MT1 - Tema 2.1: Álgebra: Ecuaciones con una incógnita

Álgebra: Ecuaciones con una incógnita

Matemáticas I	
1.º Bachillerato	Contenidos

Álgebra

Ecuaciones con una incógnita

1. De los números a la letras

En este tema y el siguiente hablaremos de simbolización, del uso de las letras para generalizar a los números, de operaciones con expresiones literales y de ecuaciones, todo esto forma parte del álgebra, una de las áreas de las matemáticas de mayor desarrollo en los últimos siglos. El lenguaje algebraico nos puede ayudar a modelizar matemáticamente situaciones problemáticas de la vida cotidiana, para así encontrar soluciones más eficaces a las mismas.

Su utilidad se basa en las siguientes razones.

- Simplifica notablemente la comunicación : en lugar de un cartel en el que se lea "Cuando llegue usted a este punto debe detenerse", expresamos lo mismo con una señal de STOP.
- Es un lenguaje universal : un español, un japonés o un noruego utilizan diferentes palabras para nombrar al semáforo, o al color rojo, pero todos ellos sabrán lo que tienen que hacer si se encuentran un semáforo en rojo.

En Matemáticas podemos hacer algo parecido utilizando letras en lugar de números. De esta forma conseguiremos obtener fórmulas que nos sirvan para simplificar cálculos, demostrar propiedades que cumplen un conjunto de números (sin tener que hacerlo para cada uno de esos números) y definir regularidades. Todo esto lo veremos en los siguientes apartados.

1.1. Expresiones algebraicas

En este apartado nos vamos a centrar en las fórmulas.

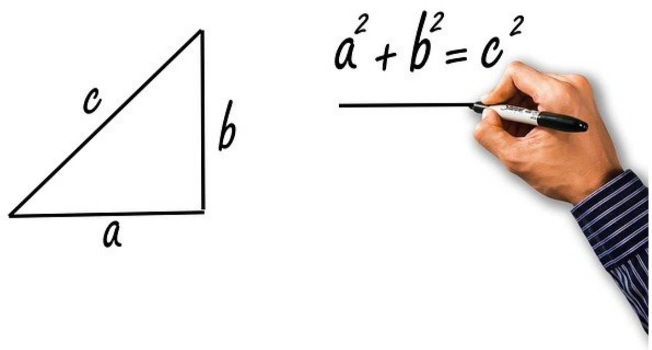
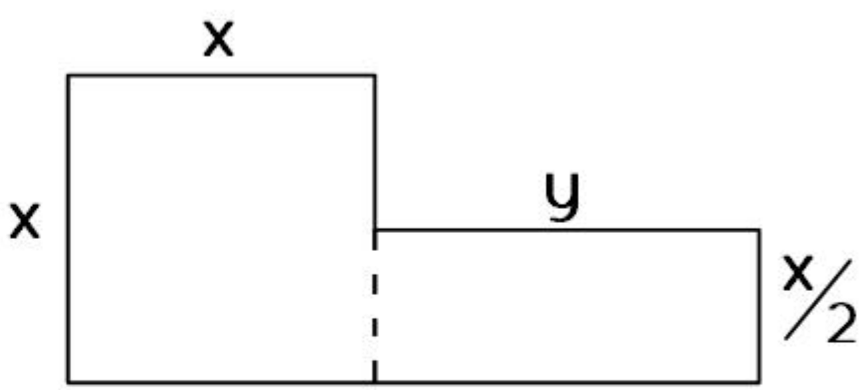


Imagen de Tumisu en Pixabay. Licencia Pixabay

Las primeras fórmulas con las que se suele trabajar en matemáticas son las que están relacionadas con la Geometría (la imagen anterior es la fórmula del teorema de Pitágoras). Por ejemplo, podemos calcular la superficie o el perímetro de una figura aplicando fórmulas que ya conocemos.

Recuerda que la superficie de un cuadrado es la medida del lado elevado al cuadrado, y la del rectángulo es igual a la base por su altura y que el perímetro de una figura es la suma de todos los lados.

Teniendo estos datos, podemos calcular una fórmula para la superficie de la siguiente habitación:



- La parte cuadrada tiene superficie x^2

- La parte rectangular tiene superficie $y \cdot \frac{x}{2} = \frac{yx}{2}$

- Uniendo ambas, tenemos la superficie de la habitación: $A = x^2 + \frac{yx}{2}$

- El perímetro será: $P = x + x + y + \frac{x}{2} + y + \frac{x}{2} + x = 4x + 2y$

Importante

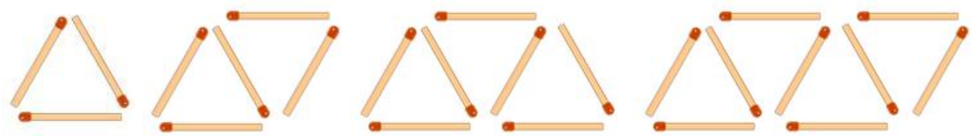
Lo que hemos obtenido en el ejemplo anterior es una Expresión Algebraica , que es aquélla en la que usamos números y letras relacionadas por operaciones matemáticas.

Una vez que tenemos una fórmula, podemos utilizarla para averiguar cuánto valen al cambiar los valores de las variables. A esto lo llamamos valor numérico de una expresión algebraica.

En nuestro caso, podríamos averiguar la superficie y el perímetro de la habitación tanto en el caso de que sea una maqueta como si fuese una casa real, sustituyendo el valor de las variables en la fórmula . Veamos un par de ejemplos:

Variables x , y	Superficie $A = x^2 + \frac{yx}{2}$	Perímetro $P = 4x + 2y$
x = 5 cm y = 8 cm	$A = 5^2 + \frac{5 \cdot 8}{2} = 25 + 20 = 45 cm^2$	$P = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 20 + 16 = 36 cm$
x = 2,5 m y = 4 m	$A = 2{,}5^2 + \frac{2{,}5 \cdot 4}{2} = 6{,}25 + 5 = 11{,}25 m^2$	$P = 4 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 4 = 10 + 8 = 18 m$

Vamos a buscar una fórmula que me diga el número de cerillas que necesito para formar los siguientes triángulos.

	1	2	3	4
Nº de triángulos (n)				
Nº de cerillas (c)	3	5	7	9

¿Cuál es la fórmula que relaciona el número de cerillas con el número de triángulos?

