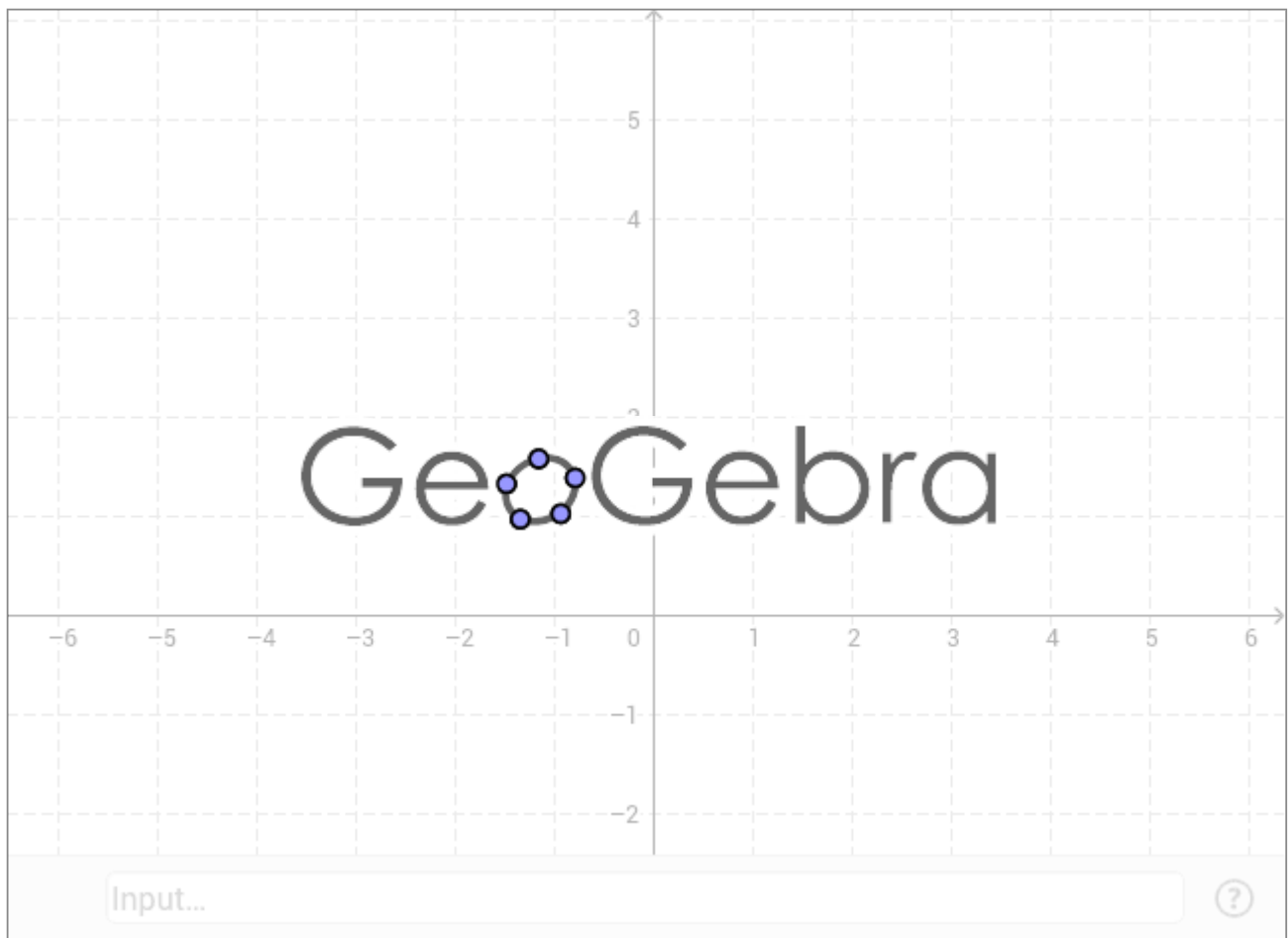
Teatro Romano de Mérida

Vídeo alojado en [Youtube](#)

La representación gráfica quedará de la forma:



Teatro Romano de Mérida
Imagen obtenida de [Wikipedia](#).



