INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

2º de Bachillerato

Matemáticas II

Contenidos

Integrales: Aplicaciones. Cálculo de áreas

1. Aplicaciones del cálculo integral

Muchas leyes físicas durante la época griega y romana se fundamentaban con mitos y leyendas, como por ejemplo el origen del sol, gracias al Dios Apolo o que las rachas de vientos eran meros caprichos del Dios Eolo. Gracias al avance de estas ciencias, en ocasiones debido a los descubrimientos matemáticos como las integrales, hemos descubierto leyes físicas y naturales que explican estos sucesos, desde el origen del Sol (antes gracias a Apolo) o la creación de islas o la calma de las mareas (según los griegos, debido a Poseidón).

La siguiente pregunta ¿Qué cae más rápido, un kilo de acero o una pluma? Sin la ayuda de conceptos como la gravedad o las integrales, es imposible responder a esta cuestión.

Aquí puedes ver un vídeo donde apreciarás que ambas cantidades, aunque te parezca increíble, tardarían el mismo tiempo en caer si lo tiramos desde la misma altura en el vacío.

Caída libre en el vacío: demostración

Vídeo alojado en Youtube

1.1. Aplicaciones en Física

Imagen en Wikimedia Commons de [National Maritime Museum, Greenwich]

Galileo Galilei nació en la localidad Italiana de Pisa y entre muchos de sus descubrimientos se destaca la gravedad, pero ¿qué es la gravedad? La gravedad es la atracción o aceleración que ejerce la Tierra sobre los cuerpos que están sobre ella y la aprecias simplemente saltando o dejando caer un objeto. En el caso de la Tierra, la aceleración con la que el planeta atrae a los objetos es 9.8 m/s^2.¿Pero, cómo repercute la aceleración a la caida de los cuerpos? ¿Cuál será la velocidad de una piedra al caer desde "La Giralda", por ejemplo, cuando llega al suelo?

En el anterior vídeo ya has comprobado que si lanzas dos objetos desde la misma altura tardan al mismo tiempo en caer, por lo tanto, la velocidad deberá ser la misma, es decir, debe estar relacionada con la aceleración y el tiempo recorrido es el mismo por lo que el espacio recorrido también debe estar relacionado con la velocidad.

Importante

La velocidad es la integral de la aceleración.

$$v(t)=\int a\,dt=a\cdot t+v_0$$

El espacio es la integral de la velocidad.

$$e(t)=\int a\cdot t+v_0\,dt=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2+v_0\cdot t+e_0$$

Si queremos determinar el aumento de la velocidad ó espacio en un intervalo de tiempo debemos calcular

$$v=\int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt \qquad e=\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

Manuel y Juan son dos alumnos de Bachillerato que realizan una excursión a Granada para conocer algunas de las maravillas que se encuentran en esta ciudad andaluza. En primer lugar, visitan la Alhambra, pero entre sus prioridades se encuentra también la Catedral. Gracias a las gestiones de su profesor, consiguen subir a una de las torres, situadas a 57 metros de altura. Rememorando el experimento de Galileo, dejan caer una piedra.

Su profesor les explica que la velocidad es la integral de la aceleración, por lo que para determinar la velocidad a los dos segundos de ser lanzada, tan solo deben integrar la aceleración entre el instante inicial, es decir, t = 0 y el instante en el que quieren calcular la velocidad, t = 2.

Veamoslo.

$$\int_0^2 9{,}8\,dt = 9{,}8\cdot[t]_0^2 = 9{,}8\cdot 2 - 9{,}8\cdot 0 = 19{,}6m/s$$

Si la función que indica la velocidad es 9,8·t, indica el espacio recorrido desde el momento en el que se lanza la piedra hasta que transcurren 2 segundos.

$$\int_0^2 9{,}8\cdot t\,dt = \frac{9{,}8}{2}\cdot[t2]_0^2 = 4{,}9\cdot 4 - 4{,}9\cdot 0 = 19{,}6m$$

Imagen del Banco de Imágenes del ITE.

Comprueba lo aprendido

Los alumnos se preguntan si los valores de la aceleración y la velocidad coincidirán siempre. Calcula la velocidad a los 3 segundos y el espacio recorrido si la función velocidad es 9,8t en el mismo espacio de tiempo.

- ○ e = 44,1 m, v = 44,1 m/s
- ○ e = 29,4 m, v = 44,1 m/s
- ○ e = 44,1 m, v = 29,4 m/s
- ○ e = 29,4 m, v = 29,4 m/s

Inténtalo de nuevo

Inténtalo de nuevo

Perfecto.

Inténtalo de nuevo.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Ejercicio resuelto

Tras meses de investigación por parte de los ingenieros de una escudería de Formula I, estos han conseguido que el monoplaza consiga una

Imagen tomada del Banco de Imágenes del ITE.

mayor velocidad, siendo la ecuación que regula la velocidad en el momento de la salida v(t) = 5·t +1.

Por otra parte, al estudiar la aceleración en el monoplaza, aprecian que la aceleración al pisar a fondo sobre el acelerador en una recta, viene dada por la función a(t) = 4t+3.

¿Puedes determinar la distancia recorrida al cabo de 5 segundos de la salida? ¿Y el aumento de velocidad, entre los instantes 1 y 2?

Mostrar retroalimentación

Para determina el espacio recorrido a los 5 segundos de la salida, debemos integrar la función velocidad en el intervalo [0,5]

$$e=\int_0^5 (5t+1)\,dt=\left[\frac{5}{2}t^2+t\right]_0^5=(62{,}5+5)-0=67{,}5m$$

Analogamente, para determinar la velocidad, integramos la función aceleración

$$v=\int_1^2 (4t+3)\,dt=\left[\frac{4}{2}t^2+3t\right]_1^2=(14-5)=9m/s$$

Ejercicio resuelto

El guepardo es un felino que destaca por ser unos de los animales más veloces de la Tierra, debido a su anatomía y constitución. Sus largas patas, características no propias de los felinos, la estructura de sus pies y sus uñas propician que la velocidad sea una de las grandes ventajas del guepardo a la hora de cazar.

Tras un estudio de varios zoólogos, llegan a la siguiente conclusión, en el momento que el guepardo visualiza a una presa y corre hacia ella, la función que indica la aceleración del felino es a(t)=4·t.

¿Puedes indicar la velocidad que el guepardo adquiere a los 7 segundos?

Imagen tomada del Banco de Imágenes del ITE.

Mostrar retroalimentación

Para determinar la velocidad, integramos la función aceleración.

$$\int_0^7 4t\,dt=\left[2\cdot t^2\right]_0^7=2\cdot 49=98m/s$$

0

1.2. Aplicaciones en otras áreas del conocimiento

¿Son las integrales algo propio de las matemáticas y la física? Obviamente no, multitud de procesos relacionados con la naturaleza, el medio ambiente, la astronomía o incluso la economía son modelizados gracias a las integrales.

Determinar el reparto de tierras para una herencia o el coste de un motor diésel son situaciones que podemos resolver gracias a las integrales definidas. En este tema vamos a analizar algunas situaciones que son susceptibles de ser resueltas con integrales.