En este caso no son 3 cerillas por cada triángulo. Para el primer triángulo sí se cumple, pero si observas bien, verás que cada figura se obtiene sumando dos cerillas nuevas al anterior:

- $n=1 : c=3$

- $n=2 : c=3+2$

- $n=3 : c=3+2+2$

- $n=4 : c=3+2+2+2$

A partir de aquí tenemos que generalizar: en todos los casos empezamos por 3 cerillas, y luego sumamos 2 por cada nuevo triángulo. En cada caso tenemos (n-1) "nuevos triángulos", es decir, tenemos que sumar el 2, n-1 veces. Ya tenemos la fórmula:$c=3+2\cdot(n-1)$

Comprueba que la fórmula está bien sustituyendo los casos que aparecen en el ejemplo.

Nos están pidiendo que calculemos el valor numérico en cada caso:

- n=1 : c = 3+2·(1-1) = 3

- n=2 : c = 3+2·(2-1) = 3+2·1 = 5

- n=3 : c = 3+2·(3-1) = 3+2·2 = 7

- n=4 : c = 3+2·(4-1) = 3+2·3 = 9

Como puedes comprobar, nos da los mismos resultados que en la tabla.

Calcula cuántas cerillas necesitamos para formar 100 triángulos.

Tenemos que calcular el valor numérico de c para n=100. Sustituimos en la fórmula y obtenemos:

c = 3+2·(100-1) = 3+2·99 = 201 cerillas

Comprueba lo aprendido

Completa los espacios en blanco con la solución correcta.

1. El valor numérico de 4a-2b para a=1 y b=0 es ____ .
2. El valor numérico de x^3-2x para x = -1 es ____ .
3. El valor numérico de x^3+3x-1 para x = 2 es ____ .
4. El valor numérico de $\frac{a\cdot(b+c)}{(c-a)\cdot a}$ para a = 3, b = 4 y c = 5 es ____ .
5. Para que la expresión algebraica 5x+8 valga 3, debe ser x = ____ .

1. 4·1 - 2·0 = 4
2. $(-1)^3-2\cdot(-1)=-1+2=1$
3. $2^3+3\cdot2-1=8+6-1=13$
4. $\frac{3\cdot(4+5)}{(5-3)\cdot3}=\frac{27}{6}=4{,}5$
5. Si x = -1, 5·(-1)+8 = 3

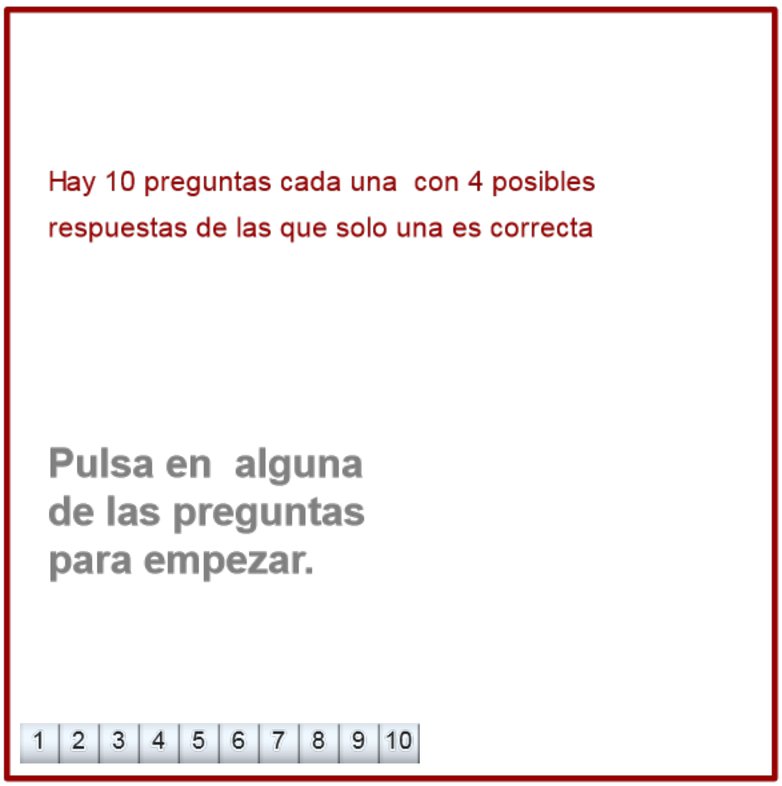
Cuando la expresión algebraica es de estos tipos:

$3xy^2$; $2x^{10}$; $3/4 \cdot x^2 \cdot y^5$

solo con productos de números y potencias de variables de exponente natural, se denomina monomio. La suma de varios monomios es un polinomio.

Comprueba lo aprendido

A continuación, unas preguntas sobre este apartado



1.2. Operaciones con expresiones algebraicas

Ya sabes lo que son expresiones algebraicas y cómo darles valores. Veamos ahora cómo trabajar con ellas. Aprenderás a sumar, restar y multiplicar expresiones.

Suma y resta

Fíjate en la siguiente expresión: $2x - y + 4x + y^2 + 8y - y^2 + 2xy$
Está formada por siete sumandos llamados términos. En cada término (por ejemplo 2xy) podemos distinguir una parte numérica o coeficiente (en nuestro caso 2) y una parte literal (xy).

Los términos que tengan exactamente la misma parte literal son términos semejantes. Ésos serán los que podemos sumar y restar. En nuestro ejemplo encontramos cuatro tipos diferentes de términos semejantes.

$$\boxed{2x}\boxed{-y}\boxed{+4x}\boxed{+y^2}\boxed{+8y}\boxed{-y^2}\boxed{+2xy}$$

La suma y la resta consiste básicamente en "contar" los términos semejantes:

- Término x: 2x + 4x = 6x

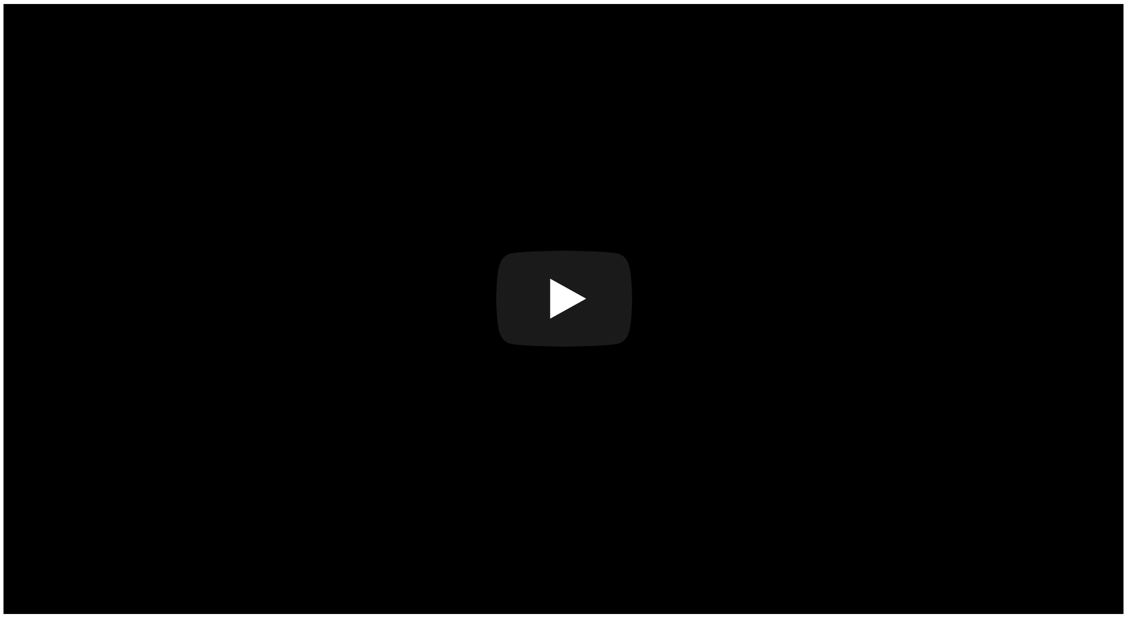
- Término y: -y + 8y = 7y (Recuerda que -y equivale a -1y)

- Término y^2: $y^2 - y^2 = 0$

- Término xy: 2xy

Resumiendo, $2x - y + 4x + y^2 + 8y - y^2 + 2xy = 6x + 7y + 2xy$

Veamos una explicación en el siguiente vídeo:



Vídeo de Tutomate alojado en Youtube

Producto

Para realizar el producto de un término por toda una expresión, multiplicaremos el primero por cada uno de los términos de la segunda expresión. Esto se resuelve multiplicando los coeficientes entre sí, y las variables entre sí. Por ejemplo,

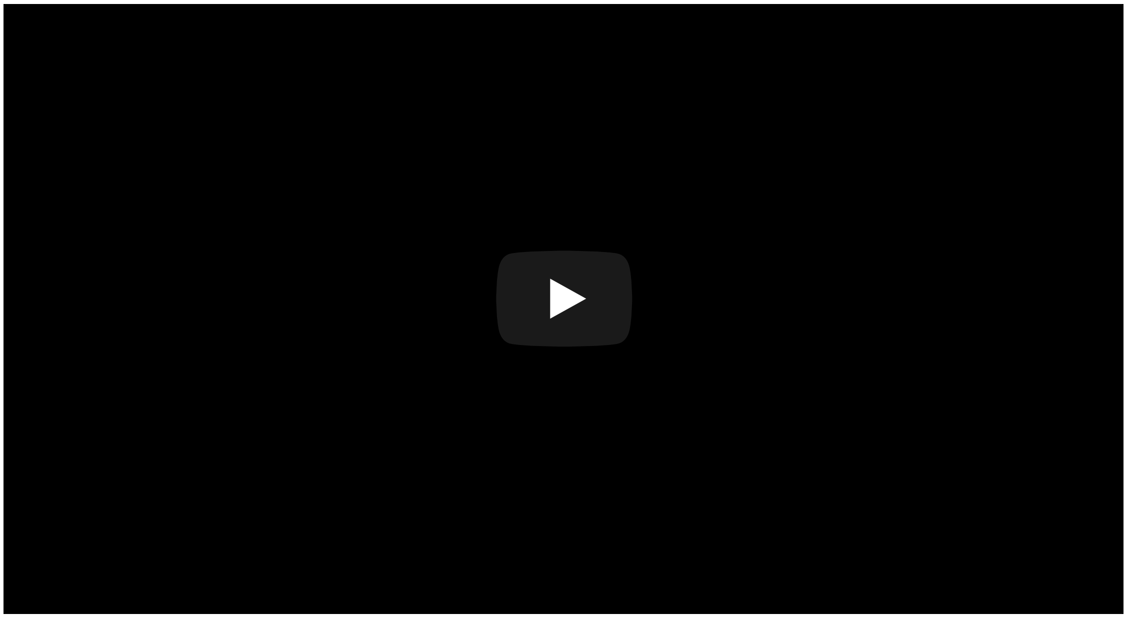
$$2x \cdot (3 - 4x + y) = \boxed{\begin{array}{c} 2x \cdot 3 = 6x \\ 2x \cdot (-4x) = -8x^2 \\ 2x \cdot y = 2xy \end{array}} = 6x - 8x^2 + 2xy$$

Para multiplicar dos expresiones, haremos lo mismo pero multiplicando cada término de la primera expresión por cada uno de los términos de la segunda expresión. Luego sumaremos los términos semejantes para dejar el resultado lo más simplificado posible.

$$(x - 2) \cdot (2x + 3) = \begin{array}{|c|c|} \hline x \cdot 2x = 2x^2 & -2 \cdot 2x = -4x \\ x \cdot 3 = 3x & -2 \cdot 3 = -6 \\ \hline \end{array} =$$

$$= 2x^2 + 3x - 4x - 6 = 2x^2 - x - 6$$

Veamos un vídeo explicativo:



Vídeo de Tutomate alojado en Youtube

Importante

Recuerda que:

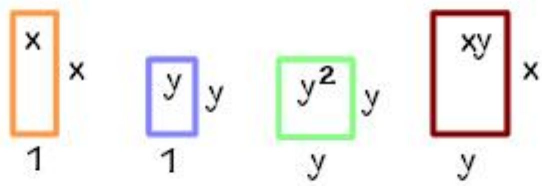
- Si un coeficiente multiplica a una variable, no escribimos el signo de multiplicar: 2·x = 2x
- Si un coeficiente o una variable multiplica a un paréntesis, tampoco es necesario ponerlo: -3·(x+1) = -3(x+1)
- Al multiplicar variables de la misma base, sumamos los exponentes igual que hacemos con los números: $(xy^3)(x^2y^2)=x^3y^5$

Curiosidad

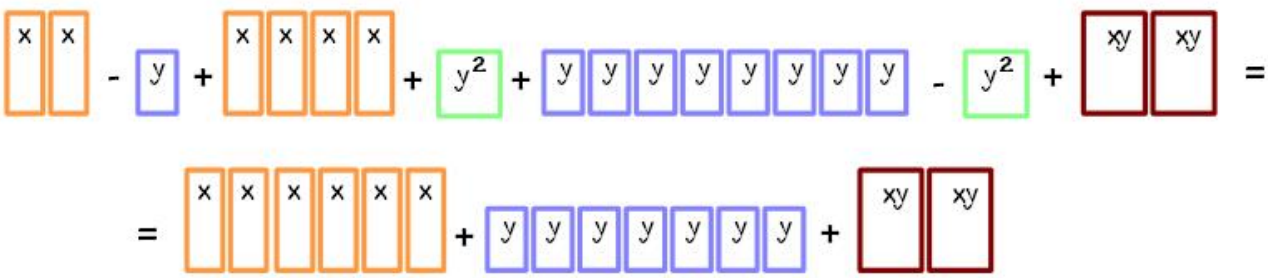
La suma y resta de expresiones algebraicas se puede ver de una forma más visual. Vamos a representar los términos como figuras geométricas. Cada figura tiene la superficie que expresa dicho término.

El término *x* será un rectángulo de base 1 y altura x (y por tanto su superficie vale

1·x=x); el término *y* tendrá base 1 y altura y; para y^2, la base y la altura miden y; el término *xy* tiene altura x, base y.



De esta forma, nuestra expresión quedaría:



Es evidente que no podemos sumar o restar términos que no son semejantes, aunque coincidan algunas variables como en el caso de x + xy.

Productos notables es el nombre que reciben determinadas operaciones con expresiones algebraicas que cumplen ciertas reglas fijas, cuyo resultado se puede escribir mediante simple inspección, sin realizar la operación.

Importante

Hay tres fórmulas que debes conocer. Facilitan las operaciones y te serán de ayuda más adelante.

1. Cuadrado de la suma : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   Por ejemplo, si queremos calcular $(2x+1)^2$, tendremos que sustituir en la fórmula a = 2x y b = 1. Por tanto nos quedará

$$(2x+1)^2 = \underbrace{(2x)}_{a^2}{}^2 + \underbrace{2\cdot 2x\cdot 1}_{2\cdot a\cdot b} + \underbrace{1}_{b^2}{}^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

2. <u>Cuadrado de la diferencia</u> : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplo: $$(x^2-y)^2 = \underbrace{(x^2)}_{a^2}{}^2 - \underbrace{2\cdot x^2\cdot y}_{2\cdot a\cdot b} + \underbrace{y}_{b^2}{}^2 = x^4 - 2x^2y + y^2\ .$$

Observa que sólo queda negativo en la fórmula el término ab, no el b^2.

3. <u>Suma por diferencia</u> : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ejemplo: $$(3x+2y)(3x-2y) = \underbrace{(3x)}_{a^2}{}^2 - \underbrace{(2y)}_{b^2}{}^2 = 9x^2 - 4y^2$$

Comprueba lo aprendido

Utiliza los productos notables para completar los huecos en blanco.

1. $(x+3)^2=x^2+$ ____ $+9$
2. $(2-x)^2=4$ ____ $+x^2$
3. $(x+y)^2=x^2+2xy+y$ ____
4. $(2x-2)(2x+2)=$ ____ x^2- ____
5. $(8x-6)^2=$ ____ $x^2-96x+36$

No olvides los signos

---

3. Ecuaciones

Hay muchas situaciones en las que necesitamos hallar cantidades desconocidas a partir de una serie de datos. Cada cantidad que no conozcamos va a ser una incógnita. En este apartado aprenderás a plantear y resolver ecuaciones en las que sólo tenemos una incógnita, y que casi siempre llamaremos x.

Se suele decir que las matemáticas nos rodean, y en el caso de las ecuaciones es muy cierto. Por ejemplo, para que un aparato de GPS pueda determinar tu posición (incógnita), éste obtiene datos de al menos tres satélites con los que plantea una serie de ecuaciones que determinan la solución.

Imagen de 4657743 en Pixabay. Licencia Pixabay

Otro ejemplo, al programar el termostato del aire acondicionado ¿cuándo debe apagarse y encenderse el equipo para que la temperatura esté según lo deseado? Más ecuaciones...

Aunque hemos dicho que aquí estudiaremos las ecuaciones con una incógnita, en un problema puedes encontrarte con varios datos desconocidos. También veremos que un mismo problema puede tener una, dos soluciones, o puede que ninguna ¡Incluso es posible que tenga infinitas soluciones! ¿Pero sabes exactamente qué es una ecuación? Vamos a dar una definición.

Una ecuación es una expresión algebraica en la que establecemos una igualdad. El signo igual separa la ecuación en dos miembros. Como es una expresión algebraica, estará formada por números, variables y operaciones. En el caso de las ecuaciones, a las variables las llamaremos incógnitas, pues son los valores que queremos descubrir.

$$\underbrace{3(x+1)}_{\substack{Primer\\ miembro}} = \underbrace{2x^2-4}_{\substack{Segundo\\ miembro}}$$

3.1. Ecuaciones de primer grado

Empezaremos resolviendo ecuaciones con una incógnita que además no tenga exponente. Para ello veremos varios métodos, y empezaremos por el más intuitivo: la resolución por tanteo.

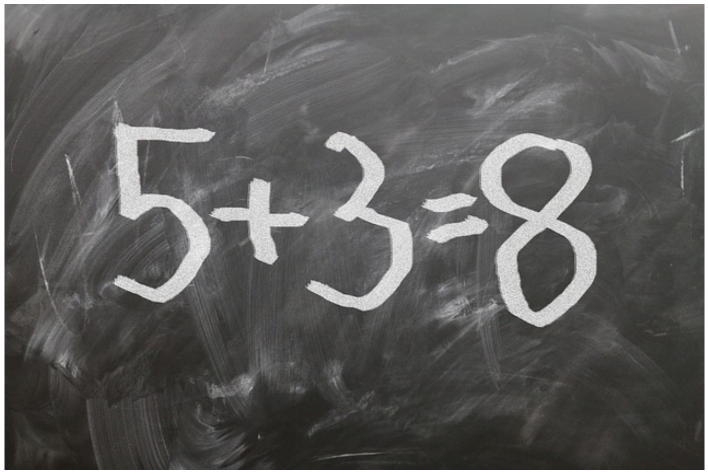


Imagen de geralt en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

Cuando buscamos la solución de una ecuación, lo que queremos es un número que, al sustituirlo por x, verifique la igualdad.

La resolución por tanteo consiste en darle valores a la incógnita x hasta que se igualen ambos términos.

Por ejemplo, supongamos que tenemos la ecuación: $3x - 1 = 11 + x$. Vamos a sustituir x por algunos valores y veamos qué pasa.

Valores	$3x - 1 = 11 + x$	Observaciones
Si $x = 2$	$3 \cdot 2 - 1 = 11 + 2$ $5 = 13$	No se igualan los miembros. Necesito aumentar el valor del primero.

Si x = 4	3 · 4 - 1 = 11 + 4 11 = 15	Sigue sin igualar.
Si x = 6	3 · 6 - 1 = 11 + 6 17 = 17	La solución de la ecuación es x = 6

Comprueba lo aprendido

Resuelve las siguientes ecuaciones por tanteo:

a) $2x+3=13$. La solución es x = ☐

b) $2x-4=8$. La solución es x = ☐

c) $x^2+1=10$. Las soluciones son x = 3 y x = ☐

d) $\frac{x}{3}-1=3$. La solución es x = ☐

No siempre es fácil resolver las ecuaciones por tanteo, así que vamos a ver un método general para resolver cualquier ecuación de primer grado. En realidad es un método que cualquiera usaría para resolver un problema aunque no supiera lo que son las ecuaciones.

Para ver este método usaremos la ecuación: $8x-3(5+x)=7x+21-5x$

Paso 1: ELIMINAR PARÉNTESIS Y DENOMINADORES.

Para ello operamos como en cualquier expresión algebraica, multiplicando el factor que tenga fuera del paréntesis, o usando los productos notables. Ten cuidado con los signos negativos delante de un paréntesis. Cuando termines, simplifica los términos semejantes.

$$8x - 3(5 + x) = 7x + 21 - 5x$$

$$8x - 15 - 3x = 7x + 21 - 5x$$

$$5x - 15 = 2x + 21$$

En el caso de que la ecuación tenga denominadores, reducimos a común denominador todos los términos de la ecuación. Una vez hecho, podemos eliminarlos.

Paso 2: AGRUPAR TÉRMINOS SEMEJANTES

En el caso de que la ecuación tenga denominadores, reducimos a común denominador todos los términos de la ecuación. Una vez hecho, podemos eliminarlos. Lo veremos en el próximo ejemplo.

$$5x - 15 = 2x + 21$$

$$5x \boxed{- 2x} = 21 \boxed{+ 15}$$

$$3x = 36$$

Paso 3: DESPEJAR LA INCÓGNITA .

Dejamos la incógnita sola quitando su coeficiente, que al estar multiplicando, pasa al otro miembro dividiendo, pero sin cambiar de signo .

$$3x = 36$$

$$x = \frac{36}{3}$$

$$x = 12$$

Paso 4: COMPROBAR LA SOLUCIÓN .

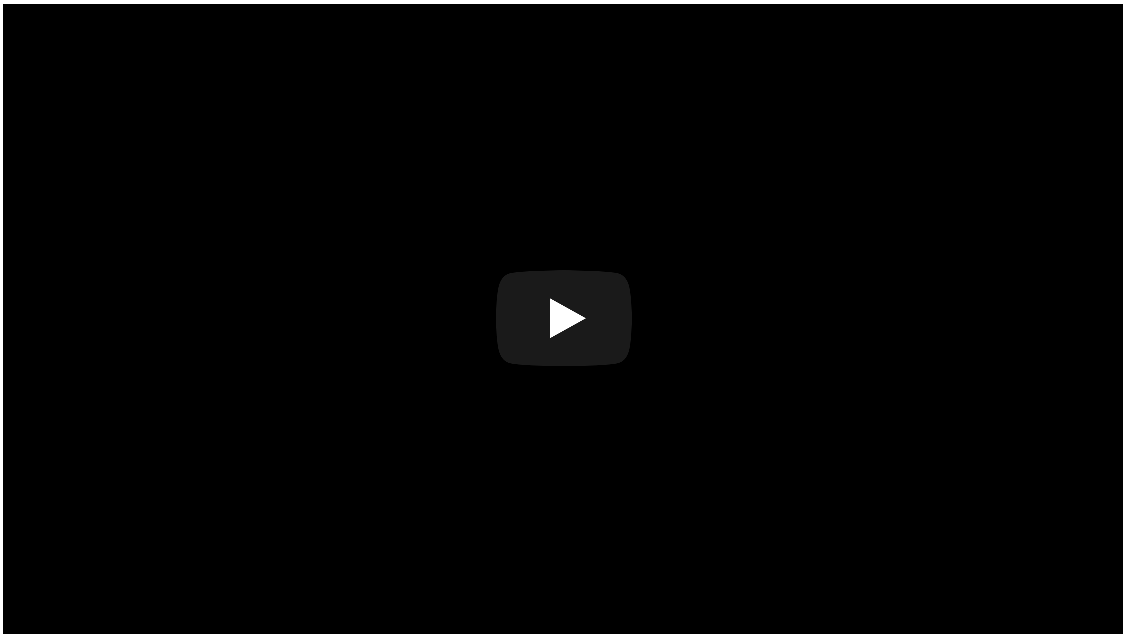
Es bueno comprobar que la solución es correcta. Para ello tomamos la solución y sustituimos x en la primera ecuación por dicho valor.

$$8x - 3(5 + x) = 7x + 21 - 5x$$

$$8 \cdot 12 - 3(5 + 12) = 7 \cdot 12 + 21 - 5 \cdot 12$$

$$45 = 45$$

Veamos un video en el que se explican la resolución de ecuaciones de primer grado sencillas:



Vídeo de Tutomate alojado en Youtube

Ejercicio Resuelto

Intenta resolver la siguiente ecuación paso a paso. Si no sabes seguir, puedes consultar el resultado.

$$1-\frac{x-3}{4}=4x+\frac{3(1-3x)}{2}$$

Paso 1: Quitar paréntesis

$$1-\frac{x-3}{4}=4x+\frac{3-9x}{2}$$

Paso 2: Quitar denominadores

Calculamos m.c.m(2,4)=4, luego hacemos común denominador 4 y cambiamos los numeradores de todos los términos:

$$\frac{4}{4}-\frac{x-3}{4}=\frac{16x}{4}+\frac{6-18x}{4}$$

Una vez hecho, podemos eliminar los denominadores. Ten cuidado, pues un signo negativo delante de una fracción cambia el signo de todo el numerador:

$4-x+3=16x+6-18x$

Simplificamos los términos semejantes,

$7-x=-2x+6$

Paso 3: Agrupar términos semejantes

$-x+2x=6-7$

$x=-1$

Paso 4: Despejar la incógnita

Este paso no es necesario, pues ya la tenemos despejada.

Paso 5: Comprobar la solución

$1-\frac{-1-3}{4}=4\cdot(-1)+\frac{3-9\cdot(-1)}{2}$

$2=2$

Curiosidad

Aunque ya vimos que la notación que usamos hoy en día para escribir en lenguaje matemático es relativamente actual, las ecuaciones se han resuelto desde la civilización egipcia.