Applet alojado en [GeoGebra](#). Licencia [CC](#)

Aquí tienes el enlace a un [manual](#) sobre la introducción de funciones en Geogebra.

Ejercicio resuelto

Si tenemos la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-9} & \text{si } x < 0 \\ x^2+4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula el dominio y realiza su representación gráfica utilizando la ventana interactiva que se encuentra encima de este enunciado

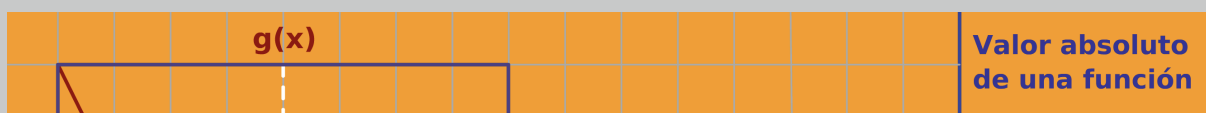
Mostrar retroalimentación

Para saber más

Sabemos que si $f(x) = |x|$ entonces: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

de igual manera tenemos que si $f(x) = |g(x)|$ entonces: $f(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{si } g(x) \leq 0 \\ g(x) & \text{si } g(x) > 0 \end{cases}$

En la siguiente imagen podemos ver cómo obtener la gráfica de $f(x)$ conociendo la de $g(x)$:



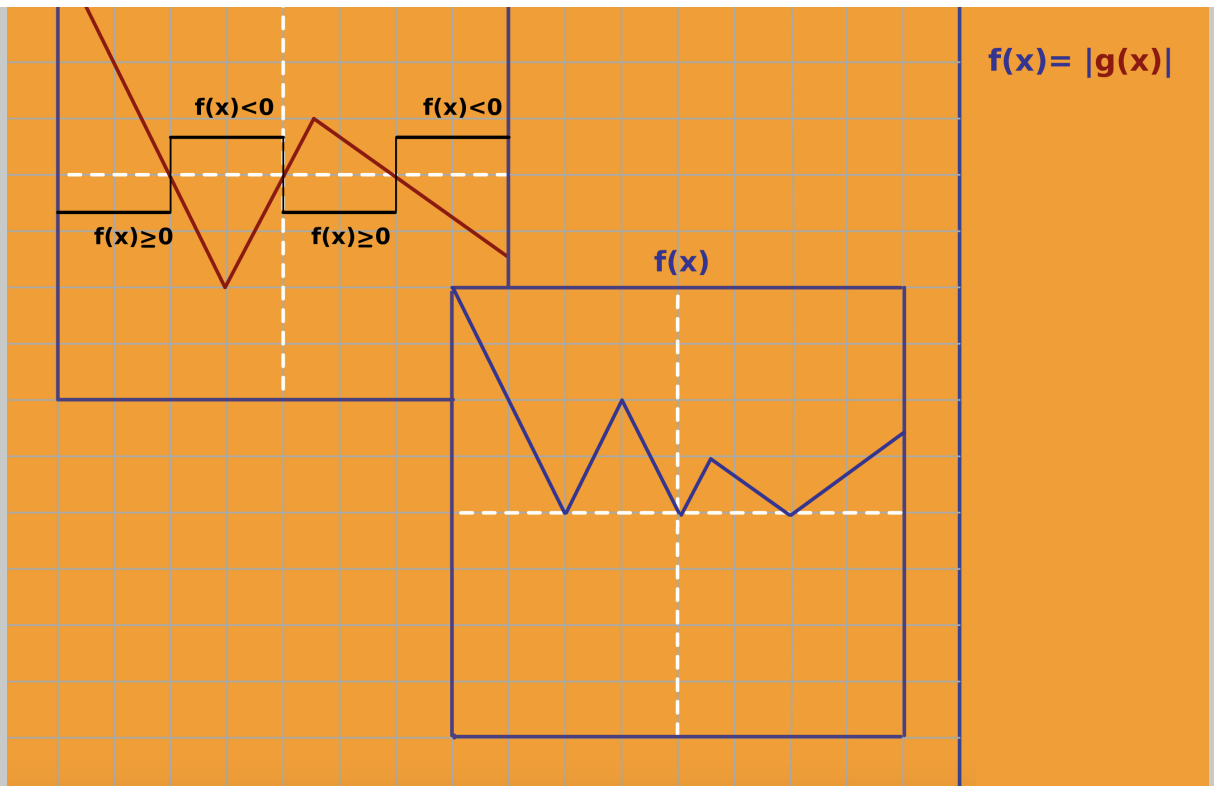
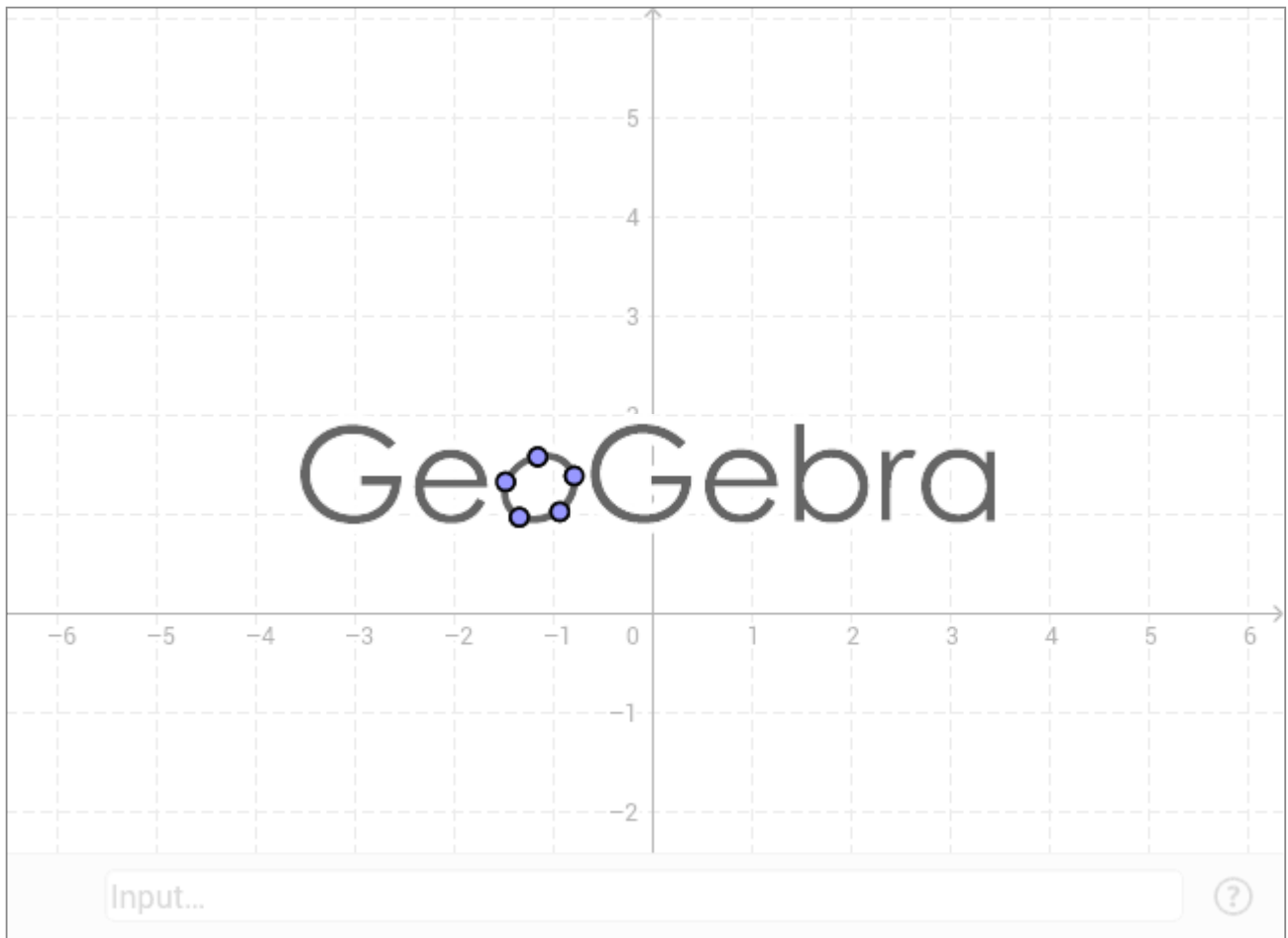


Imagen de elaboración propia



Applet alojado en [GeoGebra](#). Licencia [CC](#)

Aquí tienes el enlace a un [manual](#) sobre la introducción de funciones en Geogebra.

Ejercicio resuelto

Sea $P(x)$ una función polinómica de grado 4 de la que sabemos que su gráfica es simétrica y que cumple que $P(0)=5$. Si dos de sus raíces son $x=1$ y $x=\sqrt{5}$. determina la función.

Mostrar retroalimentación

$P(x)$, al ser una función polinómica de grado 4 tendrá la forma:

$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ Como sabemos que su gráfica es simétrica, tenemos que los coeficientes correspondientes a los grados impares son nulos, por lo que $b=d=0$.

así tenemos que:

$P(x)=ax^4+cx^2+e$. Además, como $P(0)=5$ tenemos que

$$P(0)=a0^4+c0^2+e=5 \Rightarrow e=5 \quad \text{Por tanto: } P(x)=ax^4+cx^2+5$$

Como conocemos sus raíces, tenemos que:

$$0 = P(1) = a1^4 + c1^2 + 5 = a + c + 5 \Rightarrow a + c = -5 \Rightarrow c = -5 - a$$

$$0 = P(\sqrt{5}) = a(\sqrt{5})^4 + c(\sqrt{5})^2 + 5 = 25a + 5c + 5 \Rightarrow 25a + 5c = -5$$

$$\text{Luego } 25a + 5(-5 - a) = -5 \Rightarrow 25a - 25 - 5a = -5 \Rightarrow 20a = 20 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Por tanto } c = -5 - a = -5 - 1 = -6$$

Así, la función polinómica es $P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

Ejercicio resuelto

Se considera la función

$$f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Determina a y b sabiendo que $f(0)=-3$ y que $f(1)=-1$

Mostrar retroalimentación

Desarrollamos el determinante por los elementos de la 1ª columna

$$\begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$f(x) = \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = a \cdot x^3 + bx^2 - 2ax + 3b$$

Sustituimos los datos conocidos

$$f(0) = -3 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 - 2a \cdot 0 + 3b = -3 \Leftrightarrow b = -1$$

$$f(1) = -1 \Leftrightarrow a - 1 - 2a - 3 = -1 \Leftrightarrow -a = 3 \Leftrightarrow a = -3$$

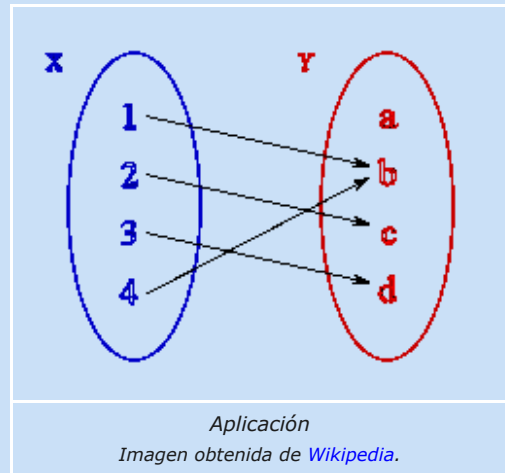
Así tenemos que $f(x) = -3x^3 - x^2 + 6x - 3$

Importante

Una función o aplicación f es una relación entre dos conjuntos X e Y de forma que cada elemento x del conjunto X le hace corresponder un único elemento y del conjunto Y . En ese caso se dice que $f(x) = y$.

En la imagen de la derecha podemos observar gráficamente una función. En ese caso tenemos que: $f(1) = b$, $f(2) = c$, $f(3) = d$ y que $f(4) = b$.

Todo elemento de X debe participar en la relación, aunque no todos de Y . De hecho, el elemento a no recibe relación.



Importante

Si tenemos una función $f(x)$, se llama **dominio de la función** al conjunto de valores para los que esa función queda perfectamente definida. Pero ¿cuáles son los valores para los que una función no existe o no está definida? Muy sencillo, aquellos valores para los que las reglas del cálculo nos indican que no se pueden realizar los propuestos en la función. Mejor lo vemos con algunos ejemplos.