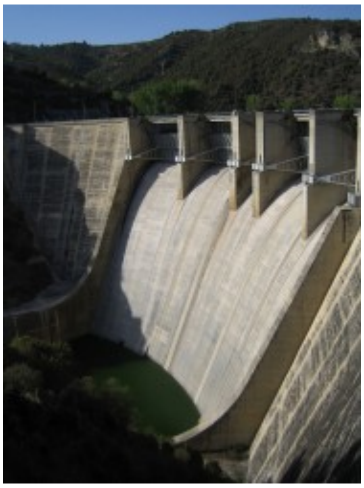


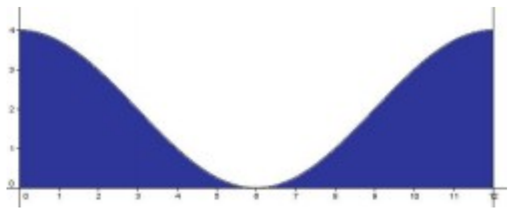
Imagen tomada del Banco de Imágenes del ITE.

Analicemos un problema concreto, el cual, en principio, no guarda relación con la integración, como es determinar el caudal de un río.

Una compañía de electricidad quiere realizar un estudio para construir una central hidroeléctrica. Para ello, realiza estudios en varios ríos, para determinar aquel que mayor caudal tiene y así maximizar los beneficios. Tienen en cuenta que el caudal es la velocidad que lleva el agua de un río, por lo que el caudal en invierno será mayor que en verano y la cantidad de agua durante un periodo de tiempo será el área encerrada entre el eje X y la curva del caudal en el intervalo de tiempo que consideremos.

Una de las opciones que estudia la compañía es construir una presa con su correspondiente central en el río Andarax. Tras el estudio previo llegan a la conclusión que el caudal, en miles de hectolitros y en función del mes del año, viene dado por $f(t)=2+2\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)$.

Analizan la cantidad de hectolitros que pasan durante todo el año por el río y para ello calculan el área encerrada entre el eje X y la función dada.



Calculan la siguiente integral definida $\int_0^{12}\left[2+2\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right]dt=\left[2t+\frac{12\cdot sen(\frac{\pi t}{6})}{\pi}\right]_0^{12}=24$. Por lo tanto pueden afirmar que por el rio Andarax trasncurrirán 24000 hectolitros.

Como indicamos anteriormente, la integración será una herramienta muy útil para muchas ramas de conocimiento, como por ejemplo la economía. Los ingresos o los beneficios de una empresa o los costes de un seguro de coche o del hogar pueden ser estudiados y calculados utilizando técnicas de integración.

Un concepto utilizado en economía es el ingreso marginal, es decir, el ingreso que la compañía percibe al vender una unidad más. Si la función de ingreso es conocido, podemos determinar los ingresos al vender una determinada cantidad si determinamos el área entre la función de ingresos marginales y el eje X.

Ejercicio resuelto

La compañia LumiLumi produce bombillas de alta potencia para la luces de largo alcance de vehículos de gama media. Una empresa dedicada a la fabricación de vehículos le propone la construcción de 6000 bombillas de tipo H4 y tras varios estudios llegan a la conclusión que la función de

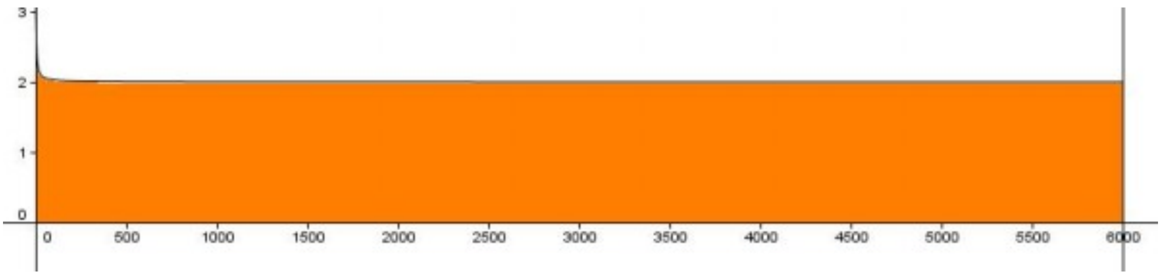
tipo H4 y tras varios estudios llegan a la conclusión que la función de ingresos para este tipo de bombillas se corresponde con la expresión $e(x)=2+\frac{3}{x+1}$.

Fotografía del *Banco de Imágenes* *del ITE.*

Por motivos de stock, los directivos tienen que decidir si construir esta nueva bombilla o seguir construyendo la bombilla X7, cuyos ingresos son de 10000 € por la fabricación de 6000 bombillas. Indica cuál bombilla producirá más ingresos para la compañia.

Mostrar retroalimentación

Para determinar el ingreso en las ventas de la bombilla H4, tan solo debemos integrar la función $e(x)=2+\frac{3}{x+1}$.



$$\int_0^{6000}\left(2+\frac{3}{x+1}\right)dx=\left[2x+3\cdot Ln(|x+1|)\right]_0^{6000}=12000+Ln6001\simeq 12009$$

Ejercicio resuelto

Imagen del *Banco de Imágenes* *del ITE.*

Algunas compañias, como por ejemplo las dedicadas a la explotación de minas, no se vuelven rentables al transcurrir los años. Aquí los ingresos van disminuyendo, ya que el material extraido disminuye con el paso del tiempo y los costes se van incrementando, ya que se dificulta la extracción de material. La función que nos indica el beneficio en un momento puntual es $y = 16 - x^2$ donde x corresponde a los años transcurridos desde la inauguración y f(x) los beneficios obtenidos en cientos de miles de euros.

Determinar en primer lugar el momento en el que los beneficios se hacen nulos y las ganancias obtenidas desde la inauguración hasta ese momento.

Mostrar retroalimentación

En primer lugar debemos determinar el momento en el que la función se convierte en nula. Resolviendo la ecuación $16-x^2 = 0$, podemos determinar que en el cuarto año el beneficio es cero.

Para determinar el beneficio total, integraremos entre 0 y 4 la función de beneficios.

$$\int_0^4 (16-t^2)\,dt = \left[16t-\frac{t^3}{3}\right]_0^4 = 64-\frac{64}{3} = \frac{128}{3}$$

Comprueba lo aprendido

Una empresa de productos ecológicos es propietaria de una finca donde producen melocotones durante todo el año. Obviamente, en los meses de inverno, la producción será menor que en los meses de verano, ya que el melocotonero es un árbol que produce su fruta en mayor medida en los meses de Junio y Julio. La función que regula la producción de melocotones es $y=2-\cos\left(\frac{x\pi}{6}\right)$, donde x representa el mes del año y la variable y, las toneladas recogidas.

Fotografía obtenida del Banco de Imágenes del ITE.

Determina el total de melocotones que se producen en un año.

Sugerencia

- 0
- 6
- 12
- 24

Inténtalo de nuevo

Inténtalo de nuevo

Inténtalo de nuevo

Perfecto!!!

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

2. Cálculo de áreas

¿Qué fue antes el huevo o la gallina? Aunque esta pregunta te parezca tan solo un juego de palabras, ha sigo el germen de grandes cuestiones entre los filósofos, como el origen del universo o de la vida. Paradojas de este tipo puedes encontrar muchas, como por ejemplo, la paradoja del mentiroso. Un hombre dice "Yo estoy mintiendo". Analízala, si dice la verdad, entonces se verifica lo que dice y está mintiendo, pero si miente, lo que dice es falso, luego diría la verdad. Esto es lo que se conoce como una paradoja

Te planteo una cuestión ¿Si la derivada es la inversa de la integración y la integración es la inversa de la derivada? ¿Qué fue primero?

