

# Fuerzas y movimientos: Movimientos en dos dimensiones

---



**Preparación Acceso a  
CFGS**

**Física  
Contenidos**

**Fuerzas y movimientos:  
Movimientos en dos dimensiones**

# 1. Movimientos en el plano

---

Ya hemos aprendido en el tema anterior a resolver situaciones de movimientos rectilíneos. En este tema vamos a estudiar movimientos en el plano que son algo más complicados.

En tu vida ordinaria observas gran cantidad de movimientos y muchos de ellos se producen en un plano. El salto de una rana, el lanzamiento de un dardo, una lancha que cruza un río, un tiro a canasta en baloncesto, son ejemplos de movimientos en dos dimensiones (el plano).

Animación de elaboración propia

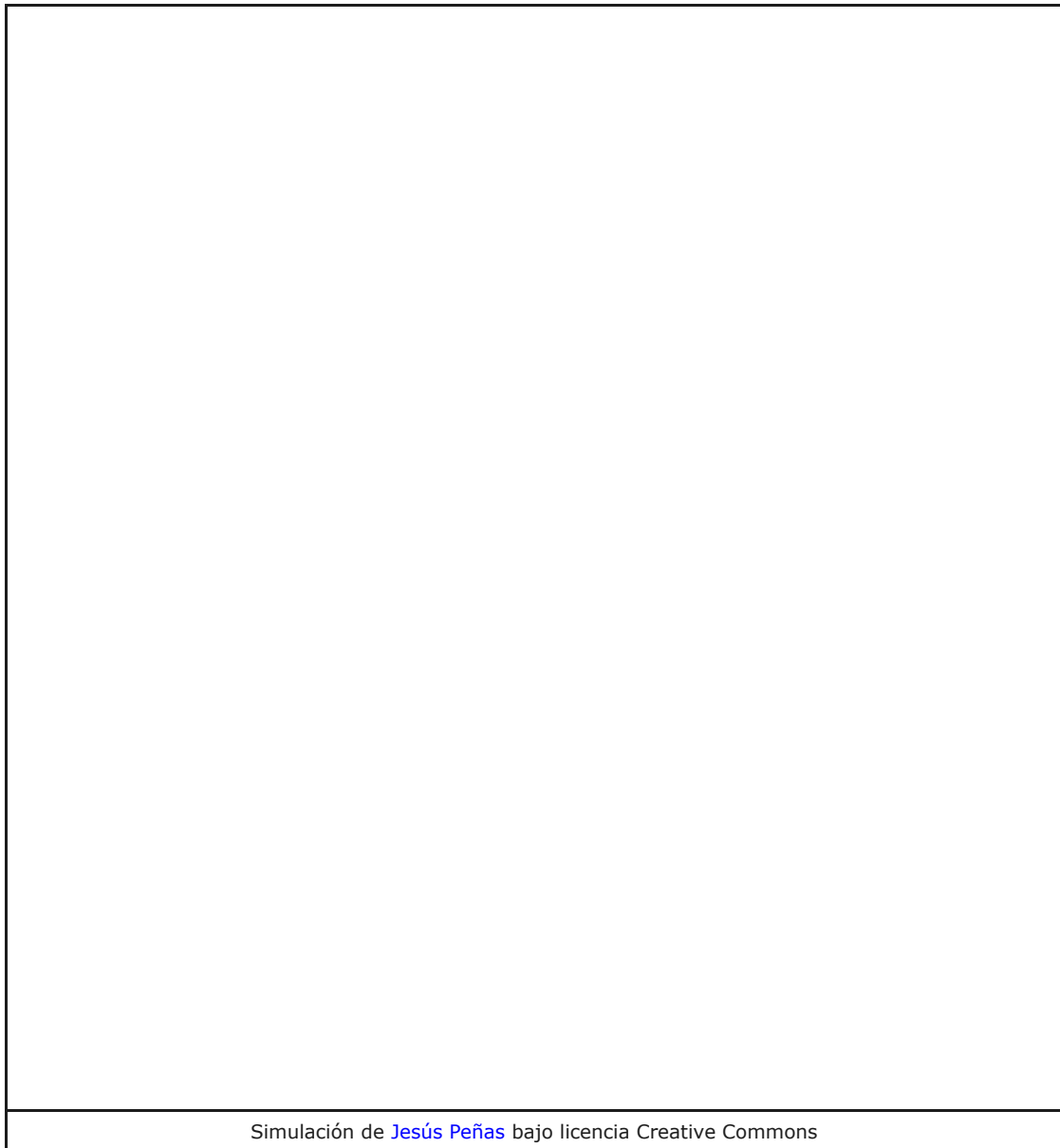
El movimiento más importante que vamos a estudiar es el movimiento parabólico, que se produce cuando un objeto se mueve en las proximidades de la superficie terrestre sometido a la acción de la gravedad.

Grandes pensadores y científicos, como Aristóteles o Galileo Galilei, se ocuparon de este movimiento y escribieron tratados sobre los problemas de caída y tiro.

El estudio del movimiento parabólico ha sido y es muy importante, tanto para acertar en el tiro al blanco, como para llegar más lejos en el salto de longitud o incluso para poner un satélite en órbita.

## 2. Composición de movimientos

En la siguiente simulación puedes observar la equivalencia del movimiento vertical de dos bolas (azul y roja). La bola azul se deja caer y la bola roja se lanza horizontalmente con una velocidad inicial. Observa que ambas descienden alturas iguales en tiempos iguales, cualquiera que sea el movimiento horizontal de la bola roja.



*Importante*

Principio de Independencia de Galileo.

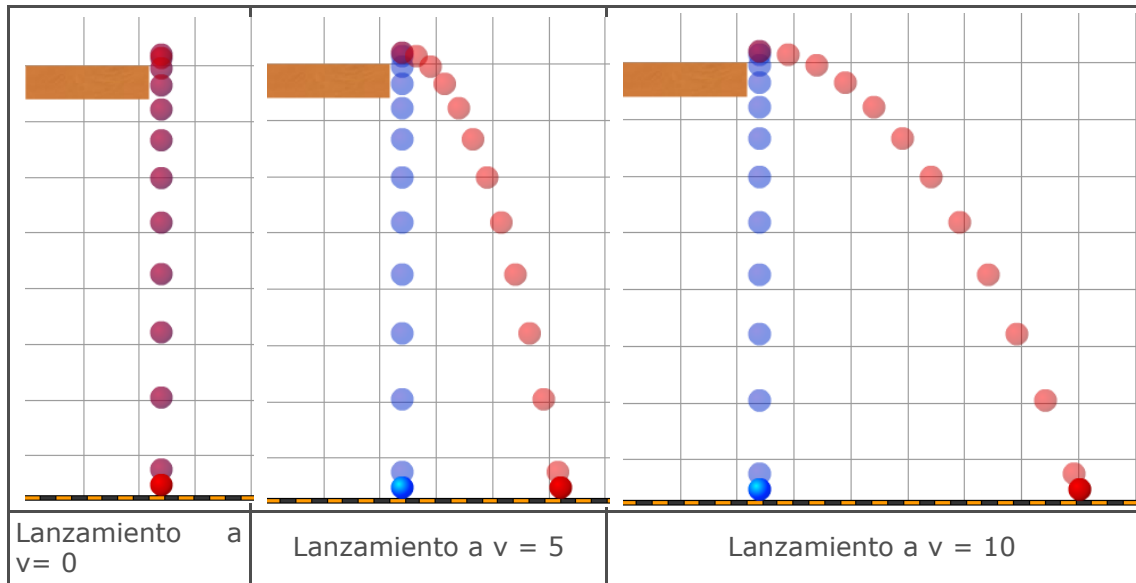
Cuando un cuerpo está sometido a dos movimientos simultáneos, su cambio de posición es independiente del hecho de que los dos movimientos se produzcan sucesiva o simultáneamente.

## Ejercicio resuelto

Comprueba que si modificas la rapidez horizontal de la bola roja (0, 5 y 10 m/s), la posición vertical de las dos bolas (roja y azul) coinciden.

### Mostrar retroalimentación

Observa que las dos bolas están siempre a la misma altura, aunque la distancia horizontal entre ellas es distinta, según sea la velocidad de lanzamiento horizontal de la bola roja.



## 2.1 Principio de Superposición

---

Existen muchas situaciones (cruzar un río, lanzar un balón a canasta, lanzar una jabalina, chutar a puerta, realizar un salto, disparar un proyectil), que pueden explicarse como combinación de varios movimientos. Todos estos casos se resuelven aplicando el Principio de Superposición, una consecuencia del Principio de Independencia de Galileo.



*Importante*

Principio de Superposición.

Cuando un cuerpo está sometido a varios movimientos independientes simultáneamente, el movimiento total se obtiene sumando vectorialmente dichos movimientos parciales.

Aplicando lo que ya conocemos sobre la descomposición de vectores como suma de sus componentes, la posición, la velocidad y la aceleración del movimiento resultante es la suma de las posiciones, velocidades y aceleraciones de cada uno de los movimientos independientes.

Simulación de [Jesús Peñas](#) bajo licencia Creative Commons

Así, para un movimiento en dos dimensiones el vector de posición es:

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

y de la misma forma podríamos expresar los vectores velocidad y aceleración:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

## Comprueba lo aprendido tipo

Un avión se mueve hacia el Norte con una velocidad de 250 km/h y encuentra un viento lateral de 72 km/h hacia el Este. ¿Con qué rapidez (módulo de la velocidad) se mueve el avión mientras hace viento?