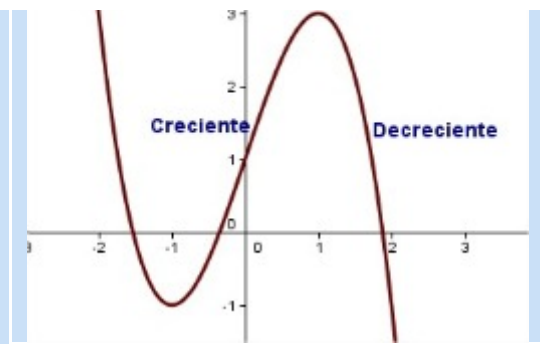
Importante

Si tenemos una función $f(x)$ decimos que es **creciente** si al dibujar su gráfica de izquierda a derecha el trazo cada vez es más alto. Por tanto, es creciente si al tomar dos valores a y b cualesquiera, si $a < b$ entonces $f(a) \leq f(b)$.

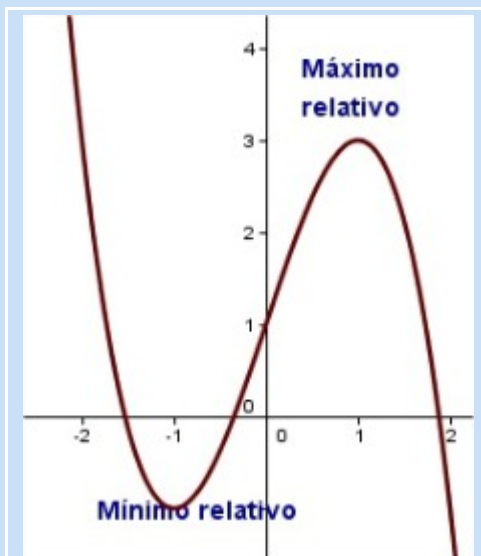
Si tenemos una función $f(x)$ decimos que es **decreciente** si al dibujar su gráfica de izquierda a derecha el trazo cada vez es más bajo. Por tanto, es decreciente si al tomar dos valores a y b cualesquiera, si $a < b$ entonces $f(a) \geq f(b)$.



Lo más normal es que la función no sea siempre creciente o decreciente, sino que se alternen los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.



Importante



Una función $f(x)$ tiene un **máximo relativo** en el punto $x=a$ si en todos los valores próximos a este punto, el valor de la función es más pequeño que $f(a)$ o lo que es lo mismo, hasta el valor a la función es creciente y después de este valor la función es decreciente.

Si para todos los valores b se cumple que $f(b) \leq f(a)$, entonces se dice que tiene un **máximo absoluto** en $x=a$.

Si tenemos una función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en el punto $x=a$ si en todos los valores próximos a este punto, el valor de la función es más grande que $f(a)$ o lo que es lo mismo, hasta el valor a la función es decreciente y después de este valor la función es creciente.

Si para todos los valores b se cumple que $f(b) \geq f(a)$, entonces se dice que tiene un **mínimo absoluto** en $x=a$.

mínimo absoluto en $x=a$.

Importante

Si tenemos una función $f(x)$ decimos que es una **función polinómica** si tiene la forma

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d$$

Estas funciones son las más sencillas que existen y de ellas podemos destacar que:

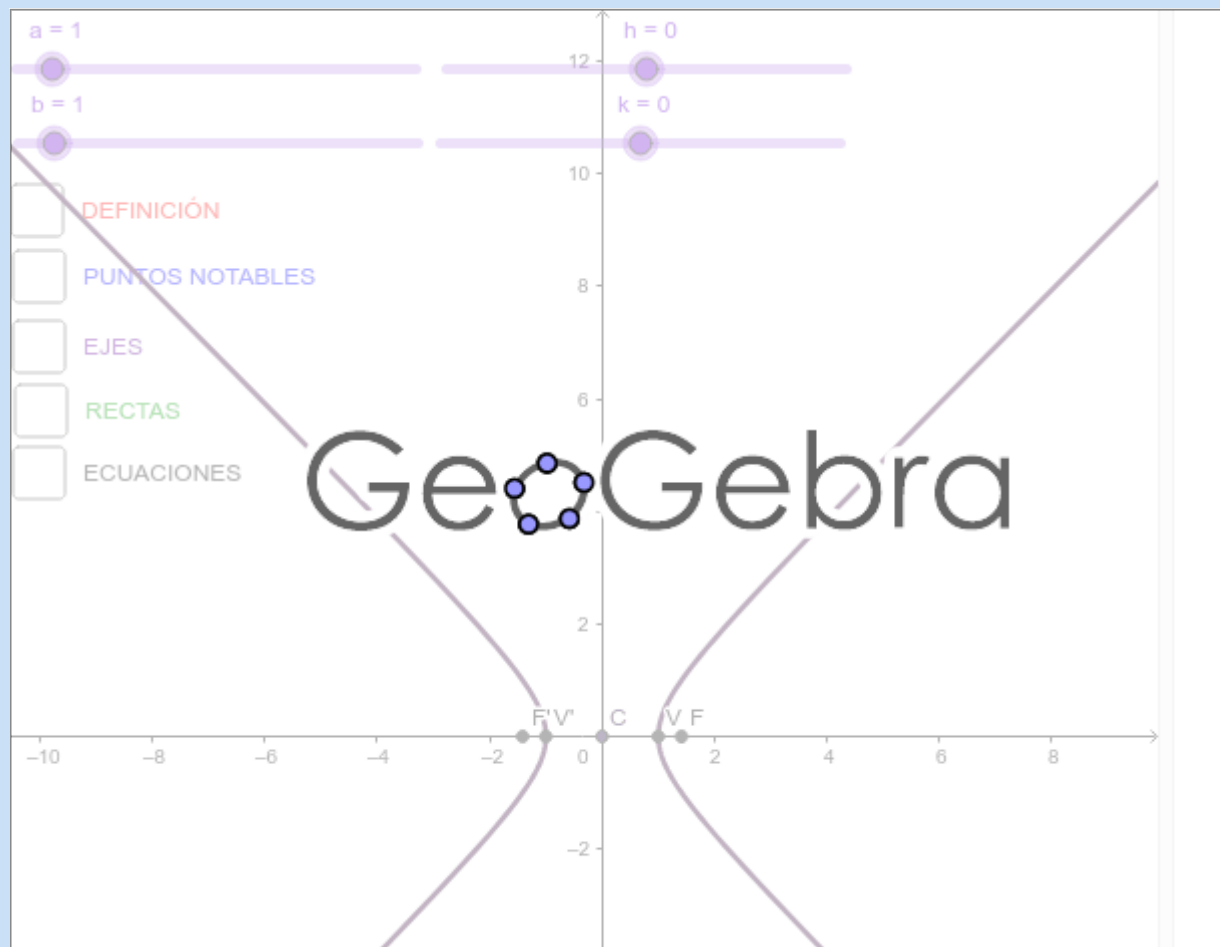
- 1.- Su dominio son todos los números reales ya que las operaciones que aparece en la función son sumas y productos y estas operaciones siempre se pueden hacer se trate del número que se trate.
- 2.- Siempre cortan al eje de las ordenadas.
- 3.- Si cortan al eje de abscisas en varios puntos, entre dos de esos puntos consecutivos existe un máximo o un mínimo.
- 4.- Sabemos que un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces, por tanto, una función polinómica de grado n corta al eje de abscisas a lo sumo en n puntos.

Pero para observar todas estas propiedades vamos a utilizar varios ejemplos.

Importante

Si tenemos una función $f(x)$ decimos que es una **función racional** si tiene la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas. En este caso tenemos que:

- 1.- El dominio de la función $f(x)$ son todos los valores para los que $Q(x)$ es distinto de cero.
- 2.- Lo más normal es que tenga intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- 3.- Un caso particular de función racional lo tenemos en las funciones hiperbólicas cuya forma es $f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ en la siguiente ventana puedes observar la representación gráfica de este tipo de funciones.



Applet alojado en [GeoGebra](#). Licencia [CC](#)

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte)**.

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio