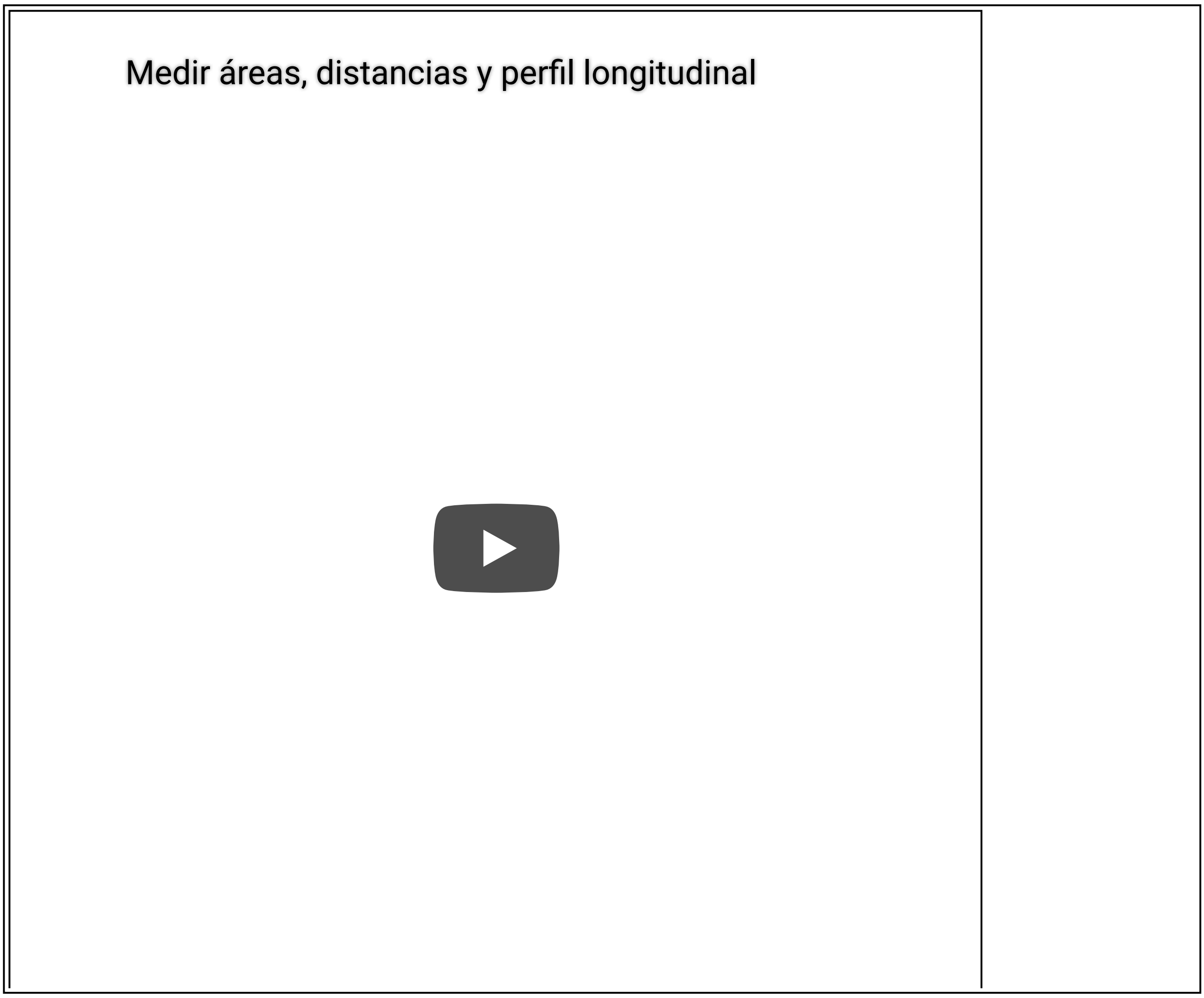
Sin lugar a dudas, inicialmente fue la Integral, pero no como la inversa de ninguna operación, sino como una herramienta para calcular áreas y volúmenes. Un matemático griego, Eudoxio de Cnido, descubrió un método, llamado método de exhausción, germen de lo que hoy conocemos como integrales. Eudoxio descubrió las fórmulas de los volúmenes de las pirámides y de los conos gracias a esta herramienta. Aquí puedes ver un vídeo con ideas básicas del método de exhaución griego.

Método de Exhaución

Vídeo alojado en Youtube

Hoy en día tenemos grandes herramientas para medir superficies, pero detrás de estas herramientas lo que se encuentra es el cálculo integral.

La compañía Google tiene un producto, gracias al cual puedes consultar cualquier mapa o zona del planeta, el conocido Google Map. Existe otra herramienta, menos conocida, con la que puedes calcular áreas de Google Map, se llama Goolzoom. Esta herramienta utiliza la integración de funciones interpoladas, obviamente de un modo oculto al usuario del programa, pero el resultado es el cálculo del área de la zona terrestre deseada.



Medir áreas, distancias y perfil longitudinal

Vídeo alojado en Youtube

2.1. Interpretación geométrica de la integral definida

La semilla del cálculo integral la sembraron matemáticos griegos como Arquímedes y Eudoxio. La idea hoy en día puede parecer básica y sencilla, pero ahí mismo es donde radica su genialidad. Veamos como Eudoxio calculaba áreas encerradas por una función y el eje de abscisas.

Analicemos un ejemplo. ¿Cómo calcularía Eudoxio el área encerrada por la función $f(x) = x^2$ entre los puntos 0 y 3? (Imagen 1)

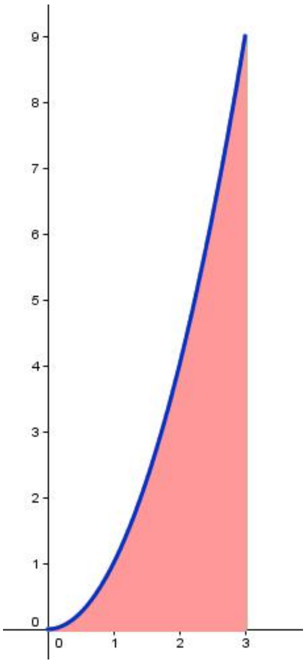


Imagen 1

El método de aproximación por rectángulos ya lo estudiaste en el Tema 2 de esta unidad didáctica, pero realizaremos un pequeño repaso ya es de gran importancia en el tema.

Simplemente vamos a aproximar por rectángulos superiores e inferiores. Obviamente el área es mayor que 0, ya que siempre lo es, pero podemos decir que al área encerrada es menor que el rectángulo que lo engloba, como puedes ver en el dibujo adjunto (Imagen 2). El rectángulo que puedes ver en el dibujo tiene una base con medida 3 y una altura f(3) es decir, 9. Por lo tanto, podemos asegurar que el área encerrada por la curva es menor que el área del rectángulo 3*9=27 (Imagen 2).