Sugerencia

- ☐ 322 km/h
- ☐ 260 km/h
- ☐ 178 km/h
- ☐ 250 km/h

Incorrecto:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

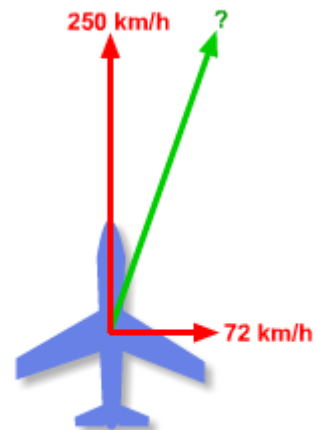
Correcto:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Incorrecto:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Incorrecto:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

### Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto



Elaboración propia

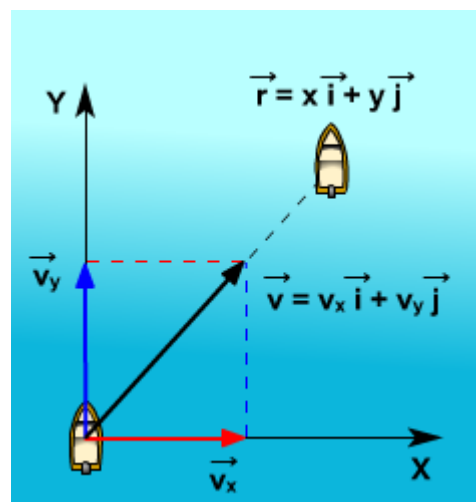
### 3. Movimiento en el plano con velocidad constante

Un avión que encuentra vientos laterales o una lancha que cruza un río son ejemplos de movimientos que se producen en el plano con velocidad constante.

En estos casos se conoce la velocidad de un cuerpo con respecto a un sistema de referencia móvil y la velocidad de este sistema de referencia con relación a otro fijo. Por ejemplo, una lancha en un río se está moviendo con respecto al agua y el agua se está moviendo con respecto a la orilla.

Las ecuaciones de este movimiento son:

En el eje X	En el eje Y
$a_x = 0$	$a_y = 0$
$v_x = \text{constante}$	$v_y = \text{constante}$
$x = x_0 + v_x \cdot t$	$y = y_0 + v_y \cdot t$



Elaboración propia

La ecuación vectorial de la velocidad resultante es:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

y su módulo será:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Si consideramos que en el instante inicial ( $t = 0$ ) la posición del móvil es:

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$$

La posición del móvil en cualquier instante podemos calcularla con la ecuación:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = (x_0 + v_x \cdot t) \vec{i} + (y_0 + v_y \cdot t) \vec{j}$$

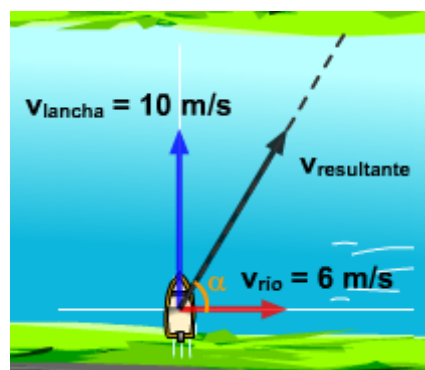
Y si el cuerpo parte del origen de coordenadas ( $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ ):

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = v_x \cdot t \vec{i} + v_y \cdot t \vec{j}$$

#### Ejercicio resuelto

Una lancha tiene que cruzar transversalmente un río de 150 m de ancho. El motor de la lancha le permite moverse con una velocidad de 10 m/s y el agua se mueve con una velocidad de 6 m/s. Se pide:

- ¿Cuánto tiempo tardará en cruzar el río?
- ¿Cuál es el desplazamiento aguas abajo de la lancha?
- ¿Cuál es la distancia realmente recorrida por la lancha?
- ¿Cuál es la velocidad de la lancha relativa a la orilla?



Elaboración propia

**a) Cálculo del tiempo en cruzar el río**

La posición de la barca, eligiendo el origen en el punto de salida, es:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = 6\cdot t\vec{i} + 10\cdot t\vec{j}$$

y en componentes:

$$x = 6\cdot t \quad ; \quad y = 10\cdot t$$

Como la anchura del río es de 150 m, el tiempo necesario para cruzarlo será:

$$150 = 10\cdot t \quad ; \quad t = 15s$$

**b) Cálculo del desplazamiento aguas abajo**

El desplazamiento aguas abajo:  $x = 6\cdot t = 6\frac{m}{s}\cdot 15s = 90m$

**c) Cálculo de la distancia recorrida por la lancha**

La distancia recorrida por la barca:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(90m)^2 + (150m)^2} = 174,93m$$

**d) Cálculo de la velocidad respecto a la orilla**

El módulo de la velocidad respecto a la orilla:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = 11,7m/s$$

Y el ángulo que forma el vector velocidad con la horizontal es:

$$\alpha = \arctg \frac{v_y}{v_x} = \arctg \frac{10}{6} = 59^\circ$$

Vamos a suponer que deseamos cruzar un río con una lancha que se mueve a velocidad constante. Si ponemos el timón en la dirección del punto de destino, no llegaremos a éste porque la corriente nos irá arrastrando mientras avanzamos hacia la otra orilla.



Simulación de [Jesús Peñas](#) bajo licencia Creative Commons

Si observas con detenimiento llegarás a la conclusión de que conseguiremos llegar a nuestro destino cuando la componente X de la velocidad del bote sea de igual valor pero de sentido contrario a la componente X de la velocidad del río (que es su única componente).

Lógicamente esto lo hacemos con el timón, poniendo un ángulo de navegación que contrarreste la velocidad del río, es decir navegando un poco a contracorriente. Podemos decir que la lancha tiene simultáneamente un movimiento de avance hacia la otra orilla, producido por el motor, y otro movimiento de arrastre, producido por la corriente.

Esto equivale a decir que el movimiento de la lancha es la composición de los movimientos de avance y arrastre. Ambos movimientos son uniformes (de velocidad constante) y, como consecuencia, el movimiento resultante también lo es.

### *Ejercicio resuelto*

Una lancha se mueve con una velocidad constante de 12 m/s y la usamos para cruzar un río de 200 m de anchura. Si la velocidad de la corriente es de 3 m/s, calcula:

- a) La dirección que debe tomar para llegar a la otra orilla justo enfrente.
- b) El tiempo que tarda en atravesar el río en el caso anterior.
- c) La dirección que debe tomar la lancha para cruzar el río en el menor tiempo posible.



d) En este caso, ¿a qué punto de la otra orilla llegará?

#### Mostrar retroalimentación

##### a) Cálculo de la dirección que debe tomar

La resultante de la velocidad debe tener la dirección perpendicular a la orilla. Es decir, de acuerdo con la figura, la componente de la velocidad de la lancha en la dirección de la corriente debe ser igual a la velocidad de ésta, pero de signo contrario. En este caso  $-3 \text{ m/s}$ . Esto se cumple cuando:

$$12 \text{ m/s} \cos \alpha = -3 \text{ m/s}$$

$$\cos \alpha = -0,25$$

$$\text{y } \alpha = \arccos(-0,25) = 104,5^\circ$$

##### b) Cálculo del tiempo que tarda en cruzar

Para calcular el tiempo que tarda en cruzar, debemos saber la velocidad en la dirección perpendicular:

$$v_y = 12 \text{ m/s} \cdot \sin 104,5^\circ = 11,6 \text{ m/s}$$

$$\text{Como } y = v_y t$$

$$200 \text{ m} = 11,6 \text{ m/s} \cdot t,$$

$$\text{por tanto, } t = 17,2 \text{ s}$$

##### c) Cálculo de la dirección para cruzar en el menor tiempo posible

Para cruzar en el menor tiempo posible, la velocidad  $v_y$  debe ser máxima, y eso ocurre cuando la lancha se mueve perpendicularmente a la orilla. En este caso el tiempo de cruce será:

$$200 \text{ m} = 12 \text{ m/s} \cdot t$$

y despejando,

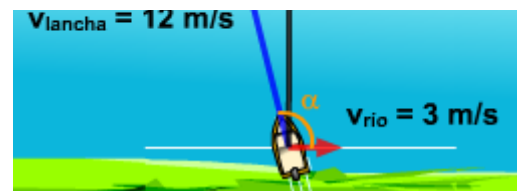
$$t = 16,7 \text{ s}$$

##### d) Cálculo del punto de llegada

calculamos el desplazamiento corriente abajo:

$$x = 3 \text{ m/s} \cdot t = 3 \text{ m/s} \cdot 16,7 \text{ s} = 50,1 \text{ m}$$

Es decir, estará  $50,1 \text{ m}$  aguas abajo.



Elaboración propia

## 4. Movimiento de proyectiles

---

Un proyectil es un cuerpo que se mueve en las proximidades de la superficie terrestre y por lo tanto está sometido a una aceleración constante  $g$ , la aceleración de la gravedad.

Estudiando el movimiento de los proyectiles Galileo formuló su Principio de Independencia y concluyó que este tipo de movimiento cuya trayectoria es una parábola, podía estudiarse descomponiéndolo en dos movimientos más simples:

- Uno de velocidad constante en la dirección horizontal.
- Otro movimiento de caída libre en la dirección vertical.

Estos dos movimientos son independientes entre sí y solo están ligados por una variable: el tiempo de vuelo.



De acuerdo con el Principio de Independencia, puedes considerar el movimiento del proyectil como una combinación de un movimiento horizontal uniforme y de un movimiento vertical uniformemente acelerado.

Observando los vectores en la siguiente simulación puedes ver que la componente horizontal de la velocidad es constante y la componente vertical de la velocidad varía ya que el proyectil se encuentra sometido a una aceleración constante en la dirección vertical y apuntando hacia abajo.