En el Papiro de Rhind (1650 a.C.) se resuelven problemas de un modo análogo al que se usa hoy en día. Uno de los problemas que aparece en este documento es "*Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24*"

$$x+\frac{x}{7}=24$$

Los babilonios, unos 1000 años después, se centraron básicamente en las ecuaciones de segundo grado; y entre los griegos, que en general se dedicaron a la geometría, debemos destacar la figura de Diofanto de Alejandría (200 a.C. - 284 a.C.). Diofanto publicó en su obra sus estudios acerca de ecuaciones que tienen soluciones racionales. Como curiosidad, has de saber que su epitafio era un problema que se resuelve con una ecuación de primer grado. Dice así:

"Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa, y cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

Este problema se traduce en la siguiente ecuación, siendo x la edad de Diofanto: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$

3.2. Ecuaciones de segundo grado y racionales

Las ecuaciones de segundo grado ya eran conocidas por las civilizaciones mesopotámicas y los egipcios. Los matemáticos griegos hicieron aportaciones interesantes referentes a su resolución. Los conocimientos sobre estas ecuaciones fueron transmitidos a Europa por los matemáticos árabes del siglo VIII.

Importante

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una igualdad algebraica que se puede expresar en la forma:

$ax^2+bx+c=0$ siendo a,b y c números reales y $a\neq 0$.

- a y b son los coeficientes de la ecuación.
- c es el término independiente .

Si $b\neq 0$ y $c\neq 0$, se dice que la ecuación es completa. Si $b=0$ o $c=0$ la ecuación es incompleta.

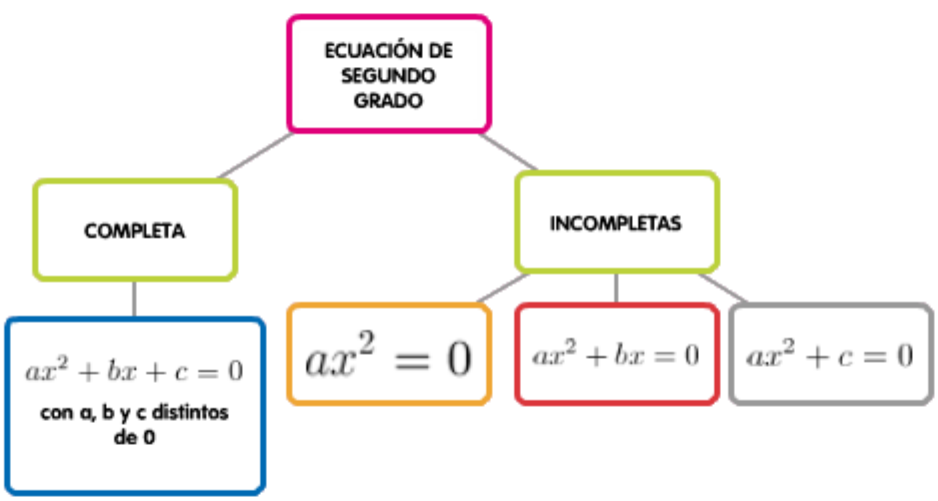


Imagen de elaboración propia

Para resolver una ecuación de segundo grado en principio procedemos como en las de primer grado, quitando paréntesis y denominadores, y buscando una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, donde a, b y c son números reales (si $a=0$ entonces sería una ecuación de primer grado).

Importante

Las ecuaciones de segundo grado pueden tener dos, una, o ninguna solución . Para resolverlas, usaremos la siguiente fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En la fórmula hay una raiz cuadrada que va a ser la que determine el número de soluciones de la ecuación. La expresión a la que calculamos la raiz, b^2-4ac, se llama discriminante . Tendremos los siguientes casos:

1. Si b^2-4ac > 0: La raiz existe, y por lo tanto la ecuación tendrá dos soluciones, una operando con + y otra con -.
2. Si b^2-4ac = 0: La raiz vale 0 y la ecuación tendrá una única solución, x = -b/2a.
3. Si b^2-4ac < 0: La raiz no existe y la ecuación no tiene solución.

Veamos un ejemplo: $6x^2-5x-1=0$

En este caso, será a = 6, b = -5 y c = -1. Si lo sustituimos en la fórmula, nos queda:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot6\cdot(-1)}}{2\cdot6}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{12}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{5\pm7}{12}$$

Obtenemos dos soluciones, una operando con + y otra con -

$x_1=\frac{5+7}{12}=\frac{12}{12}=1$ y $x_2=\frac{5-7}{12}=\frac{-2}{12}=\frac{-1}{6}$

Ejercicio Resuelto

Resuelve la ecuación: $(x+1)^2 - (3x+8) = - (2x+3)^2$

- Quitamos paréntesis:

$x^2 + 2x + 1 - 3x - 8 = -(4x^2 + 12x + 9)$

$x^2 - x - 7 = -4x^2 - 12x - 9$

- Pasamos todos los términos al mismo miembro:

$x^2 - x - 7 + 4x^2 + 12x + 9 = 0$

$5x^2 + 11x + 2 = 0$

- Usamos la fórmula de resolución:

Tenemos a=5, b=11 y c=2, luego:

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{-11 \pm \sqrt{81}}{10} = \frac{-11 \pm 9}{10}$$

$$x_1 = \frac{-11+9}{10} = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5} \text{ y } x_2 = \frac{-11-9}{10} = \frac{-20}{10} = -2$$

Comprueba lo aprendido

Resuelve las siguientes ecuaciones y completa los huecos. Si tiene una única solución, escríbela repetida en cada hueco. Si no tiene solución, escribe no en cada hueco. Los huecos con una barra / entre ambos indican una fracción.

1. $x^2+2x+1=0$ tiene solución ____ y ____
2. $x^2+5x+7=0$ tiene solución ____ y ____
3. $(2x-1)^2=5x-1$ tiene solución ____ y ____ / ____

4. $x^2 - \frac{2x}{3} = \frac{5}{3}$ tiene solución ___ y ___ / ___

¿Qué ocurre si en una ecuación aparece la incógnita en el denominador? A estas ecuaciones se les llaman racionales y el proceso para resolverlas es: quitar denominadres, operar y resolver la ecuación final.

Importante

En las ecuaciones racionales es importante eliminar de las soluciones los valores que anulen el denominador.

Ejercicio Resuelto

Resuelve la ecuación $\frac{6}{x} + \frac{x+1}{x-2} = 6$

Multiplicamos por el mínimo común múltiplo, que en este caso es x(x-2), y simplificamos,

$$\frac{6x(x-2)}{x} + \frac{(x+1)x(x-2)}{x-2} = 6x(x-2)$$

Simplificamos las fracciones y reducimos términos

$$6(x-2) + (x+1)x = 6x(x-2)$$

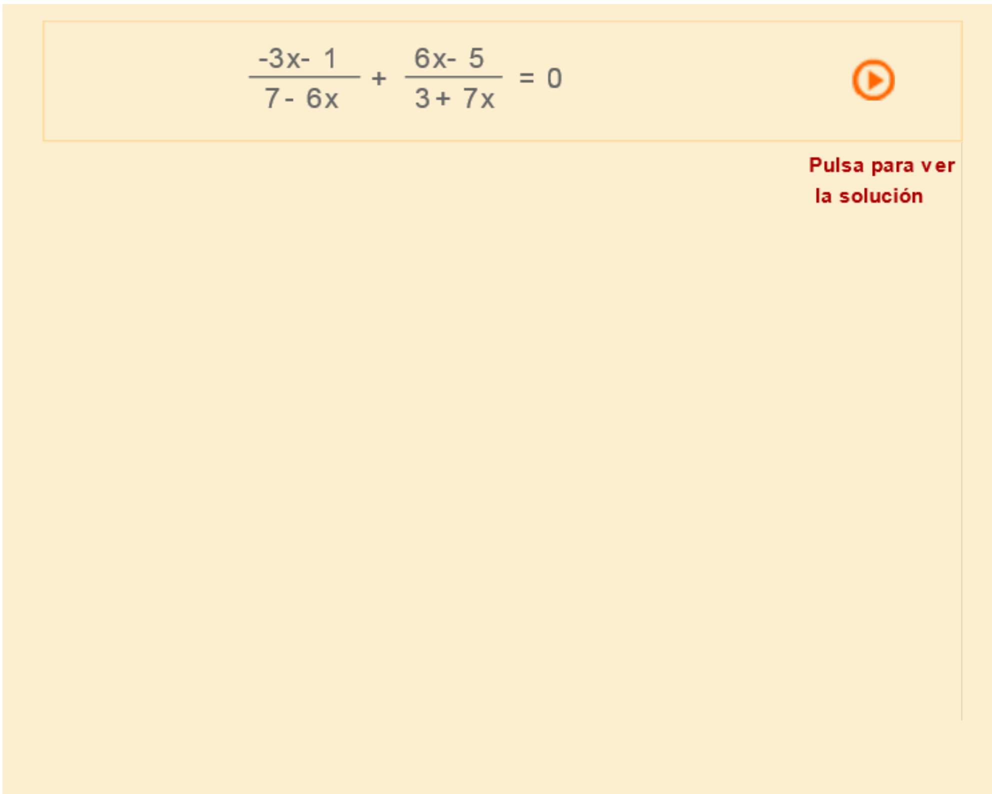
$$6x - 12 + x^2 + x = 6x^2 - 12x$$

$$5x^2 - 19x + 12 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado que hemos obtenido en este caso

$x_1 = 3$ y $x_2 = \frac{4}{5}$

Comprueba lo aprendido



Escena de Miguel Ángel Cabezón Ochoa en Proyecto Descartes. Licencia CC

3.3. Buscando solución a los problemas diarios

¿Sirven las ecuaciones en el mundo que nos rodea?

Ya sea consciente o inconscientemente, resolvemos problemas del día a día por medio de ecuaciones: al comparar productos en el mercado, cuando hacemos viajes, en nuestras cuentas bancarias y al buscar una nueva compañía telefónica.

Imagen de AnnaER en Pixabay. Licencia Pixabay

Vamos a ver algunos tipos de problemas que se resuelven con ecuaciones de primer o segundo grado con una incógnita. Evidentemente no todos los problemas tienen solución, ni todos los podemos solucionar con las herramientas que tenemos hasta este momento, pero ya verás que tan sólo con lo que hemos visto, ya se pueden resolver bastantes situaciones.

Caso práctico

Eligiendo una tarifa telefónica

En mi compañía telefónica me ofrecen una tarifa reducida y una tarifa plana para el móvil. Las condiciones de cada una son las siguientes:

Concepto	Tarifa Reducida	Tarifa Plana

Establecimiento de llamada	15 cént.	15 cént.
Llamadas a móviles de mi compañía	3 cént./min.	19,9€/mes
Llamadas a móviles de otra compañía	30 cént./min	18 cént./min

Mirando las facturas de los últimos meses, he visto que suelo hablar el doble de tiempo con los móviles de mi compañía que con los que son de otra. ¿Cuánto tiempo tengo que hablar para que las dos tarifas me salgan por el mismo precio?

Como el establecimiento de llamada es el mismo en las dos tarifas, y podemos suponer que haré el mismo número de llamadas con ambas, no vamos a considerar este dato. Ten en cuenta que todos los valores los pasaremos a euros. Vamos a plantear el problema paso a paso:

a) Si x es el número de minutos que hablo al mes con los móviles de otras compañías, ¿cuánto me gastaré al cabo de un mes con la tarifa reducida?

Si hablo x minutos con otras compañías y pago el minuto a 0,30€, en total gastaré 0,30x. Como con los móviles de mi compañía hablo el doble de tiempo (2x), con ellos me gastaré 2x·0,03, es decir, 0,06x.

En total gasto 0,30x+0,06x=0,36x al cabo de un mes.

b) ¿Y cuánto gastaré con la tarifa plana en las mismas condiciones?

En este caso en llamadas a otras compañías gastaré 0,18x. En móviles de mi compañía pago una tarifa fija de 19,90, luego el total mensual será de 19,90+0,18x

c) ¿Cuántos minutos he de estar hablando para que me gaste lo mismo con ambas tarifas?

Igualamos los precios mensuales y resolvemos:

0,36x = 19,90 + 0,18x

0,36x - 0,18x = 19,90

0,18x = 19,90

x = 19,90/0,18 = 110,56 minutos

Como x era el número de minutos que hablo con otras compañías y con la mía hablo el doble, en total, para 110,56*3=331,68 minutos mensuales me gasto lo mismo en ambas compañías.

d) Si normalmente hablo menos minutos de lo que me ha dado el resultado anterior, ¿qué tarifa me conviene más?

Para, por ejemplo, x=100, con la tarifa reducida gastaré 0,36·100 = 36€

Con la tarifa plana gasto 19,90+0,18·100 =37,90€

Por tanto, si consumo mensualmente menos de 331,68 minutos, me conviene más la tarifa reducida; pero si consumo más de esta cantidad, me conviene la tarifa plana.

Comprueba lo aprendido

Inversiones bancarias

En la actualidad tengo unos ahorros de 3100€, que me gustaría aumentar a 4340€ en cuatro años para poder realizar ciertas obras. ¿A qué interés simple anual debo invertirlo para obtener dicho capital?

Utilizaremos la fórmula de interés simple: $C_F=C_0(1+0{,}01it)$, donde C_F es el capital final, C_0 el inicial, i es el interés y t el tiempo.

Sustituye los datos del problema en la fórmula: = (1+0,01i·)

Resuelve la ecuación para despejar i. Solución: i = % anual.

Comprueba lo aprendido

Para cambiar el suelo de la cocina tengo dos opciones:

- Las baldosas Terra miden 30 cm de ancho y 40 cm de largo, y cada una tiene un precio de 1,10€.
- Las baldosas Azur miden 20 cm de ancho y 50 cm de largo, y su precio es de 0,95€ por baldosa.

¿Qué superficie tiene la cocina si sé que con las baldosas Terra necesitaría 40 menos que con la Azur? ¿Con qué baldosa me saldría más barato?

a) Si x es el número de baldosas Azur que necesito, del modelo Terra me harán falta ______ baldosas.

b) La superficie que cubro con x baldosas Azur será de ______ cm^2. La superficie con baldosas Terra será ______ (x- ______) cm^2.

c) Como con ambas cubro toda la cocina, plantea la ecuación y calcula el número de baldosas de cada tipo que necesito:

Baldosas Terra: ______

Baldosas Azur: ______

d) El precio más económico lo obtengo con las baldosas ______ , que me costaría en total ______ €

La ecuación es:

1000x = 1200 (x-40)

1000x = 1200x - 48000

200x = 48000

x = 240

En Física, el espacio que recorre un cuerpo que se mueve en linea recta sin variar la velocidad, viene dado por la fórmula e = e_0+vt, donde t es el tiempo y e_0 es el espacio inicial.

Si en ese movimiento lo que permanece constante es la aceleración, entonces tenemos $e=e_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$, donde v_0 es la velocidad inicial, a es la aceleración y t el tiempo.

Si Fernando Alonso entra en una recta del circuito a una velocidad de 15m/s con una aceleración de 6m/s^2, ¿cuánto tiempo tardará en recorrer la recta de 450m? (puedes suponer que e_0=0).

Solución: Tarda ____ segundos.

Sustituyendo en la fórmula nos queda:

$$450=15t+\frac{1}{2}\cdot 6t^2$$

$$3t^2+15t-450=0$$

$$t=\frac{-15\pm\sqrt{5625}}{6}=\frac{-15\pm 75}{6}$$

$t_1=\frac{-90}{6}=-15seg$ (no es válida por ser un tiempo negativo)

$$t_2=\frac{60}{6}=10seg$$

En este vídeo puedes ver la resolución de algunas problemas.

Vídeo de Tutomate alojado en Youtube

Para saber más

Para que puedas practicar los conceptos y procedimientos explicados en el tema te proponemos que visites el siguiente enlace >> Documento de descarga, donde encontrarás gran cantidad de ejercicios resueltos.

Resumen

Importante

Una Expresión Algebraica es aquélla en la que usamos números y letras relacionadas por operaciones matemáticas, siguiendo las siguientes reglas:

- Si un coeficiente multiplica a una variable, no escribimos el signo de multiplicar: 2·x = 2x
- Si un coeficiente o una variable multiplica a un paréntesis, tampoco es necesario ponerlo: -3·(x+1) = -3(x+1)
- Al multiplicar variables de la misma base, sumamos los exponentes igual que hacemos con los números: $(xy^3)(x^2y^2)=x^3y^5$

Importante

Productos notables:

Hay tres fórmulas que debes conocer ya que facilitan las operaciones.

1. Cuadrado de la suma : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Cuadrado de la diferencia : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Suma por diferencia : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Importante

- Ecuación: es una igualdad literal que se verifica para algunos valores determinados de las letras.
- Soluciones de una ecuación: Se llama solución o raíz de una ecuación a los

valores que al sustituirlos en la ecuación la transforman en una identidad numérica.

- Resolver una ecuación: Es hallar el conjunto de todas sus soluciones.
- Comprobar una ecuación: Es sustituir las letras (llamadas incógnitas o variables) por las soluciones y ver si verifica (es cierta) la ecuación.
- Dos ecuaciones son equivalentes, si coinciden los conjuntos de todas sus soluciones.

Importante

Existen distintos tipos de ecuaciones dependiendo de la incógnita. Hablamos por ejemplo de ecuaciones de primer grado, de segundo, y racionales.

Para resolver ecuaciones de primer grado utilizamos el siguiente proceso:

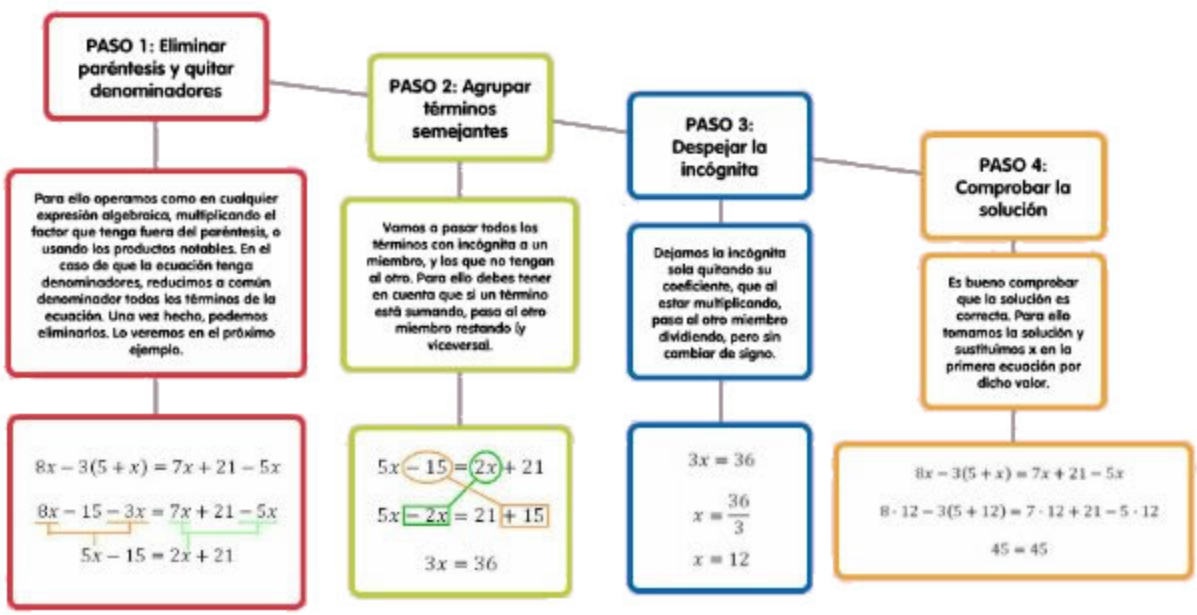


Imagen de elaboración propia

Para resolver ecuaciones dde segundo grado, una vez simplificadas utilizamos la siguiente fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito NDVA.

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y