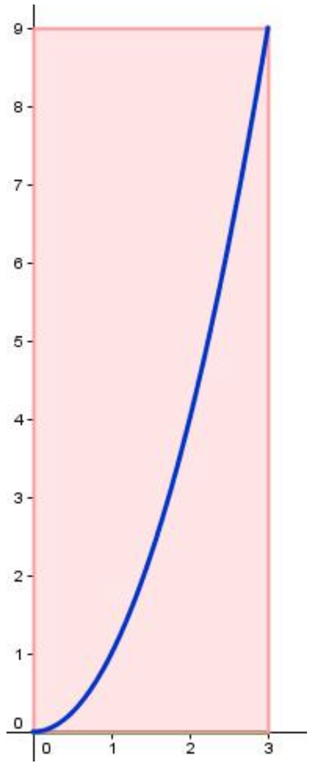


Imagen 2

Esta aproximación del área no es demasiado buena, por lo que podemos ir dividiendo la función en trozos y aproximar por rectángulos, tanto por exceso como por defecto, para aproximar el área encerrada.

Así, encontraremos una cota inferior del área y una cota superior del área y sabemos que el área limitada por la función se encuentra entre ambos valores.

Lo puedes probar con el applet que te mostramos a continuación. Moviendo el punto puedes determinar cuantos rectángulos inferiores y superiores quieres escoger. Al aumentar el número de rectángulos, la aproximación será mejor.

Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC

Si modificas el número de rectángulos puedes apreciar como el valor del área queda más acotado. Sin embargo, nosotros queremos un valor concreto del área, no una aproximación,ya que no sería preciso decir que el área está entre estos dos valores.

Piensa por un momento que tomáramos infinitos rectángulo tan pequeños como se puedan tomar ¿Qué ocurriría con el área? ¿Sería una aproximación ó sería el valor que estamos buscando? Obviamente sería el valor del área encerrada.

Importante

Si f(x) es una función positiva en el intervalo [a,b], el área encerrada por la curva f(x) y el eje x es la integral $\int_a^b f(x)\,dx$

Ejercicio resuelto

En el famoso diario deportivo "MarcAs" aparece el perfil de la tercera etapa de la ruta ciclista "Vuelta a Almeria". La etapa es bastante llana, pero con un puerto al final de esta, La Ragua de 1º Categoria. El perfil de la etapa coincide con una función polinómica $f(x)=x^5-x^2+1$ entre los puntos 0 y 1 . Indica el área coloreada en verde.

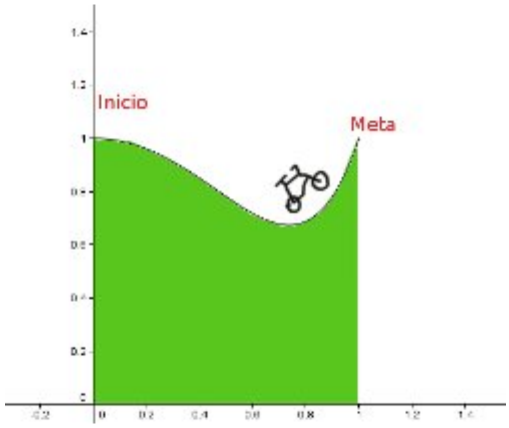


Imagen de elaboración propia

Mostrar retroalimentación

Para calcular el área debemos calcular la integral de la función f(x) entre los valores indicados

$$\int_0^1 (x^5-x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^6}{6}-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{0}{6}-\frac{0}{3}-0\right)=\frac{5}{6}$$

Reflexiona

Imagen de elaboración propia

La obra "Hiperbooool" , de estilo moderno, tiene la característica de ser la representación del área encerrada por la curva $f(x)=x^2-x^4$ y el eje x en el intervalo [0,1]. Un grupo de estudiantes de Bellas Artes se plantean cuál será el valor del área dibujada en color rojo en la pintura. Ayúdales a resolver el problema.

Mostrar retroalimentación

Para calcular el área de la función f(x) entre los valores 0 y 1 tan solo debemos calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$

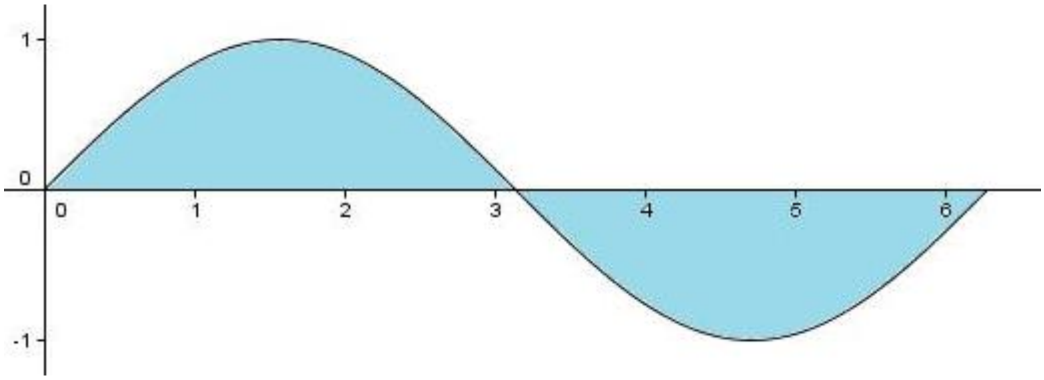
$$\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{0}{3}-\frac{0}{5}\right)=\frac{2}{15}$$

[illegible]

2.2. Área de una región delimitada por la gráfica de una función y el eje de abscisas

Ya conoces las propiedades de una función y las diferentes características que puedes estudiar en ella. Por ejemplo, la monotonía de la función, los máximos, los mínimos... Nos vamos a centrar ahora en una función, la función g(x)=sen(x) y en una de sus características, la periodicidad.

La función seno tiene una especial importancia en matemáticas, en lo que denominamos análisis armónico ¿pero qué es eso? ¿Tiene alguna relación con las armónicas? Pues algo tiene que ver, poco, pero algo si. Con las funciones armónicas podemos estudiar las ondas de sonido emitidas por un emisor (como puede ser una harmónica).



f(x)= sen(x)

Realicemos ahora una actividad análoga a las del apartado anterior y veras un "truco de magia".

Ejercicio resuelto

Determina el área encerrada entre la curva f(x) = sen(x) y el eje x entre los puntos 0 y 2π

Mostrar retroalimentación

Utilicemos el metodo anterior y realicemos la integral de la función entre 0 y 2π

$$\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -1 - (-1) = 0$$

Hemos visto que $\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx = 0$ ¿Qué ocurre aquí? ¿Ha desaparecido el área? ¿Si la he visto en el dibujo anterior?

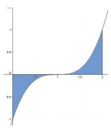
Obviamente, el cálculo de la integral es correcto, sin embargo, el valor resultante es 0. Fijate en el punto anterior, que se indicaba que la función debía ser siempre positiva y esta no lo cumple.

Importante

Para calcular el área comprendida entre el eje x y la función f(x) en el intervalo [a,b]

- Se determinan las soluciones de la función f(x)=0 y se toman las que se encuentren en el intervalo [a,b], por ejemplo c y d
- Se descompone el intervalo [a,b] en varios intervalos [a,c],[c,d] y [d,b]
- Calculamos la integral en cada intervalo y tomamos el valor absoluto.
- Finalmente, sumamos las cantidades para obtener el área final

Ejercicio resuelto



El equipo de metereológos del aeropuerto de Valencia, realizan un estudio de la temperatura en la capital ché y llegan a la conclusión que la temperatura entre las 0 horas y las 2 horas del 24 de diciembre sigue una determinada función polinómica $f(x)=(x-1)^3$.

Pretenden imprimir el gráfico, pero el nivel de tinta azul indica que solo pueden imprimir 2 cm^2. ¿Tendrán suficiente tinta azul?

Mostrar retroalimentación

La solución de la ecuación $(x-1)^3$ se obtiene para x = 1, por lo que calcularemos las integrales.

$$\left|\int_0^1 (x-1)^3\,dx\right| + \left|\int_1^2 (x-1)^3\,dx\right| = \left|\left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_1^2\right| = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Efectivamente, pueden imprimir la gráfica.

Reflexiona

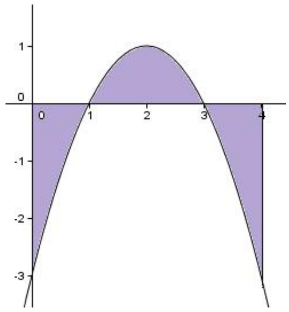
La función que indica el balance en millones de euros de una compañia de alimentación es f(x) = $-x^2+4x-3$ donde x indica el tiempo que transcurre, en años, desde la fundación de la empresa.

fundación de la empresa.

Indica el área que encierra la función indicada desde el comienzo de la empresa hasta el cuarto año.

Imagen obtenida de Fundación Wikipedia

Mostrar retroalimentación



En primer lugar, debemos encontrar las soluciones de la ecuación $-x^2+4x-3 = 0$ y lo resolveremos con la fórmula de resolución de ecuaciones de grado 2, $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, donde a = -1,b = 4 y c = -3, obteniendo como resultado x = 1 y x = 3.

Por lo tanto debemos considerar tres intervalos de integración [0,1],[1,3] y [3,4]

$$\left|\int_0^1 (-x^2+4x-3)\,dx\right| + \left|\int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx\right| + \left|\int_3^4 (-x^2+4x-3)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-3x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-3x\right]_1^3\right| + \left|\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-3x\right]_3^4\right| =$$

$$\left|\frac{-1}{3}+2-3\right|+\left|-9+18-9-\left(\frac{-1}{3}+2-3\right)\right|+\left|\frac{-64}{3}+32-12-(-9+18-9)\right| = \left|\frac{-4}{3}\right|+\left|\frac{4}{3}\right|+\left|\frac{-4}{3}\right| = 4$$

Comprueba lo aprendido

La partícula de una cuerda de un guitarra sigue el comportamiento de una función sinusoidal al ser pulsada, g(x) = 3·sen(2x).

Indica el área que engloba dicha función, junto al eje X entre los puntos 0 y 2π

Sugerencia

Imagen tomada de la Fundación Wikipedia bajo licencia Creative Commons.

- 6
- 0
- 12
- 24

Piensalo mejor!!

Piensalo mejor!!

OK!!!

Piensalo mejor!!

Solución

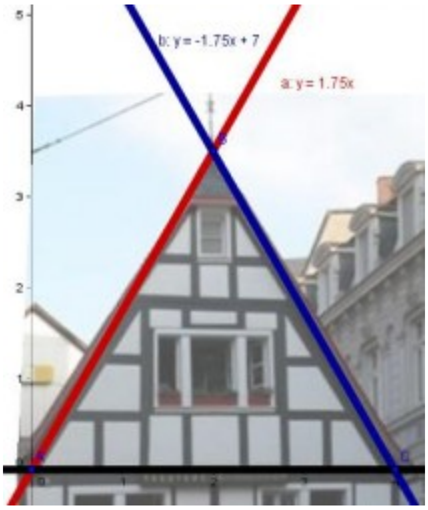
1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Imagen del Banco de datos del ITE.

La arquitectura es una parte fundamental de la cultura de un pueblo. Si viajas por las diversas Comunidades Autónomas de la geografía española, podras observar que nada tiene que una construcción en un pueblo gaditano como Ubrique, con sus casas blancas encaladas con un pueblo gallego como Betanzos, con su gran vegetación y horreos maravillosos. Si no son comparables las arquitecturas urbanas en nuestro pais, imagínate a nivel internacional.

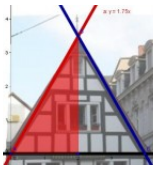
Hoy te presentamos una construcción típica de Alemania, en concreto de Bonn y vamos a intentar calcular el área de la zona superior de la casa.

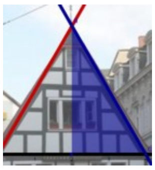
Si el propietario de la casa quiere determinar el área que tiene el triángulo superior, por ejemplo para pedir un presupuesto para pintarlo, tendría dificultad para determinarla. Sin embargo, podemos ayudarnos de las integrales y del análisis para determinarlo.



Gracias a una aplicación informática, podemos apreciar que una parte del tejado corresponde con la función y=1,75x (recta roja) y otra por la función y = -1,75x+7 (recta azul). La pregunta que nos hacemos es cómo calcular el área englobada entre las tres rectas.

Puedes apreciar que si calculamos el área entre la recta roja y la recta que tiene por ecuación la coordenada x del punto de corte de ambas, ya tendríamos calculada parte del área buscada. De forma análoga actuariamos con la recta azul. Puedes verlo en dibujo adjunto.





Por lo tanto, en primer lugar debemos determinar el punto de corte de las dos rectas y = 1,75x e y = -1,75x + 7. Con un simple sistema de ecuaciones, obtenemos que la solución se obtiene para x = 2. Así, integraremos la función y = 1,75x entre [0,2] y la función y = -1,75x +7 entre [2,4] (el valor extremo es 4 ya que es donde la recta y = -1,75x +7 corta al eje X)

$$\int_0^2 1{,}75x\,dx+\int_2^4(-1{,}75x+7)\,dx=\left[\frac{1{,}75x^2}{2}\right]_0^2+\left[\frac{-1{,}75x^2}{2}+7x\right]_2^4=3{,}5+\left[(-14+28)-(-3{,}5+14)\right]=7$$

Por lo tanto podemos decir que el área de la zona superior de la casa es 7m^2.

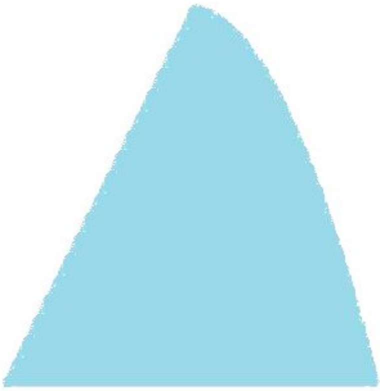
Importante

Para calcular el área de la región formada por dos funciones y el eje x, debemos:

- Realizar un pequeña representación gráfica de las funciones
- Determinar los puntos de corte de las funciones con el eje x
- Calcular los puntos de corte entre las funciones

- Calcular los puntos de corte entre las funciones.
- Fijar los intervalos de integración.
- Determinar que función está relacionada con cada intervalo e integrarlas en ellos.

Ejercicio resuelto



Un cristalero pretende calcular el cristal necesario para realizar una ventana.

Con su camara fotográfica realiza una foto y finalmente lo descarga en el ordenador.

Gracias a un programa, determina que las curvas que generan la ventana son las rectas y = 2x e y = 4-(x-2)^2. ¿Cuál será el área de la ventana indicada?

Mostrar retroalimentación

La recta y =2x corta al eje x en el punto (0,0) y la curva $y=4-(x-2)^2$ en (0,0) y (4,0). Así el intervalo donde integraremos será el [0,4], pero ¿tenemos que dividirlo? ¿En cuantos subintervalos?

Para ello veremos el punto de corte de ambas funciones, resolviendo el sistema formado por la curva y la recta, teniendo como resultado x = 0 (ya calculado previamente) y x=2.

Así, calcularemos la integral entre [0,2] de la función y = 2x y la integral entre [2,4] de la función $y=4-(x-2)^2$

$$\int_0^2 2x\,dx+\int_2^4\left[4-(x-2)^2\right]dx=\left[x^2\right]_0^2+\left[4x-\frac{(x-2)^3}{3}\right]_2^4=4+\left[\left(16-\frac{8}{3}\right)-(8)\right]=4+\frac{16}{3}=\frac{28}{3}$$

Comprueba lo aprendido

El famoso grafitero Vanski,realiza sus obras por todo el mundo y tiene múltitud de seguidores. Entre las características de sus graffitis relacionados con las matemáticas, cabe destacar que el área que engloba en azul

siempre es 3 m^2. ¿Puedes indicar si el graffiti cumple esta condiciones o podemos afirmar que es una falsificación?

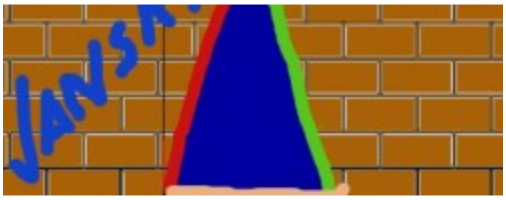


Imagen de elaboración propia

La rama roja corresponde a la funcíón $y = -x^2+4x$,la verde a $y = -x^2+4$ y la blanquecina a $y = 0$.

- ○ Efectivamente , el área es 3
- ○ El área es $\frac{10}{3}$
- ○ El área indicada es 2.
- ○ Es imposible calcular el área.

Inténtalo de nuevo

Perfecto!!

Piensalo mejor...

¿Estás seguro...?

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Imagen en Wikipedia Commons de Maria Reiche.

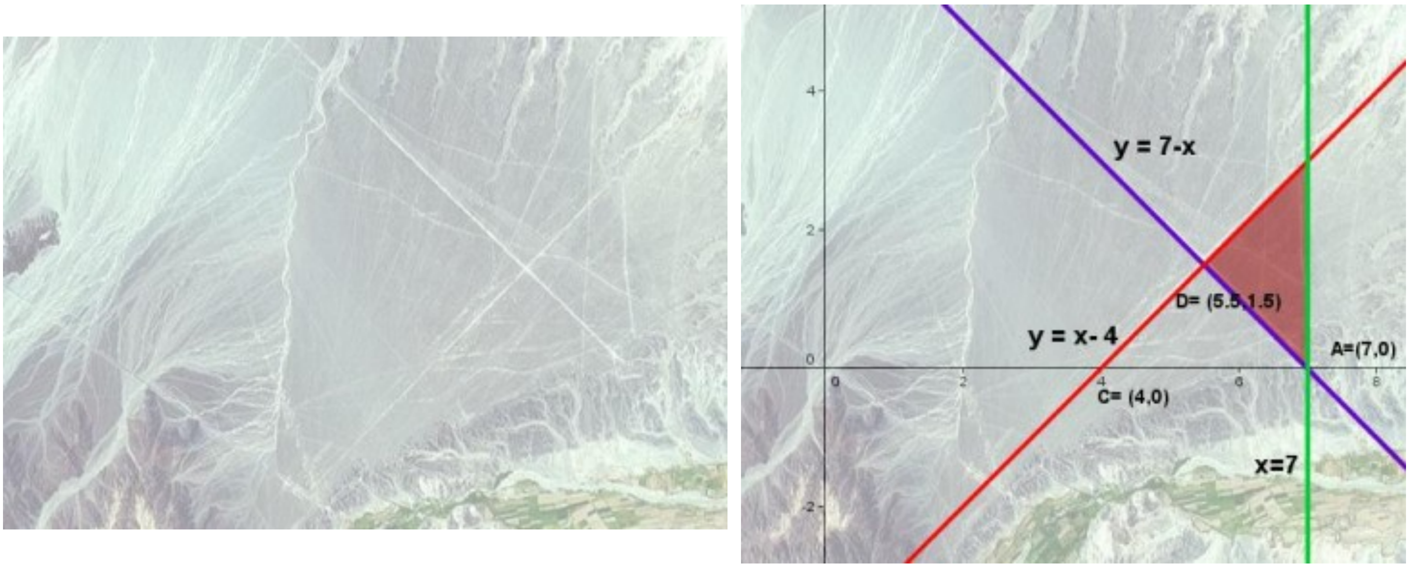
Existen fenómenos que nos parecen inexplicables y que nos cuesta creer, pero, a pesar de los avances tecnológicos, encontramos situaciones que los científicos no pueden explicar. Casos como la construcción de las pirámides, los ovnis o la existencia del monstruo del lago Ness son cuestiones donde la comunidad científica discute sin llegar a un acuerdo unánime de su origen.

Entre muchos de estos misterios, vamos a destacar uno relacionado con lineas, "Las lineas de Nazca". Seguramente recordarás que trabajamos con ellas en la tarea del último tema de la Unidad 3. Estas lineas ubicadas en Perú, algunas con tamaños superiores a un kilómetro, fueron realizadas por la cultura nazca hace miles de años y el método para su construcción es un tema discutido por los científicos. Cabe destacar que su descubrimiento no se realizó hasta que el hombre pudo volar, ya que el gran tamaño de las figuras impide visualizarlas desde tierra.

Imágenes como un mono, una araña, un colibrí o un cóndor son las más famosas y conocidas, pero existen otras figuras con motivos geométricos menos espectaculares pero también muy meritorias.

La gran pregunta que se hacen los investigadores es cómo se pudieron construir estas grandes obras, con lineas perfectamente rectas en algunos casos, con medios tan rudimentarios. En este tema no vamos a analizar la longitud de las rectas pero sí el área que engloban algunas de las figuras de la cultura nazca.

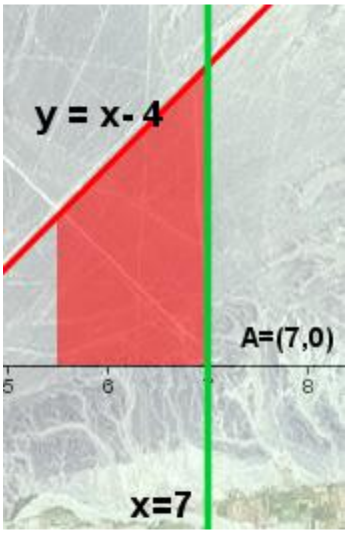
Observemos una de las figuras geométricas y calculemos el área de un triángulo que se aprecia perfectamente en la fotografía.