Simulación de [Jesús Peñas](#) bajo licencia Creative Commons

## Comprueba lo aprendido Múltiple

En lo más alto de la trayectoria parabólica de una pelota lanzada desde el suelo, la velocidad es:

☐ De valor mínimo

☐ Nula

☐ Horizontal

☐ Vertical

### Mostrar retroalimentación

#### Solution

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto
4. Incorrecto

## Comprueba lo aprendido Múltiple

En el movimiento de un proyectil, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

☐ La componente vertical de la velocidad es constante

☐ La componente horizontal de la velocidad es constante

☐ La componente vertical de la aceleración es  $-g$

☐ La componente horizontal de la aceleración es  $-g$

☐ La velocidad en el punto más alto de la trayectoria es nula

### Mostrar retroalimentación

#### Solution

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Correcto
4. Incorrecto
5. Incorrecto

## 4.1 Lanzamiento oblicuo

El caso más general en el lanzamiento de proyectiles es el tiro oblicuo o tiro parabólico. Cuando lanzamos un cuerpo con una velocidad que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, éste describe una trayectoria parabólica.

Como hemos comentado antes, en su obra *Diálogo sobre los Sistemas del Mundo* (1633), Galileo Galilei expone que el movimiento de un proyectil puede considerarse el resultado de componer dos movimientos simultáneos e independientes entre sí: uno, horizontal y uniforme; otro, vertical y uniformemente acelerado.

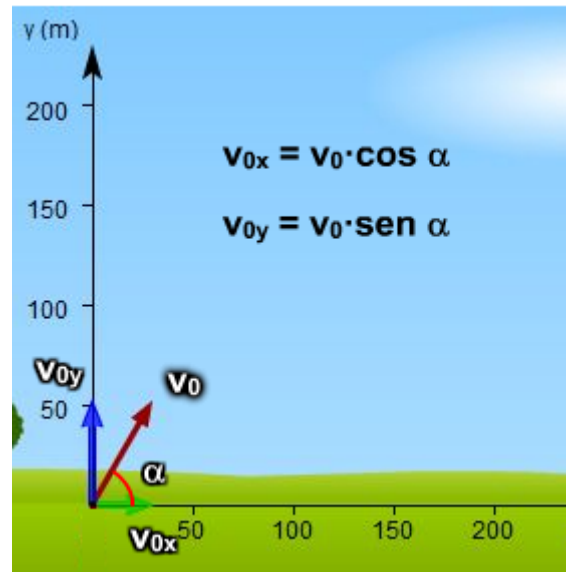
Como puedes ver en la figura de la derecha, si la velocidad de salida es  $v_0$  y el ángulo es  $\alpha$ , tendremos que las componentes de la velocidad inicial son:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$$

Las componentes de cada una de las magnitudes que describen estos movimientos son:

Magnitud	Componente x	Componente y
aceleración	$a_x = 0$	$a_y = -g$
velocidad	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - gt$
posición	$x = v_{0x}t$	$y = v_{0y}t - (1/2)gt^2$



Elaboración propia

En el simulador anterior puedes observar los valores que toman las variables en cada instante. Estos valores se calculan así:

## Cálculo de la velocidad

Vamos a considerar que en el instante inicial ( $t = 0$ ) la posición del móvil y su velocidad son:

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{i} + v_{0y} \vec{j}$$

Por lo general solemos conocer el módulo de la velocidad inicial y el ángulo que forma con la horizontal, por lo que:

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{i} + v_{0y} \vec{j} = v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{j}$$

La velocidad en cualquier instante, recordando el movimiento rectilíneo, se expresa como:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = v_{0x} \vec{i} + (v_{0y} + a_y \cdot t) \vec{j} = v_0 \cos \alpha \vec{i} + (v_0 \sin \alpha + a_y \cdot t) \vec{j}$$

Dado que la aceleración es la de la gravedad,  $a_y = -g$ , por lo que la velocidad será:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = v_{0x} \vec{i} + (v_{0y} - g \cdot t) \vec{j} = v_0 \cos \alpha \vec{i} + (v_0 \sin \alpha - g \cdot t) \vec{j}$$

## Cálculo de la posición

El vector de posición en cualquier instante es:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = (x_0 + v_{0x} \cdot t) \vec{i} + (y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2) \vec{j}$$

y como  $a_y = -g$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = (x_0 + v_{0x} \cdot t) \vec{i} + (y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2) \vec{j}$$

y agrupando términos, en forma vectorial:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2$$

## Ecuación de la trayectoria

Podemos encontrar la ecuación de la trayectoria eliminando el tiempo entre las ecuaciones (componentes del vector  $\vec{r}$ ):

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

y, considerando  $x_0 = 0$ , nos queda:

$$y = y_0 + \tan \alpha \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

ecuación de segundo grado de la forma  $y = c + b x - a x^2$ , que, como sabes, representa la ecuación de una parábola.

*Ejercicio resuelto*

Desde una altura de 12 m del suelo se lanza una pelota con una velocidad de 15 m/s formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Determina:

- a) Las ecuaciones que describen el movimiento de la pelota.
- b) ¿Cuánto tiempo tardará en chocar con el suelo?
- c) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar un punto a 2 m por encima del lugar de lanzamiento?
- d) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

#### Mostrar retroalimentación

En primer lugar organizamos los datos:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 12$$

$$v_{0x} = 15,0 \cdot \cos 30 = 13,0 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = 15,0 \cdot \sin 30 = 7,5 \text{ m/s}$$

$$g = -9,8 \text{ m/s}^2$$

#### a) Ecuaciones del movimiento

Veamos las ecuaciones en cada uno de los ejes

Eje X:

$$x = 13,0 t$$

$$v_x = v_{0x} = 13,0$$

Eje Y:

$$y = 12 + 7,5 t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2$$

$$v_y = 7,5 - 9,8 t$$

#### b) Cálculo del tiempo en llegar al suelo

La altura de la pelota cuando llegue al suelo es  $y = 0$ . Por lo tanto resolvemos la ecuación:

$$0 = 12 + 7,5 t - 4,9 t^2$$

y nos quedamos con la solución positiva que es la que tiene sentido físico, obteniendo que el tiempo que la pelota tarda en caer es  $t = 2,47 \text{ s}$ .

#### c) Tiempo en encontrarse a 2 m por encima del punto de lanzamiento

Esto quiere decir que en ese instante se encontrará a una altura  $y = 14 \text{ m}$ .

$$\text{Luego: } 14 = 12 + 7,5 t - 4,9 t^2 ;$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado anterior se obtienen dos resultados positivos  $t_1 = 0,35 \text{ s}$  ;  $t_2 = 1,16 \text{ s}$ . Ambos resultados pueden considerarse válidos. El primero es el tiempo que tarda en pasar por esa posición cuando la pelota va subiendo y segundo es el tiempo que tarda en pasar por esa misma altura cuando la pelota va descendiendo.

#### d) Cálculo de la altura máxima

En el instante en que se alcanza la altura máxima se cumple la condición  $v_y = 0$ , por tanto podemos calcular el tiempo que se tarda en alcanzar esa altura máxima:

$$0 = 7,5 - 9,8 t ; t = 0,75 \text{ s}.$$

Observa que en este caso al no estar el punto de lanzamiento y el de caída al mismo nivel, el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima no es la mitad del tiempo de vuelo.



Para calcular la altura máxima calculamos el valor de y:

$$y_{\max} = 12 + 7,5 \cdot 0,75 - 4,9 \cdot 0,75^2 = 14,81 \text{ m.}$$

## Importante

¿Dónde hay que situar el origen del sistema de referencia?

De forma general, en la posición más baja y más a la izquierda que pueda ocupar el móvil, para que todas las posiciones verticales y horizontales sean positivas, de acuerdo con los ejes usados en Matemáticas.

## Ejercicio resuelto

Un portero de fútbol, realiza un saque impulsando el balón con una velocidad de 20 m/s, formando un ángulo de  $37^\circ$  con la horizontal. ¿Cuál es la ecuación del movimiento del balón? ¿Y la velocidad en función del tiempo? ¿Cuál es la ecuación de su trayectoria?

### Mostrar retroalimentación

En primer lugar calculamos las componentes de la velocidad inicial:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 20 \cos 37^\circ = 16 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 20 \sin 37^\circ = 12 \text{ m/s}$$

La ecuación del movimiento del balón, con  $x_0 = y_0 = 0$ , es:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + v_0 \cos \alpha \cdot t)\vec{i} + (y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2)\vec{j} = 16 \cdot t\vec{i} + (12 \cdot t - \frac{1}{2}9,8 \cdot t^2)\vec{j}$$

y la ecuación de la velocidad:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v_0 \cos \alpha \vec{i} + (v_0 \sin \alpha - g \cdot t)\vec{j} = 16\vec{i} + (12 - 9,8 \cdot t)\vec{j}$$

La ecuación de la trayectoria será:

$$y = y_0 + \tan \alpha \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

$$y = 0,75 x - 0,019 x^2$$

que es la ecuación de una parábola.

## Comprueba lo aprendido triple

Un arquero dispara una flecha con una velocidad inicial  $V_0$  de 40 m/s. formando un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal. A 120 m del arquero, en la dirección en que se dispara la flecha, hay un obstáculo de 100 m de altura. Realiza los cálculos y señala la respuesta que te parezca correcta:

- ☐ La flecha pasa por encima del obstáculo
- ☐ La flecha choca con el obstáculo a 31,4 m sobre el suelo
- ☐ La flecha choca con el obstáculo a 68,6 m del suelo
- ☐ La flecha no llega al obstáculo

Incorrecto: La ecuación de la trayectoria es  $y = \tan\alpha \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$

Y en nuestro caso a 120 m del lanzamiento, sustituyendo,  $y = 31,4$  m

Correcto: La ecuación de la trayectoria es  $y = \tan\alpha \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$

Y en nuestro caso a 120 m del lanzamiento, sustituyendo,  $y = 31,4$  m

Incorrecto: La ecuación de la trayectoria es  $y = \tan\alpha \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$

Y en nuestro caso a 120 m del lanzamiento, sustituyendo,  $y = 31,4$  m

Incorrecto: La ecuación de la trayectoria es  $y = \tan\alpha \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$

Y en nuestro caso a 120 m del lanzamiento, sustituyendo,  $y = 31,4$  m

### Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

## 4.2 Lanzamiento horizontal

Es un caso particular del lanzamiento de proyectiles que tiene lugar cuando un objeto (sometido a la acción de la gravedad) es lanzado con determinada velocidad inicial  $v_0$  en dirección paralela al suelo, es decir que la velocidad inicial solo tiene componente X .

Si suponemos que no hay resistencia del aire, el movimiento es el resultante de la composición de dos movimientos:

- Uno uniforme según el eje X.
- Otro uniformemente acelerado según el eje Y.

Las ecuaciones del movimiento son:

En el eje X	En el eje Y
$a_x = 0$	$a_y = -g$
$v_x = v_0 = \text{constante}$	$v_y = -g \cdot t$
$x = x_0 + v_0 \cdot t$	$y = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

También podemos expresar las ecuaciones del movimiento en forma vectorial.

Para la **velocidad** en cualquier instante tenemos:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = v_0 \vec{i} - g \cdot t \vec{j}$$

Y la **ecuación de la posición** en cualquier instante es:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = (x_0 + v_0 \cdot t) \vec{i} + (y_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2) \vec{j}$$

Podremos encontrar la **ecuación de la trayectoria** eliminando el tiempo entre las ecuaciones (componentes del vector  $\mathbf{r}$ ):

$$x = x_0 + v_0 \cdot t$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

y, considerando  $x_0 = 0$ , nos queda:

$$y = y_0 - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} \cdot x^2$$

que es una ecuación de segundo grado que representa la ecuación de una parábola.

### Ejercicio resuelto

Un jugador de tenis situado a 12 m de la red, pretende hacer un tanto de saque (ace), para lo cual la bola tiene que botar a 6,4 m de la red, en campo contrario. Golpea la pelota a 2,30 m de altura, en dirección horizontal, con una velocidad de 108 km/h. Si la red se levanta hasta 90 cm de altura, ¿conseguirá su propósito el jugador?

**Mostrar retroalimentación**

Debemos saber si pasa por encima de la red y si entra antes de los 6,4 m.

$$v = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$$

La ecuación del movimiento es :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = 30 \cdot t\vec{i} + (2,3 - \frac{1}{2}9,8 \cdot t^2)\vec{j}$$

Es decir, en componentes:

$$x = 30 t$$

$$y = 2,3 - \frac{1}{2} 9,8 t^2$$

Y la ecuación de la trayectoria:  $y = y_0 - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} \cdot x^2$

$$y = 2,3 - \frac{1}{2} 9,8 / 900 x^2 = 2,3 - 0,0054 x^2$$

Si la red está a 12 m ,  $x = 12$  ;  $y = 2,3 - 0,8 = 1,5 \text{ m}$

Y la pelota pasará a  $1,5 - 0,9 = 0,6 \text{ m}$  por encima de la red.

Si debe tocar la pista a 6,4 m de la red,  $x = 12 + 6,4 = 18,4 \text{ m}$

Para esta x, según la ecuación de la trayectoria,  $y = 0,5 \text{ m}$

Por tanto la pelota pasa alta sobre la línea de saque y no toca el suelo hasta que  $y = 0$ , lo que sucede cuando  $x = 20,6 \text{ m}$ .

El jugador no consigue el tanto de saque (los tenistas sacan con un ángulo por debajo de la horizontal).

En la siguiente simulación se lanza un objeto horizontalmente desde una altura de 136 m con una velocidad inicial de 18 m/s.

Utilizando las ecuaciones comprueba que los datos proporcionados por el simulador son correctos.

## Comprueba lo aprendido triple

Un avión que vuela horizontalmente suelta un paquete con ayuda para unos expedicionarios. La trayectoria del paquete que observan los expedicionarios es:

- ☐ Una recta que forma un ángulo con la vertical
- ☐ Una rama de parábola
- ☐ Una recta vertical
- ☐ Ninguna de las anteriores

Incorrecto: El movimiento del paquete es la superposición de un movimiento de caída libre (vertical, uniformemente acelerado) y de un movimiento horizontal uniforme con la velocidad del avión, es decir, es un lanzamiento horizontal y como tal, parabólico.

Correcto: El movimiento del paquete es la superposición de un movimiento de caída libre (vertical, uniformemente acelerado) y de un movimiento horizontal uniforme con la velocidad del avión, es decir, es un lanzamiento horizontal y como tal, parabólico.

Incorrecto: El movimiento del paquete es la superposición de un movimiento de caída libre (vertical, uniformemente acelerado) y de un movimiento horizontal uniforme con la velocidad del avión, es decir, es un lanzamiento horizontal y como tal, parabólico.

Incorrecto: El movimiento del paquete es la superposición de un movimiento de caída libre (vertical, uniformemente acelerado) y de un movimiento horizontal uniforme con la velocidad del avión, es decir, es un lanzamiento horizontal y como tal, parabólico.

**Solution**

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

## 4.3 Magnitudes de interés

---

Cuando analizamos el lanzamiento oblicuo, es interesante conocer el **tiempo de vuelo**,  $t_v$ , la **altura máxima** que alcanza,  $y_m$ , y la distancia horizontal recorrida o **alcance horizontal**,  $x_m$ .

Simulación de [Jesús Peñas](#) bajo licencia Creative Commons

### Tiempo de vuelo

Si eliges el origen del sistema de referencia tal que  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$ , puedes calcular el tiempo que el proyectil permanece en el aire hasta llegar al suelo, que se suele llamar tiempo de vuelo,  $t_v$ .

Como la trayectoria es simétrica puedes calcular el tiempo necesario para llegar al punto más alto y multiplicarlo por dos.

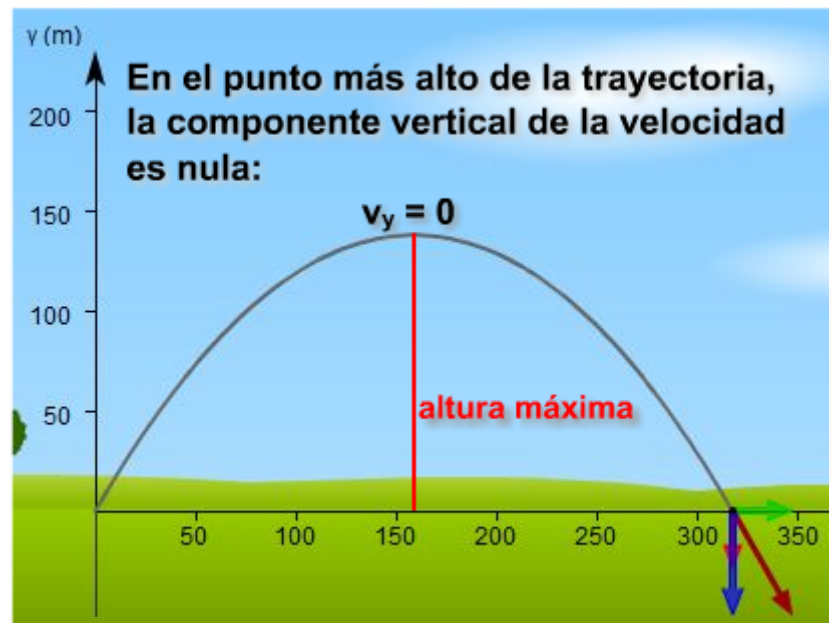
En este punto la componente vertical de la velocidad se anula,  $v_y = 0$ , y nos queda:

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \alpha - g \cdot t = 0$$
 y  
despejando, el tiempo de vuelo  
será: 
$$t_v = 2 \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} \alpha$$

### Altura máxima

La altura máxima se alcanza cuando la componente vertical  $v_y$  de la velocidad se hace cero.

Como has calculado en el párrafo anterior, el tiempo necesario para que el proyectil llegue al punto más alto es  $t = \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} \alpha$  y el valor de la altura máxima será:



Elaboración propia

$$y_m = v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = v_0 \operatorname{sen} \alpha \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g \cdot \left( \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} \alpha \right)^2$$

Operando resulta que:

$$y_m = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \alpha$$

### Alcance máximo

Como el tiempo de vuelo es el necesario para llegar al suelo, si sustituyes ese tiempo en

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$x_m = v_0 \cos \alpha \cdot 2 \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} \alpha = \frac{v_0^2}{g} 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

Si recuerdas la identidad trigonométrica:  $2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$  el alcance máximo es:

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha$$

El valor máximo de alcance se da cuando  $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$ , igualdad que se cumple para un ángulo  $\alpha = 45^\circ$ .

No hay que memorizar estas fórmulas anteriores, ya que si en una situación dada hay que determinar cualquiera de ellas, se calculan sustituyendo en las ecuaciones generales del movimiento de que se trate.

**Importante**

El ángulo de lanzamiento para que el alcance sea máximo es de  $45^\circ$ .

**Ejercicio resuelto**



Un saltador de longitud alcanza la velocidad de 10 m/s después de su carrera, cuando inicia su salto con un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. Determina:

- el tiempo total que permanece en el aire.
- la altura máxima alcanzada en su salto.
- la marca que consigue el saltador (longitud del salto).

#### Mostrar retroalimentación

El saltador tiene una velocidad inicial  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  formando 30° con la horizontal. Vamos a calcular en primer lugar las componentes x e y de la velocidad inicial:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 10 \cos 30^\circ = 8,7 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 10 \sin 30^\circ = 5 \text{ m/s}$$

#### a) Cálculo del tiempo de vuelo

el tiempo total de vuelo será:

$$t_v = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = 2 \frac{10 \text{ m/s} \sin 30^\circ}{9,8 \text{ m/s}^2} = 1,02 \text{ s}$$

#### b) Cálculo de la altura máxima:

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{(10 \text{ m/s})^2 \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2} = 1,28 \text{ m}$$

#### c) Cálculo del alcance (longitud del salto)

$$x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(10 \text{ m/s})^2 \sin 60^\circ}{9,8 \text{ m/s}^2} = 8,84 \text{ m}$$

## Comprueba lo aprendido Múltiple

Los canguros australianos son capaces de dar saltos de 8 m de alcance horizontal. Suponiendo que saltan con un ángulo de 45°, se cumple:

- ☐ Saltan con una velocidad inicial de 8,85 m/s.

- ☐ El tiempo que dura el salto es 1,28 s.

- ☐ Llegan a alturas de hasta 2 m.

- ☐ Nada de lo anterior.

#### Mostrar retroalimentación

#### Solution

- Correcto
- Correcto

2. Correcto
3. Correcto
4. Incorrecto

# Mapa Conceptual

---

# Fuentes para el profesorado

---

Descargar CMAP.

## Resumen

---



### *Importante*

---

Principio de Independencia de Galileo.

Cuando un cuerpo está sometido a dos movimientos simultáneos, su cambio de posición es independiente del hecho de que los dos movimientos se produzcan sucesiva o simultáneamente.



### *Importante*

---

Principio de Superposición.

Cuando un cuerpo está sometido a varios movimientos independientes simultáneamente, el movimiento total se obtiene sumando vectorialmente dichos movimientos parciales.



### *Importante*

---

De acuerdo con el Principio de Independencia, puedes considerar el movimiento del proyectil como una combinación de un movimiento horizontal uniforme y de un movimiento vertical uniformemente acelerado.



### *Importante*

---

¿Dónde hay que situar el origen del sistema de referencia?

De forma general, en la posición más baja y más a la izquierda que pueda ocupar el móvil, para que todas las posiciones verticales y horizontales sean positivas, de acuerdo con los ejes usados en Matemáticas.



## Ejercicio 1

### Ejercicio resuelto

Un barquero quiere cruzar un río de 100 m de anchura. Para ello, rema perpendicularmente a la corriente imprimiendo a la barca una velocidad de 2 m/s respecto al agua. La velocidad de la corriente es de 0,5 m/s. Calcula:

- El tiempo que tarda en atravesar el río.
- La velocidad con que se mueve la barca respecto a la orilla del río.
- ¿En que punto de la orilla opuesta desembarcará?
- ¿Qué longitud ha recorrido la barca cuando llega a la orilla opuesta?

#### Planteamiento del problema

Sobre la barca están actuando por un lado el movimiento que imprime el barquero y por otro el que produce la corriente. El movimiento que produce el barquero con su remo es un MRU en el eje Y. Mientras que el que genera la corriente también es un MRU pero sobre el eje X.

El resultado será que la barca se mueva con un movimiento rectilíneo uniforme con una velocidad constante que será la suma vectorial de la velocidad del remero y de la corriente.

Ecuaciones del movimiento

Sobre el eje X

$$x = x_0 + v_c \cdot (t - t_0)$$

$$x_0 = 0 \text{ m}$$

$$t_0 = 0$$

$$v_c = 0,5 \text{ m/s (velocidad de la corriente)}$$

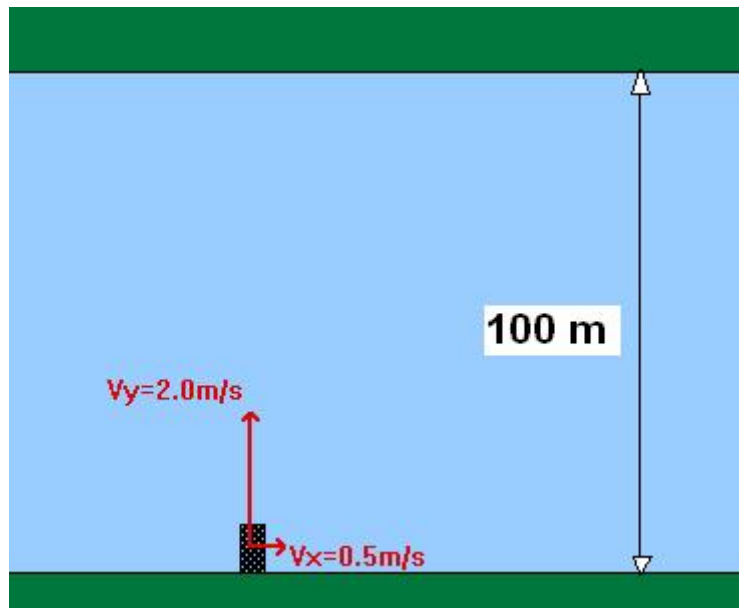
Sobre el eje Y

$$y = y_0 + v_b \cdot (t - t_0)$$

$$y_0 = 0 \text{ m}$$

$$t_0 = 0$$

$$v_b = 2 \text{ m/s (velocidad del barquero)}$$



#### Mostrar retroalimentación

a) Para calcular el tiempo que tarda en cruzar el río tomamos la ecuación del movimiento sobre el eje Y

$$y = y_0 + v_b \cdot (t - t_0) \text{ sustituyendo los valores iniciales}$$

$$y = v_b \cdot t \text{ despejamos el tiempo}$$



$$t = \frac{y}{v_b} = \frac{100}{2} = 50 \text{ s}$$

b) La velocidad de la barca respecto a la orilla será la velocidad con la que se mueva realmente la barca y vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = 0,5 \hat{i} + 2 \hat{j} \text{ m/s}$$

El módulo de dicha velocidad lo podemos calcular mediante la siguiente expresión:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0,5^2 + 2^2} = \sqrt{4,25} = 2,06 \text{ m/s}$$

c) Para calcular en qué punto de la orilla opuesta atracará nuestra barca debemos calcular la posición final, tanto sobre el eje X como sobre el eje Y, de la barca. Este último lo conocemos porque es la anchura del río. Para calcular la posición final sobre el eje X tomaremos la ecuación sobre este eje y el tiempo que tarda en cruzar el río que lo hemos calculado en el apartado anterior.

$$x = x_0 + v_c \cdot (t - t_0) \text{ sustituyendo los valores iniciales}$$

$$x = v_c \cdot t$$

Sustituimos el valor de t.

$$x = v_c \cdot t = 0,5 \cdot 50 = 25 \text{ m}$$

d) Al tratarse de un movimiento rectilíneo la longitud recorrida coincide con el módulo del vector desplazamiento

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_t - \vec{r}_0 \text{ como } \vec{r}_0 = 0$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}$$

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} = 0,5 \cdot t \hat{i} + 2 \cdot t \hat{j} \text{ m/s}$$

Sustituimos el tiempo t= 50 s

$$\vec{r} = 0,5 \cdot 50 \hat{i} + 2 \cdot 50 \hat{j} = 25 \hat{i} + 100 \hat{j} \text{ m/s}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25^2 + 100^2} = \sqrt{10625} = 103,07 \text{ m}$$

## Ejercicio 2

### Ejercicio resuelto

Un nadador intenta cruzar perpendicularmente un río nadando con una rapidez de 1,6 m/s, respecto al agua tranquila. Sin embargo llega a la otra orilla a un punto que está 40 metros más lejos en la dirección de la corriente. Sabiendo que el río tiene un anchura de 80 m. a) ¿Cuál es la velocidad del nadador respecto a la orilla?

#### Planteamiento del problema

Sobre el nadador están, por un lado el movimiento que se imprime él al nadar y por otro el que produce la corriente. El movimiento que produce el nadador es un MRU en el eje Y. Mientras que el que genera la corriente también es un MRU pero sobre el eje X.

El resultado será que la barca se mueva con un movimiento rectilíneo uniforme con una velocidad constante que será la suma vectorial de la velocidad del remero y de la corriente.

#### Ecuaciones del movimiento

Sobre el eje X

$$x = x_0 + v_c \cdot (t - t_0)$$

$$x_0 = 0 \text{ m}$$

$$t_0 = 0$$

$$v_c = ? \text{ m/s (velocidad de la corriente)}$$

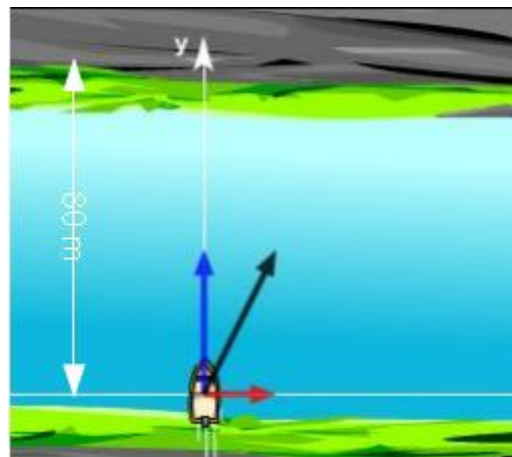
Sobre el eje Y

$$y = y_0 + v_n \cdot (t - t_0)$$

$$y_0 = 0 \text{ m}$$

$$t_0 = 0$$

$$v_n = 1,6 \text{ m/s (velocidad del nadador)}$$



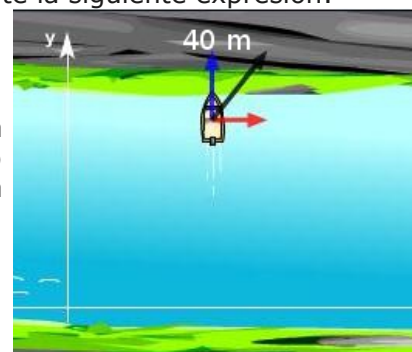
La velocidad del nadador respecto a la orilla será la velocidad con la que se mueva realmente y vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\vec{v} = v_c \hat{i} + v_n \hat{j} \text{ m/s}$$

El módulo de dicha velocidad lo podemos calcular mediante la siguiente expresión:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_c^2 + v_n^2}$$

Conocemos la velocidad del nadador respecto al agua en reposo y necesitamos conocer la velocidad de la corriente. Para ello vamos a calcular primero el tiempo que tarda el nadador en cruzar el río. Tomamos la ecuación del movimiento sobre el eje Y



$$y = y_0 + v_n \cdot (t - t_0) \text{ sustituyendo los valores iniciales}$$

$$y = v_n \cdot t \text{ despejamos el tiempo}$$

$$t = \frac{y}{v_n} = \frac{80}{1,6} = 50 \text{ s}$$

Una vez que conocemos el tiempo que tarda en cruzar el río y sabiendo en que punto de la otra orilla llega, podemos calcular la velocidad de la corriente. Para ello tomamos la ecuación del movimiento en el eje X.

$$x = x_0 + v_c \cdot (t - t_0) \text{ sustituyendo los valores iniciales}$$

$$x = v_c \cdot t$$

Sustituimos el valor de t

$$x = v_c \cdot t \text{ despejamos la } v_c$$

$$v_c = \frac{x}{t} = \frac{40}{50} = 0,8 \text{ m/s}$$

Ahora basta con sustituir en la expresión del principio:

$$\vec{v} = v_c \hat{i} + v_n \hat{j} \text{ m/s} = 0,8 \hat{i} + 1,6 \hat{j} \text{ m/s}$$

El módulo de la velocidad será por tanto:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_c^2 + v_n^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0,8^2 + 1,6^2} = \sqrt{3,2} = 1,79 \text{ m/s}$$

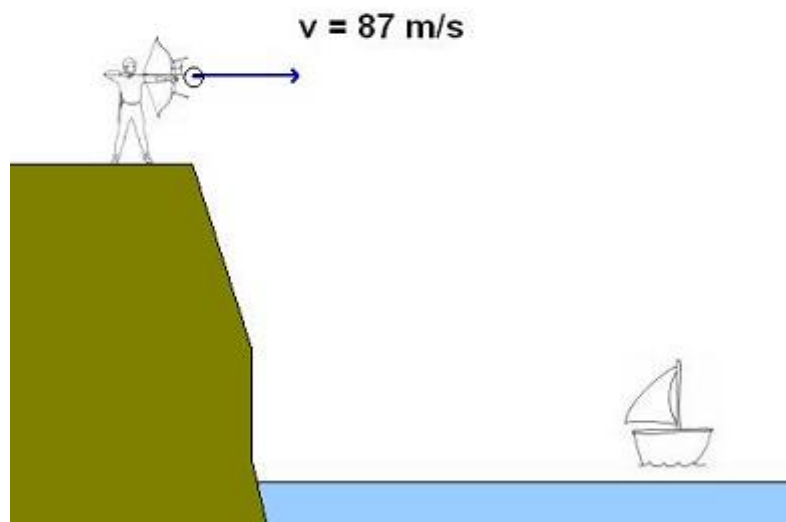
La rapidez con la que alcanza la otra orilla es de 1,79 m/s

## Ejercicio 3

### Ejercicio resuelto

El arquero de la imagen ha conseguido lanzar con su arco un mensaje desde el acantilado de 80 m de altura hasta el barco. La flecha que lleva el mensaje ha salido del arco con una velocidad horizontal de 87 m/s. Calcula:

- Despreciando los efectos del rozamiento con el aire, ¿Cuánto tiempo estará la flecha "volando" hasta llegar al barco?
- ¿A qué distancia, aproximadamente, se encuentra el barco del acantilado?



#### Planteamiento del problema

Se trata de un tiro horizontal, un tipo de composición de movimientos donde podemos considerar que el movimiento que describe la flecha puede descomponerse en dos uno MRU sobre el eje horizontal (eje X) y un MRUA sobre el eje vertical (eje Y)

#### Ecuaciones del movimiento

Eje X

Se trata de un MRU

$x = x_0 + v_0 \cdot t$  donde  $v_0$  es la velocidad con la que se lanza la flecha

$$v_x = v_0$$

Eje Y

Se trata de un MRUA

$y = y_0 + v_{y0} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$  como  $v_{y0}$  es nula dado que el lanzamiento es horizontal

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_{y0} - gt = -gt$$

A) La flecha estará volando mientras no alcance el agua. Para calcular el tiempo que la flecha está en el aire utilizaremos esta condición, es decir, calcularemos el tiempo que tarda la flecha en llegar al agua.

En ese instante se cumple la condición de que la posición sobre el eje Y es cero  $y = 0$ .

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

despejamos el tiempo de esta expresión

$$0 = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$-y_0 = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{-2y_0}{-g} = t^2$$

$$\frac{2y_0}{g} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

Sustituimos los valores de  $g$  y  $y_0$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{10}} = \sqrt{16} = 4s$$

La flecha está 4 segundos en el aire.

B) La distancia a la que se encuentra del acantilado corresponde con el alcance máximo. Éste se calcula utilizando la ecuación del movimiento en horizontal y sustituyendo en ella el tiempo de vuelo.

$$x = x_0 + v_0 \cdot t$$

$$x = 0 + 87.4 = 348m$$

La flecha caerá a 348 m del acantilado.



## Ejercicio 4

### Ejercicio resuelto

Un cañón se ajusta con un ángulo de tiro de  $45^\circ$ , Dispara una bala con una rapidez de 300 m/s. Calcula:

- a) ¿A qué altura llegará la bala?
- b) ¿Cuanto tiempo estará en el aire?
- c) ¿Cuál es el alcance horizontal de la bala?
- d) ¿Con qué velocidad impactará la bala en el suelo?

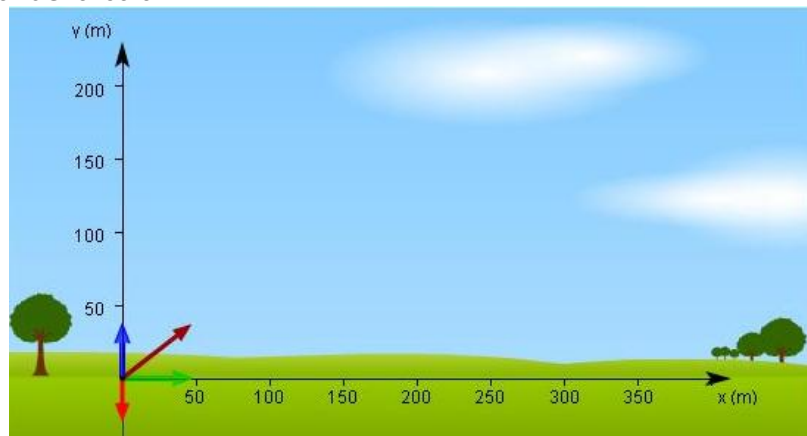
Sol: a) 2294 m, b) 43,2 s, c) 9184 m

#### Planteamiento del problema

El movimiento que realiza la bala es del tipo "tiro parabólico o tiro oblicuo". La descripción de este tipo de movimientos permite considerar que el móvil se mueve como si poseyera un MRU sobre el eje X y un MRUA sobre el eje Y. La composición de ambos da como resultado el movimiento real de la bala.

Al lanzarse la bala con una velocidad inicial, que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, los valores iniciales de la velocidad sobre los ejes X e Y vendrán dados por las componentes cartesianas de la velocidad inicial.

$$\begin{aligned}v_{x0} &= v_0 \cos \alpha \\v_{y0} &= v_0 \sin \alpha\end{aligned}$$



Por tanto, las ecuaciones del movimiento serán:  
Eje X (Movimiento rectilíneo uniforme)

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_{x0} \cdot (t - t_0) \\x &= x_0 + v_0 \cos \alpha \cdot (t - t_0) \\v_x &= v_{x0} = v_0 \cos \alpha = cte\end{aligned}$$

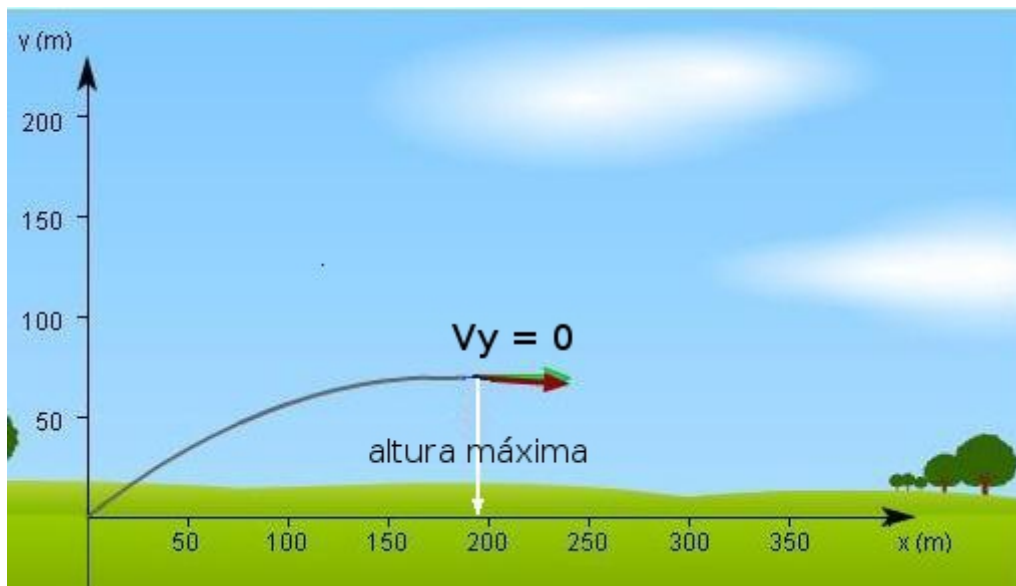
Eje Y (Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado)

$$\begin{aligned}y &= y_0 + v_{y0} \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \\y &= y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \\v_y &= v_0 \sin \alpha - g(t - t_0)\end{aligned}$$

El signo menos que aparece delante de  $g$  es coherente con el criterio de signos que hemos elegido.

a) ¿A qué altura llegará la bala?

La bala de cañón estará subiendo hasta que se anule la componente y de la velocidad. Esta será la condición para resolver este apartado ( $v_y = 0$ ).



$$v_y = v_o \sen 45 - gt \quad (\text{dado que } t_o \text{ es } 0)$$

$$0 = v_o \sen 45 - gt$$

$$v_o \sen 45 = gt$$

$$t = \frac{v_o \sen 45}{g} = \frac{300 \sen 45}{9,8} = 21,6 \text{ s}$$

El tiempo que la bala tarda en alcanzar la máxima altura es de 21,6 segundos. Sustituyendo este valor en la ecuación del movimiento sobre el eje Y obtendremos la altura alcanzada por la bala.

$$y_{max} = y_o + v_o \sen 45 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{dado que } t_o = 0)$$

$$y_{max} = 0 + 300 \cdot \sen(45) \cdot 21,6 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (21,6)^2 = 2295,9 \text{ m}$$

La altura alcanzada por la bala es de 2296,9 metros.

b) ¿Cuanto tiempo estará en el aire?

El proyectil estará en el aire hasta que alcance el suelo. En este momento la altura de la bala será nula, es decir  $y=0$ .

$$y = y_o + v_o \sen 45 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{dado que } t_o = 0)$$

$$0 = 0 + v_o \sen 45 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{dado que } y_o = 0)$$

$$0 = (v_o \sen 45 - \frac{1}{2}gt)t \quad (\text{sacando factor comun "t"})$$

$$0 = v_o \sen 45 - \frac{1}{2}gt$$

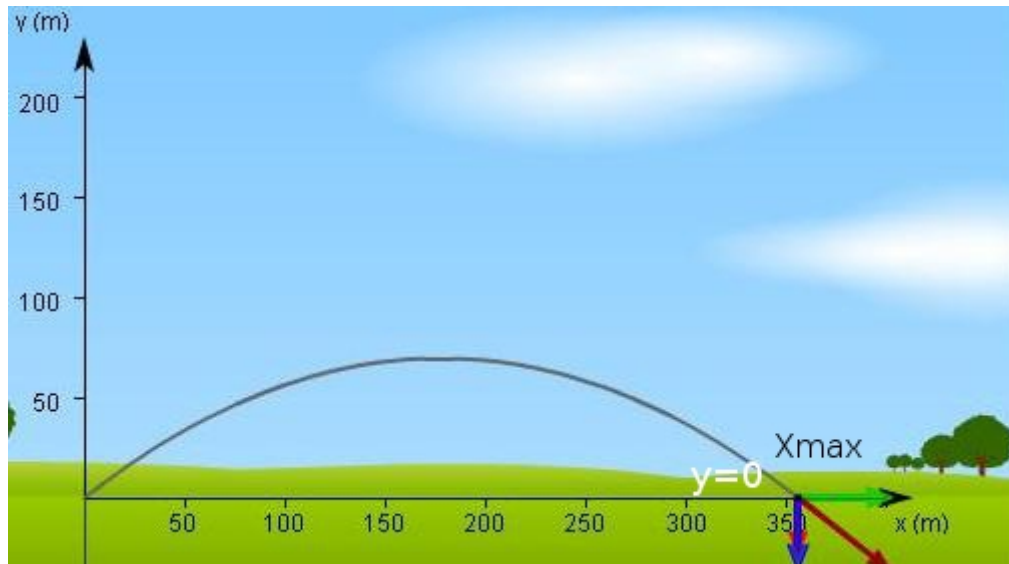
$$\frac{1}{2}gt = v_o \sen 45$$

$$t = \frac{2v_o \cdot \sin 45}{g} = \frac{2 \cdot 300 \cdot \sin 45}{9,8} = 43,29s$$

Como era de esperar, el tiempo que la bala está en el aire es el doble de el que tarda en llegar a la máxima altura, ya que este punto corresponde con la mitad del recorrido.

c) ¿Cuál es el alcance horizontal de la bala?

Para calcular el alcance máximo del disparo basta con sustituir en la ecuación de la posición del movimiento sobre el eje X el tiempo que la bala está en el aire.



$$x = x_o + v_o \cos(45) \cdot t \text{ (dado que } t_o = 0)$$

$$x = 0 + 300 \cdot \cos(45) \cdot 43,2 = 9072m$$

El alcance del disparo es de 9072 m

d) ¿Con qué velocidad impactará la bala en el suelo?

La velocidad con la que llega al suelo la bala viene dada por la siguiente expresión:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$\vec{v} = (v_o \cos \alpha) \vec{i} + (v_o \sin \alpha - g t) \vec{j}$$

$$\vec{v} = (300 \cdot \cos 45) \vec{i} + (300 \cdot \sin 45 - 9,8 \cdot 43,2) \vec{j} = 212,1 \vec{i} - 211,2 \vec{j}$$

El módulo de vector velocidad nos dará la rapidez con la que la bala llega al suelo.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{212,1^2 + 211,2^2} = \sqrt{89580,5} = 299,3 \text{ m/s}$$

La rapidez con la que la bala llega al suelo es de 299,3 m/s.



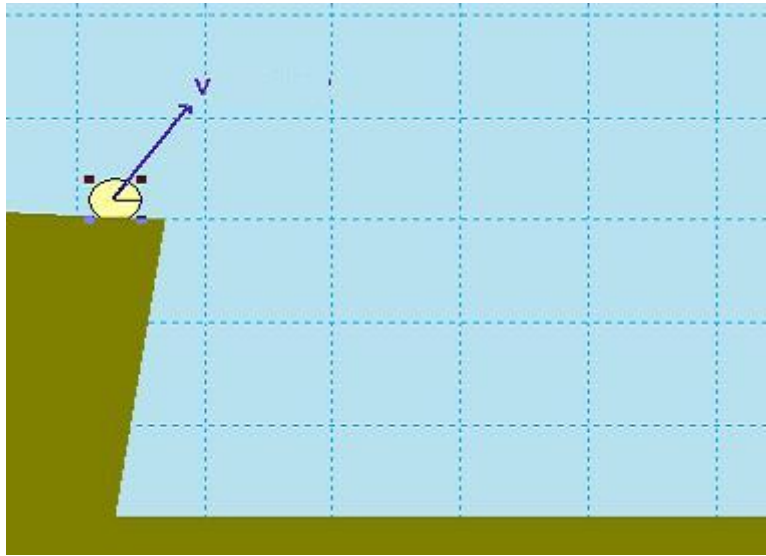
## Ejercicio 5

### Ejercicio resuelto

Desde un acantilado de 30 m de altura sobre el mar, lanzamos una piedra hacia el agua. La piedra sale con una velocidad de 20 m/s, formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Calcula:

- La altura máxima que alcanza la piedra, medida desde el nivel del agua.
- La velocidad de la piedra en el instante de caer al agua. (nota: puedes considerar  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

Planteamiento del problema



El movimiento que realiza la piedra es del tipo "tiro oblicuo". Podemos considerar que se trata un movimiento compuesto por MRU sobre el eje X y un MRUA sobre el eje Y. La composición de ambos da como resultado el movimiento real de la piedra.

La velocidad inicial de la piedra sobre dichos ejes vendrá dada por:

$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha \quad \text{y} \quad v_{y0} = v_0 \sin \alpha$$

Por tanto, las ecuaciones del movimiento serán:

Eje X (Movimiento rectilíneo uniforme)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x0} \cdot (t - t_0) \\ v_x &= v_{x0} = v_0 \cos \alpha = \text{cte} \end{aligned}$$

Eje Y (Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado)

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{y0} \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \\ y &= y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \\ v_y &= v_0 \sin \alpha - g(t - t_0) \end{aligned}$$

El signo menos que aparece delante de g es coherente con el criterio de signos que hemos elegido. a)

a) ¿A qué altura alcanzará la piedra?

La piedra estará subiendo hasta que se anule la componente "y" de su velocidad. Esta será la condición para resolver este apartado ( $v_y = 0$ ).

$$\begin{aligned}v_y &= v_o \sin 30 - gt \quad (\text{dado que } t_o \text{ es } 0) \\0 &= v_o \sin 30 - gt \\v_o \sin 30 &= gt \\t &= \frac{v_o \sin 30}{g} = \frac{20 \sin 30}{10} = 1s\end{aligned}$$

Al segundo de lanzar la piedra deja de subir. Sustituyendo este valor en la ecuación del movimiento sobre el eje Y obtendremos la altura alcanzada.

$$\begin{aligned}y_{max} &= y_o + v_o \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{dado que } t_o = 0) \\y_{max} &= 20 + 20 \cdot \sin(30) \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (1)^2 = 25m\end{aligned}$$

La altura alcanzada por la piedra, medida desde la base del alcantilado, es de 25 metros.

b) ¿Cuál será la velocidad con la que la piedra cae en el agua?

La velocidad con la que la piedra llega al agua viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \\ \vec{v} &= (v_o \cos \alpha) \vec{i} + (v_o \sin \alpha - gt) \vec{j}\end{aligned}$$

Donde  $t$  será el tiempo que la piedra esté en el aire. La piedra estará en el aire hasta que su posición sobre el eje Y (su altura) sea 0. Esta condición nos permite calcular el tiempo que la piedra tarda en llegar al agua.

$$\begin{aligned}y &= y_o + v_o \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{dado que } t_o = 0) \\0 &= 20 + 20 \cdot \sin 30 \cdot t - \frac{1}{2}10 \cdot t^2 \\0 &= 20 + 10 \cdot t - 5 \cdot t^2 \quad \text{obtenemos una ecuación de segundo grado}\end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula general para resolver las ecuaciones de segundo grado ( $ax^2 + bx + c = 0$ ):

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} \\t &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-20)}}{2 \cdot 5} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 400}}{10} \\t &= \frac{10 \pm \sqrt{500}}{10} = \frac{10 \pm 22,4}{10} \\t_1 &= \frac{10 + 22,4}{10} = 3,2s\end{aligned}$$

$t_2 = \frac{10 - 22,4}{10} = -2,2s$  este resultado carece de sentido al ser el tiempo negativo. Una vez que conocemos el tiempo que la piedra está en el aire lo sustituimos en la ecuación de la velocidad:

$$\vec{v} = (20 \cdot \cos(30)) \vec{i} + (20 \cdot \sin(30) - 10 \cdot 3,2) \vec{j} = 17,3 \vec{i} - 22 \vec{j}$$

El módulo de vector velocidad nos dará la rapidez con la que la piedra llega al agua.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{17,3^2 + (-22)^2} = \sqrt{783,3} = 28 \text{ m/s}$$

La rapidez con la que la piedra cae en el agua es de 28 m/s.



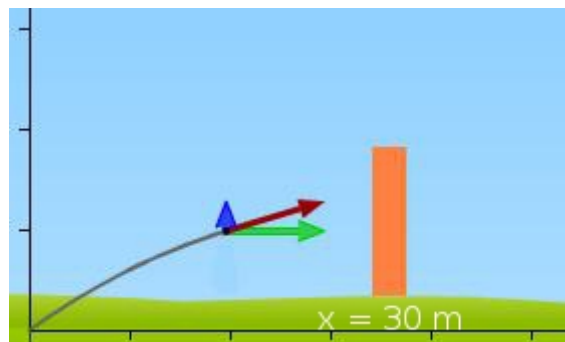
## Ejercicio 6

### Ejercicio resuelto

Se lanza una bola con una velocidad de 25 m/s, formando un ángulo de  $53,1^\circ$  por encima de la horizontal. ¿A qué altura chocará la bola con un muro vertical que está a 30 m. de distancia?

#### Planteamiento del problema

El movimiento que realiza la bola es del tipo "tiro parabólico". En este tipo de movimiento podemos considerar que el móvil se mueve con un movimiento compuesto. Por un lado un MRU sobre el eje X y por otro un MRUA sobre el eje Y. La composición de ambos da como resultado el movimiento real de la bola.



Al lanzarse la bola con una velocidad inicial, que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, los valores iniciales de esta sobre los ejes X e Y vendrán dados por las componentes cartesianas de la velocidad inicial.

$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha \quad \text{y} \quad v_{y0} = v_0 \sin \alpha$$

Por tanto, las ecuaciones del movimiento serán:

Eje X (Movimiento rectilíneo uniforme)

$$x = x_0 + v_{x0} \cdot (t - t_0)$$
$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos \alpha = \text{cte}$$

Eje Y (Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado)

$$y = y_0 + v_{y0} \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$
$$y = y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$
$$v_y = v_0 \sin \alpha - g(t - t_0)$$

El signo menos que aparece delante de  $g$  es coherente con el criterio de signos que hemos elegido.

Para calcular a qué altura golpea la bola el muro, necesitamos conocer el tiempo que tarda la bola en alcanzarlo.

Para ello utilizaremos las ecuaciones del movimiento sobre el eje X

$$x_o + v_o \cos \alpha \cdot t \quad (\text{dado que } t_o = 0)$$

Despejamos el tiempo

$$t = \frac{x - x_o}{v_o \cdot \cos \alpha} = \frac{30 - 0}{25 \cdot \cos(53,1)} = 2s$$

La bola tarda 2 segundos en alcanzar el muro

Sustituimos el tiempo en la ecuación de la posición sobre el eje Y

$$y = y_o + v_o \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (\text{dado que } t_o = 0)$$

$$y = 0 + 25 \sin(53,1) \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 2^2$$

$$y = 39,98 - 19,6 = 20,38 \text{ m}$$

La bola impactará a 20,38 m del suelo

## Ejercicio 7

### Ejercicio resuelto

Un cazador lanza bolas a un mono que cuelga de la rama de un árbol a una altura  $H$ . El hábil mono juguetón trata de detenerlas con las manos. El cazador, que se encuentra a una distancia " $d$ " apunta directamente a las manos del mono sin tener en cuenta que las bolas seguirán una trayectoria parabólica y pasarán, por tanto, por debajo del mono. Sin embargo, el mono, viendo salir las bolas, se suelta de rama y cae del árbol esperando alcanzarlas. El cazador lanza las bolas con una velocidad suficientemente grande y con cierta inclinación ( $\alpha$ ) respecto al suelo.

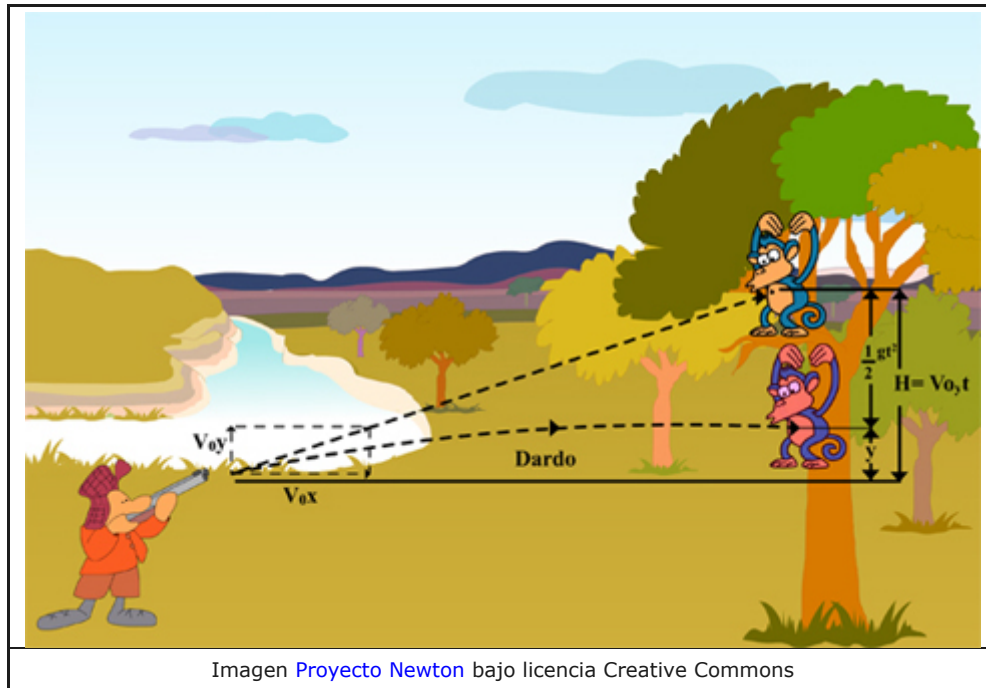


Imagen Proyecto Newton bajo licencia Creative Commons

A) Describe el movimiento que describen ambos móviles:

El mono, al caer, describe un movimiento uniformemente acelerado.

Podemos considerar que las bolas que lanza el cazador describen un movimiento compuesto. Horizontalmente se mueven con un movimiento uniforme. En vertical, al estar sometidas a la aceleración de la gravedad, las bolas describen un movimiento uniformemente acelerado. La composición de ambos nos da un movimiento parabólico.

B) ¿Cuáles son las ecuaciones de movimiento?

Eje X (Movimiento rectilíneo uniforme)

$$x = x_0 + v_{x0} \cdot (t - t_0)$$
$$v_x = \frac{x - x_0}{t - t_0} = v_{x0} = v_0 \cos \alpha = cte$$

Eje Y (Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado)

$$y = y_0 - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$
$$y = y_0 + v_{y0} \sin \alpha \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

$$v_y = v_o \operatorname{sen} \alpha - g(t - t_o)$$

C) Supongamos que las bolas alcanzan al mono. Deduce una expresión para el tiempo que tarda la bola en alcanzar al mono.

Si consideramos el origen de coordenadas en el cazador, la distancia al árbol viene dada por "d" y "H" la altura a la que se encuentra el mono, la  $\operatorname{tg} \alpha = H/d$ . Lo que implica que  $H = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

El tiempo que tarda las bolas en recorrer la distancia "d" será:

$$x = x_o + v_{x_o} \cdot (t - t_o) = v_o \cos \alpha \cdot t$$

$$t = d/v_o \cos(\alpha)$$

D) Deduce una expresión para la posición en que se encuentra el mono cuando la bola lo alcance.

Si la bola alcanza al mono, el tiempo que éste ha estado cayendo es el mismo que el tiempo que la bola se ha estado en movimiento. La posición del mono vendrá dada por la ecuación:

$$y = y_o + v_o \operatorname{sen} \alpha \cdot (t - t_o) - \frac{1}{2} g (t - t_o)^2$$

$$y = H - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Sustituimos el valor de "t" calculado en el paso anterior:

$$y = H - \frac{1}{2} g [d/v_o \cos(\alpha)]^2$$

E) Si suponemos que el mono alcanza la pelota, se cumplirá que la posición del mono y la pelota medidas sobre el eje Y son iguales ( $y_m = y_p$ ). La expresión que has deducido relaciona la altura de la que cae el mono con la distancia a que se encuentra el cazador. ¿qué conclusiones podemos extraer de esta expresión?

De la expresión se deduce que la posición a la que la bola alcanza el mono, o depende de la velocidad a la que se lanza la bola.

Comprueba lo expuesto con la simulación:



Simulación de [David Harrison](#) bajo licencia Creative Commons



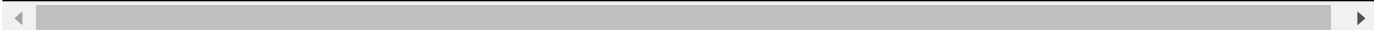
## Aviso Legal

---

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte)**.

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

**Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del**



# Imprimible

---

Descargar [imprimible](#) (pdf - 1122.59 KB) .