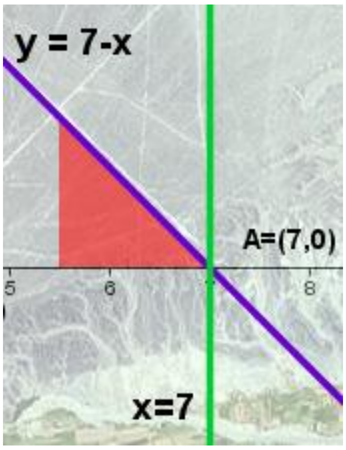


Imagenes tomada y derivada de Wikipedia Commons de NASA/GSFC/MITI/ERSDAC/JAROS, and U.S./Japan ASTER Science Team.

Para calcular el área deseada tan solo deberiamos determinar el área de la función y = x - 4 desde x = 5,5 hasta x = 7 y restarle el área de la función y = 7 - x también desde x= 5,5 hasta x = 7. En la imagen adjunta puedes apreciar las áreas indicadas.

Puedes observar que el primer área representa la expresión $\int_{5,5}^{7} (x-4)\,dx$ con valor 3,375 y el segundo gracias a la integral





$\int_{5,5}^{7} (7-x)\, dx$ con valor 1,125, por lo que el área deseada será 3,375-1,125 = 2,25 u^2.

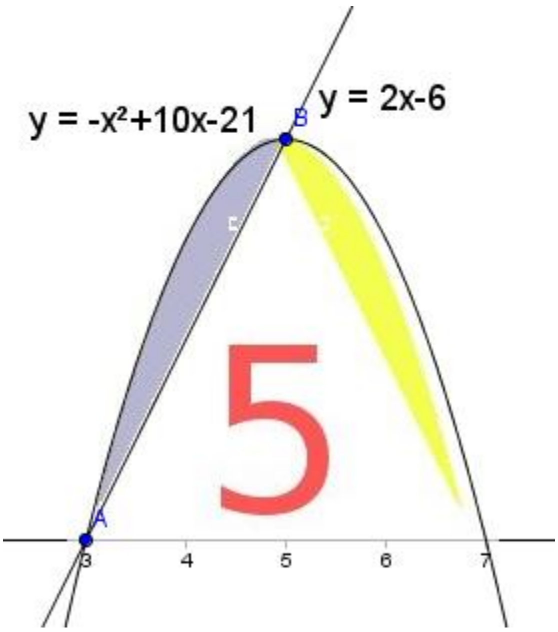
Pero ya sabemos que la resta de las integrales es la integral de la resta, por lo que podemos integrar la función obtenida de restar f(x) = x-4 y g(x) = 7-x.

r(x) = f(x) -g(x) = x -4 - (7-x)= 2x-11

Integrando la función 2x-11 entre 5,5 y 7, obtenemos el mismo resultado

$\int_{5,5}^{7} (2x-11)\, dx$ = 2,25 u^2.

Ejercicio resuelto



Debido a intereses económicos, algunas emisoras de televisión se han visto obligadas a unirse para poder sobrevivir. Como fusión de dos famosas emisoras, se obtiene el resultado de Antena 5. Para conservar el espíritu de ambas cadenas se ha decidido fusionar los logotipos de ambas, obteniendo el resultado que ves aqui.

El logotipo de la cadena de televisión Antena 5, está formado por figuras geométricas. La figura, tal y como puedes observar en el logotipo, está fomada por trozos de rectas y parábolas. Indica el área formada por la parte morada del logotipo.

Mostrar retroalimentación

Si observas la imagen , observarás que que el área que pretendemos calcular se encuentra entre el punto x = 3 y otro que desconocemos. Ese punto desconocido es la intersección entre las funciones y = 2x-6 e y = $-x^2$+10x-21. Resolviendo el sistema de ecuaciones indicado e igualando las variables y llegamos a 2x-6 = $-x^2$+10x-21. Por lo tanto, obtenemos la ecuación x^2-8x+15= 0, cuyas soluciones son x=3 y x=5, que formarán el intervalo donde vamos a integrar nuestra función.

¿Pero cúal será la función a integrar? Como puedes apreciar en la imagen la función y = $-x^2$+10x-21 es mayor en el intervalo [3,5] que y = 2x-6, por lo que tomaremos la función y = ($-x^2$+10x-21)-(2x-6) = $-x^2$+8x-15.

$$\int_3^5 -x^2+8x-15\ dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4x^2-15x\right]_3^5 =$$

$$\left(-\frac{5^3}{3}+4\cdot5^2-15\cdot5\right)-\left(-\frac{3^3}{3}+4\cdot3^2-15\cdot3\right) =$$

$$-\frac{50}{3}+18 = \frac{4}{3}u^2$$

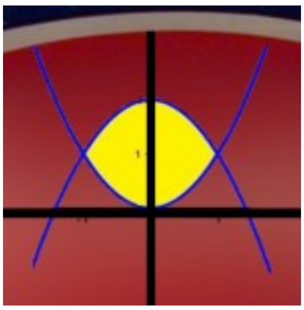
Comprueba lo aprendido

Imagen tomada y transformada del Banco de Imágenes del ITE.

Una productora de zumos ecológicos ha decidido modificar la presentación de su envase de tetrabrik. El modelo elegido es el presentado en la imagen adjunta. Junto al diseño del envase, la compañía también ha cambiado el logo, formado por una combinación de figuras geométricas. La empresa fabricante de envases quiere realizar un encargo de tinta amarilla para imprimir el logo, pero necesita conocer cuantos cm^2 necesita por cada envase.

Analizando el logo, aprecian que es el área formada por dos parábolas, la primera $y = 2-x^2$ y la segunda $y = x^2$ como puedes apreciar en esta otra figura.

Indica, con la ayuda de las indicaciones dadas, el área de la zona amarilla que aparece en el logo.



Sugerencia

- ○ 0
- ○ $\frac{8}{3}$
- ○ $\frac{4}{3}$
- ○ $\frac{5}{3}$

Inténtalo de nuevo.

Perfecto

Inténtalo de nuevo

Inténtalo de nuevo

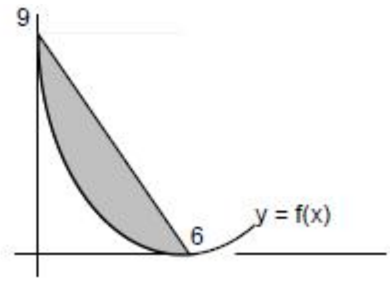
Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Aquí puedes encontrar varios ejercicios propuestos en las pruebas de acceso a la universidad y relacionados con el tema en curso. Espero que te sean de mucha ayuda.

Ejercicio resuelto

La gráfica de la función f de la figura corresponde a una función polinómica de grado 2.



(1) [1’5 puntos] Determina una expresión algebraica de la función f.
(2) [1 punto] Calcula el área de la región sombreada.

Mostrar retroalimentación

(1) Sabemos que la función f(x) es una parábola cuyo vértice es (6,0). Entonces, si la función tiene el vértice en 6, se verificará que $6=\frac{-b}{2a}$, donde la ecuación de la función será ax^2+bx+c. Si la función pasa por el punto (0,9), sustituyendo obtenemos $a*0^2+b*0+c=9$, por lo que c= 9. Por último sabemos también que la función pasa por el punto (6,0).

De forma análoga a*36 + b*6 + 9 = 0, con lo que tenemos un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas b = -6a y 36a+6b= -9. Resolviendo el sistema se calcula, obtenemos $a=\frac{1}{4}$, b= -3 y c=9.

(2) Sabemos que la recta que define el área pasa por los puntos (6,0) y (0,9), por lo que la recta referida será $y=-\frac{3}{2}x+9$. Así, el área engendrada por ambas funciones sera

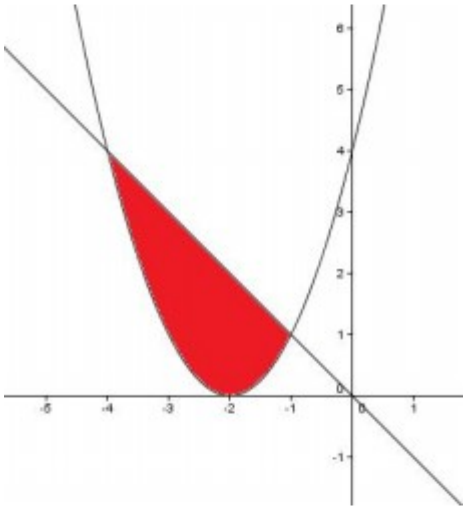
$$\int_0^6 (\frac{-3}{2}x+9)-(\frac{1}{4}x^2-3x+9)\,dx=\int_0^6 -\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x\,dx=(-\frac{x^3}{12}+\frac{3x^2}{4})|_0^6=9$$

Ejercicio resuelto

Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la recta y+x = 0 y la curva de ecuación y = $x^2 + 4x + 4$.

Mostrar retroalimentación

La representación gráfica de la recta y la parábola es



Para determinar el área, debemos calcular en primer lugar los puntos de corte de ambas funciones, resolviendo el sistema y+x=0 , y = $x^2 + 4x + 4$ obtenemos como soluciones x=-4, x=-1.

En segunda lugar integraremos la función (-x)-($x^2 + 4x + 4$), ya que, en el intervalo indicado, la función y = -x es mayor que y =($x^2 + 4x + 4$)

$$\int_{-4}^{-1} (-x-(x^2+4x+4))\,dx = \int_{-4}^{-1} -x^2-5x-4\,dx = \left(-\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Big|_{-4}^{-1} = \frac{9}{2}$$

Ejercicio resuelto

EJERCICIO

(a) [1 punto] Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \frac{9-x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa x = 1 y el eje de abscisas.

(b) [1’5 puntos] Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.

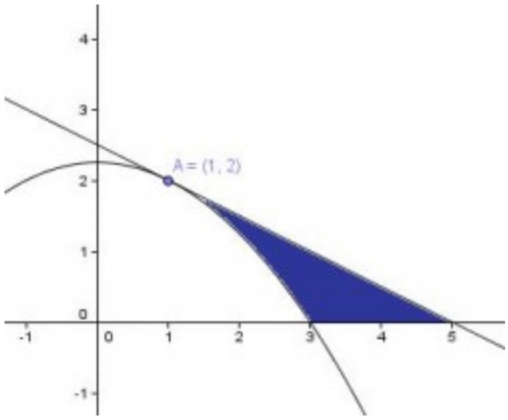
Mostrar retroalimentación

(a) Calculemos en primer lugar la recta tangente en el (1,f(1))= (1,2)

La derivada de la función dada es $f'(x) = \frac{-1}{2}x$, por lo que la pendiente de la recta tangente será $-\frac{1}{2}$. Imponiendo que pase por el punto (1,2) obtenemos que la recta es

$5-x$

$y=\frac{5-x}{2}$



(b)

Área = $\int_1^3 \left(\left(\frac{5-x}{2}\right)-\left(\frac{9-x^2}{4}\right)\right) dx+\int_3^5 \left(\frac{5-x}{2}\right) dx=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$

Comprueba lo aprendido

Calcula el valor de α , positivo, para que el área encerrada entre la curva $y=\alpha x-x^2$ y el eje de abscisas sea 36.

- ○ $\alpha=0$
- ○ $\alpha=-36$
- ○ $\alpha=6$
- ○ $\alpha=1$

Piensalo de nuevo.

Inténtalo de nuevo

Perfecto. Has debido plantear la ecuación $\int_0^\alpha (\alpha x-x^2)dx=36$.

Piensalo de nuevo.

Solución

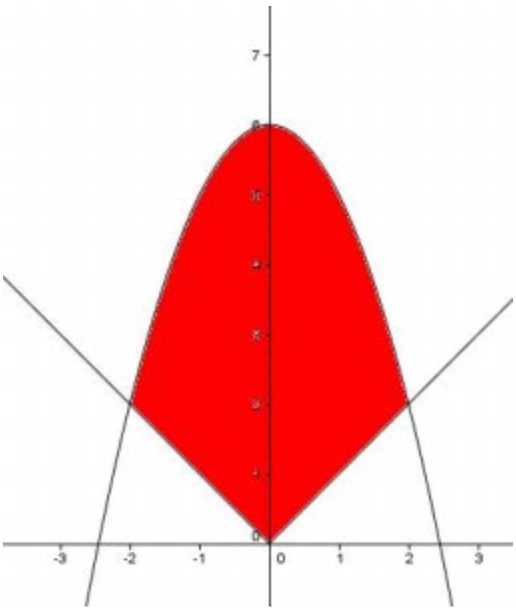
1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Ejercicio resuelto

Considera las funciones f, g, funciones reales $f(x) = 6 - x^2$, $g(x) = |x|$, con x real
(a) [1 punto] Dibuja el recinto limitado por las gráficas de f y g.
(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Mostrar retroalimentación

(a)



(b) Determinemos el área ubicada entre x= 0 y el punto de corte de la párabola con la recta en la parte positiva y multipliquemos por 2 dicha cantidad.

Para determinar el punto de corte, resolvemos $6-x^2=x$, cuya solución positiva es x=2.

$$\int_0^2 (6-x^2-x)\,dx = \left[6x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2})\right]_0^2 = \frac{26}{3}$$

Multiplicando por 2, al ser la función simétrica respecto al eje y, obtenemos $\frac{52}{3}$

Importante

Si f(x) es una función positiva en el intervalo [a,b], el área encerrada por la curva f(x) y el eje x es la integral $\int_a^b f(x)\,dx$

Importante

Para calcular el área comprendida entre el eje x y la función f(x) en el intervalo [a,b]

- Se determinan las soluciones de la función f(x)=0 y se toman las que se encuentren en el intervalo [a,b], por ejemplo c y d
- Se descompone el intervalo [a,b] en varios intervalos [a,c],[c,d] y [d,b]
- Calculamos la integral en cada intervalo y tomamos el valor absoluto.
- Finalmente, sumamos las cantidades para obtener el área final

Importante

Para calcular el área de la región formada por dos funciones y el eje x, debemos:

- Realizar un pequeña representación gráfica de las funciones
- Determinar los puntos de corte de las funciones con el eje x
- Calcular los puntos de corte entre las funciones.
- Fijar los intervalos de integración.
- Determinar que función está relacionada con cada intervalo e integrarlas en ellos.

Integral definida

Presentación de Dulce Nombre Lendínez alojada en SlideShare

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio