Análisis I: Funciones elementales II

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

1.º Bachillerato

Contenidos

Análisis I

Funciones elementales II

1. Función exponencial

El nombre de función exponencial viene de exponente, que es el lugar en el que se encuentra la variable independiente.

Es frecuente en los medios de comunicación hablar del crecimiento exponencial. Veamos por ejemplo la cabecera de la siguiente noticia de El País, publicada en la red social Facebook

Captura de pantalla del Facebook de El País

Utilizamos la expresión crecimiento exponencial cuando algo aumenta muy rápidamente.

1.1 Definición y propiedades

Echemos la vista atrás para recordar la fórmula del interés compuesto.

$$C = c \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Si en esta fórmula fijamos r (el interés) y c (el capital inicial), obtenemos una función en la que el capital final (C) depende del tiempo transcurrido (t).

Ejemplo:

Pues bien, vamos a suponer que invertimos 1 euro al 60% de interés y queremos determinar el capital que obtenemos según el tiempo que lo tengamos depositado. Entonces, nuestra fórmula se habrá convertido en:

$$C = 1 \cdot \left(1 + \frac{60}{100}\right)^t = 1{,}6^t$$

Así, podríamos definir una función que me da el dinero obtenido en función del tiempo que dura la inversión. La variable independiente "x" sería el tiempo y la variable dependiente "y", el dinero obtenido, y la relación sería:

$$f(x) = 1{,}6^x$$

Como puedes observar, esta función tiene una forma totalmente distinta de las que hemos visto, pues ahora la variable "x", aparece en el exponente.

Como hicimos con las otras funciones, vamos a hacer una tabla de valores para ver cómo sería la gráfica de esta función:

X tiempo (años)	0	1	2	4	5	10	15

Y Capital (€)	1	1,6	2,56	6,55	10,49	109,95	1152,92

A simple vista, observamos que la función va creciendo, pero de una manera ni mucho menos proporcional, pues conforme van pasando los años, nuestro capital se dispara.

Imagen de PublicDomainPictures en Pixabay. Licencia CC

Importante

Una función exponencial es una función de la forma: $f(x) = \mathbf{a}^{x}$, donde "**a**" es un número real positivo.

Vamos a comenzar viendo lo que tiene que cumplir la base para que de verdad tengamos una función exponencial.

Tú mismo lo vas a descubrir en la siguiente escena.

En esta escena tenemos representada la función $f(x) = a^x$, y a "a" podemos darle distintos valores arrastrando el deslizador. Muévelo y observa lo que pasa con la representación gráfica.

https://www.geogebra.org/material/iframe/id/hY5QbmGx/width/546/height/435/border/888888/smb/false/stb/false/stbh/false/ai/false/asb/false/sri/false/rc/false/ld/false/sdz/false/ctl/f

Como puedes ver, al igual que pasaba con las funciones de proporcionalidad inversa, cuya gráfica era una hipérbola, las funciones exponenciales presentan una asíntota horizontal y son siempre crecientes o decrecientes. Sin embargo, no son funciones simétricas.

Reflexiona

Contesta a las siguientes cuestiones manipulando la escena anterior:

1. ¿Para qué valores de "a", la función es creciente?

2. ¿Para qué valores la función es decreciente?

3. ¿Qué ocurre si a = 1? ¿Y si es igual a 0?

Las respuestas deben coincidirte con estas:

1) La función crece si $a>1$

2) La función decrece si "a" está entre 0 y 1; $0<a<1$.

3) En ambos casos tenemos una función constante, pues 1 elevado a lo que sea siempre es 1 y lo mismo ocurre con 0 pero con exponentes positivo.

Reflexiona

¿Por qué crees que no hemos tenido en cuenta los valores negativos para definir la base de la función exponencial?

Si la **base es negativa**, no hay función exponencial, te da puntos alternados.
-Obtenemos ordenadas positivas si tomas exponentes pares y negativas si tomas exponentes impares.
-Además, si los exponentes son racionales irreducibles de denominador par, el resultado no pertenecería a los números reales.
Por eso, la función exponencial esta definida para que la base sea un número real positivo.

Importante

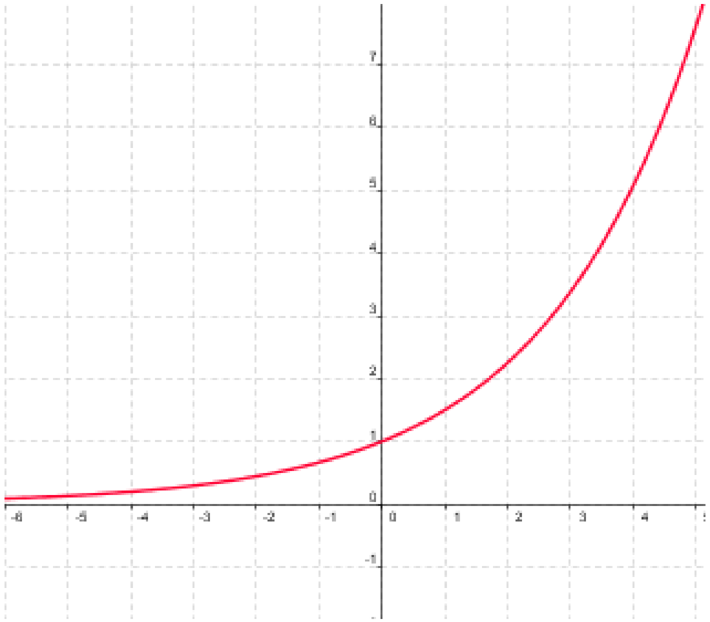
Una función exponencial es una función de la forma

$f(x)=a^x, \ con \ a>0 \ y \ a\neq 1$

La gráfica de la función tendrá una de estas dos representaciones, dependiendo de el valor de la base: Entre cero y uno (0<a<1) ó mayor que uno (a>1)

$f(x) = a^x$, **$0<a<1$**

$f(x) = a^x$, **$a>1$**

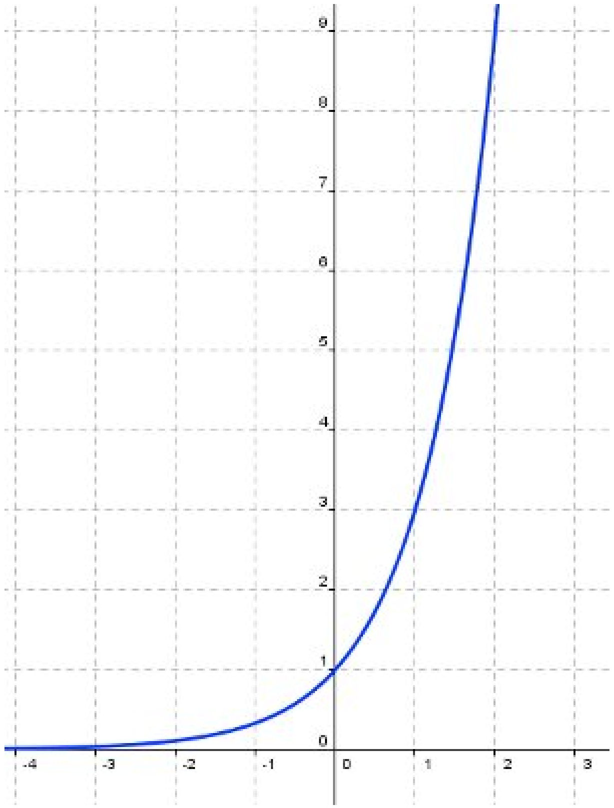


Simplemente observando el gráfico podemos deducir las siguientes propiedades:

1. El dominio es todos los números reales, $Dom(f) = \mathbb{R}$
2. El recorrido, todos los números positivos; $Im(f) = (0, +\infty)$
3. No corta al eje OX y siempre corta al eje OY en el punto (0,1), pues, cualquier número elevado a 0 es 1.
4. La recta y=0 es una asíntota horizontal.

Comprueba lo aprendido

Asocia cada gráfica con su función:

1) 

- $f(x)=1,5^x$
- $f(x)=(-3)^x$
- $f(x)=3^x$
- $f(x)=0,25^x$

Podría ser pero observa que no se ajustaría a la gráfica.

Por ejemplo x=1, f(1)= 1,5 la gráfica representada, no pasa por el punto (1 , 1,5).

Imposible, la base nunca puede ser un número negativo en una función exponencial

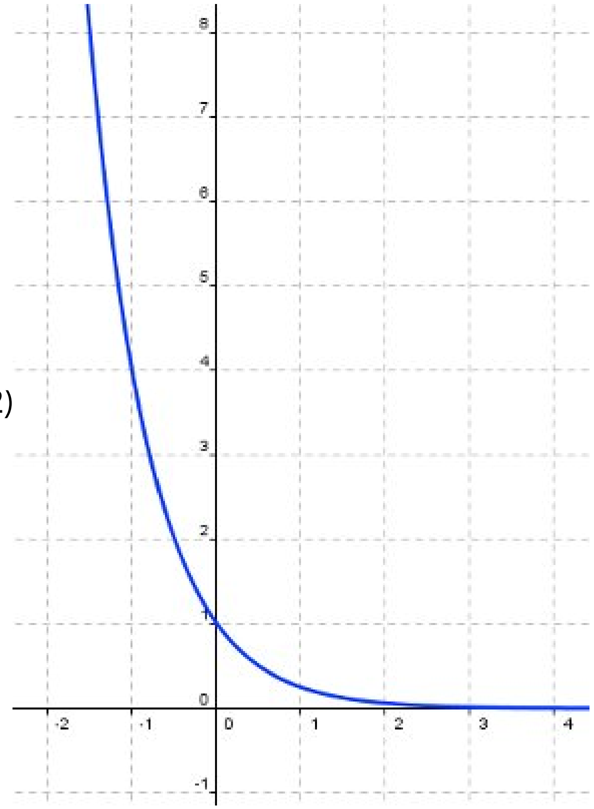
Correcto

La función que aparece en la representación es creciente.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

2)



- $f(x)=1{,}5^x$
- $f(x)=(-3)^x$
- $f(x) = 2{,}5^x$
- $f(x)=0{,}25^x$

La función representada es decreciente y esta es una expresión que corresponde a una función creciente.

Imposible, la base nunca puede ser un número negativo en una función exponencial

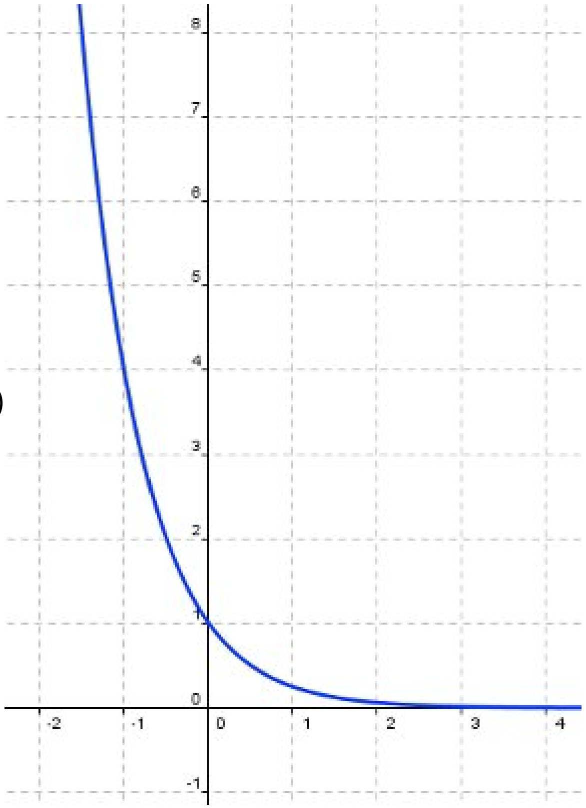
La función representada en la gráfica es decreciente y esta es una expresión que corresponde a una función creciente.

Correcto.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

3)



Sugerencia

- $f(x)=4^{-x}$
- $f(x)=2^{-x}$
- $f(x)=1^{x}$
- $f(x)=0,5^{x}$

Correcto.

$f(x)=4^{-x}$, sería $f(x)=(1/4)^x$, es decir $f(x)=(0{,}25)^x$

$f(x)=2^{-x}$, sería $f(x)=(1/2)^x$, es decir $f(x)=(0{,}5)^x$

No sería una función exponencial, su representación sería una recta horizontal en el 1. (y=1)

Podría ser pero observa que no se ajustaría a la gráfica.

Por ejemplo x=1, f(1)= 0,5 la gráfica representada, no pasa por el punto (1 , 0,5).

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Para saber más

Traslaciones de la función exponencial

Manipulando la siguiente escena del Proyecto Descartes puedes descubrir cómo cambia la función exponencial al realizar traslaciones de la misma o multiplicándola por una constante:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_funciones_elementales-JS-apli/4q10_ejercicios_resueltos_2b.htm

2. Función logarítmica

Hay observatorios dedicados a recoger la intensidad de los terremotos, laboratorios con instrumentos capaces de medir la intensidad del sonido que percibe el oído humano, observatorios astronómicos con avanzados telescopios que captan la débil luminosidad de las estrellas más lejanas... Pero nosotros podemos desarrollar todas estas actividades a la vez, gracias a una herramienta muy particular: **la función logarítmica**.

Para conocer todas las posibilidades que nos ofrece, y repasar el concepto de logarítmico te recomendamos que prestes especial atención al siguiente vídeo:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/BVNl8_9L67k

Vídeo de Victoria Alfosea alojado en Youtube

2.1 Definición y propiedades

Ejemplo:

Vamos a coger una de las funciones del punto anterior, por ejemplo, la función $f(x) = 2^x$.

Cógete la calculadora y construye una tabla de valores para la función. Por ejemplo, algo similar a ésta:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8

Imagínate ahora una función que fuera al revés, es decir, una función que del resultado fuera al valor de partida, por ejemplo, cuando yo le diera el valor 8, ella me diera como resultado 3. Vamos a llamar g(x) a esa función. Así la tabla de valores para g sería la contraria:

x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
g(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3

Pues bien, esa función g(x) que hemos construido, sería la función inversa de la función inicial $f(x) = 2^x$.

Observa la siguiente escena de Geogebra. Puedes modificar la base de la función exponencial y de su inversa (o recíproca) manipulando el deslizador. Fíjate también en que los puntos de la inversa se obtienen intercambiando sus coordenadas:

https://www.geogebra.org/material/iframe/id/HSWjWdQ5/width/620/height/433/border/888888/smb/false/stb/false/stbh/false/ai/false/asb/false/sri/false/rc/false/ld/false/sdz/false/ctl/f

Como puedes ver, pongas la base que pongas, las dos funciones son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante >> Documento de descarga, propiedad que cumplen todas las parejas de funciones inversas.

La expresión analítica de la función g es:

$$g(x) = log_2(x)$$

Y es que, así es como vamos a llamar a esa función inversa (o recíproca), LOGARITMO.

Reflexiona

Contesta a las siguientes cuestiones a partir de la escena anterior:

1. ¿Para qué valores de la base "a" existe la función logaritmo?
2. ¿Cuál es el dominio de la función logaritmo?¿Y el recorrido?
3. ¿Por qué punto pasa siempre?
4. Según el valor de "a", ¿cómo es la función, creciente o decreciente?
5. ¿Hay alguna asíntota?

Las respuestas deben ser estas:

1. La función existe si "a" es positivo y distinto de 1. *(Igual que en la exponencial)*

2. $Dom(f) = (0, +\infty)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$, *(justo al revés que en la exponencial)*

3. Por el punto (1,0). $log_a(1)=0$, pues el número al que hay que elevar una base para que de 1 es cero.

4. Si a>1, la función es creciente y si 0<a<1, la función es decreciente (igual que en la exponencial)

5. Hay una asíntota vertical y es la recta x = 0

Importante

La función logaritmo en base a de x, se define como la función inversa de la función exponencial y= a^x, y se expresa:

$f(x)=log_a(x)$ con a>0 y distinto de 1

Es decir $log_a(x)=y \Leftrightarrow x=a^y$

Propiedades de la función logaritmo:

1. El **dominio** es **R^+**; el **recorrido** es **R**
2. Es **continua** en todo el dominio
3. Si **a>1** la función es **creciente** en todo su dominio
4. Si **0<a<1** la función es **decreciente**
5. Corta al eje OY en el punto **(1,0)**
6. El eje OY es una **asíntota** vertical

Recuerda:
Llamamos **logaritmo decimal** al que tiene por base ***10***, y la forma de escribirlo es: log x
Llamamos **logaritmo neperiano** al que tiene por base ***e***, y la forma de escribirlo es: lnx ó Lx

Pero no es necesario recurrir a la función inversa para poder describir o formar la función logaritmo.
El logaritmo, por sí solo es una operación matemática, y para calcularlo, hay que hallar el número que al elevar la base por él, me dé el argumento del logaritmo. Puedes repasar las propiedades relacionadas con los logaritmos en el siguiente vídeo:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/mkIljguBKx8

Vídeo de estudiia alojado en Youtube

Ejercicio Resuelto

Ahora que ya sabemos calcular cualquier logaritmo, sí que podemos hacer la gráfica de una función logaritmo, sabiendo cómo ha de ser la forma, basta con calcular una tabla de valores para ajustar el gráfico.

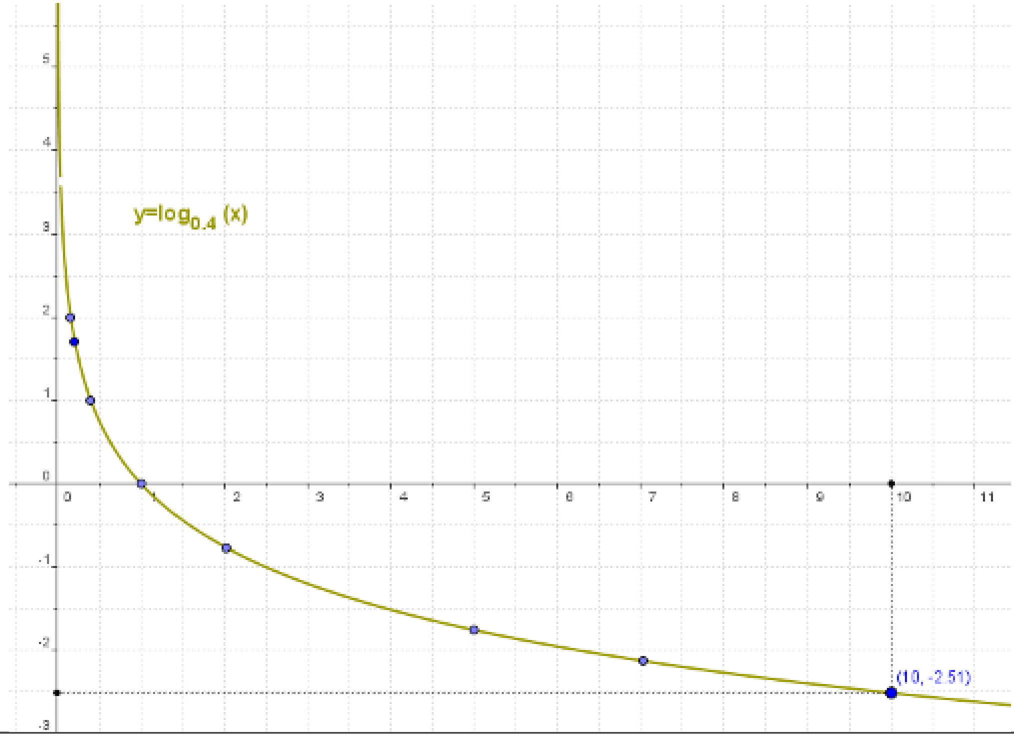
Por ejemplo, vamos a representar gráficamente, la función $f(x)=log_{0,4}(x)$.

Como la base es menor 1, la gráfica tiene que ser decreciente y con una asíntota vertical en x=0 hacia +∞. Además, como toda función logaritmo, ha de pasar por el punto (1,0), según la tercera propiedad de los logaritmos.

Para ajustar la gráfica, hacemos una tabla de valores. Cógete la calculadora y comprueba que los cálculos son correctos:

x	0,16	0,2	0,4	1	2	5	7	10
$y=log_{0,4}(x)$	2	1,76	1	0	-0,76	-1,76	-2,12	-2,5

Representando los puntos y uniéndolos obtenemos la gráfica:

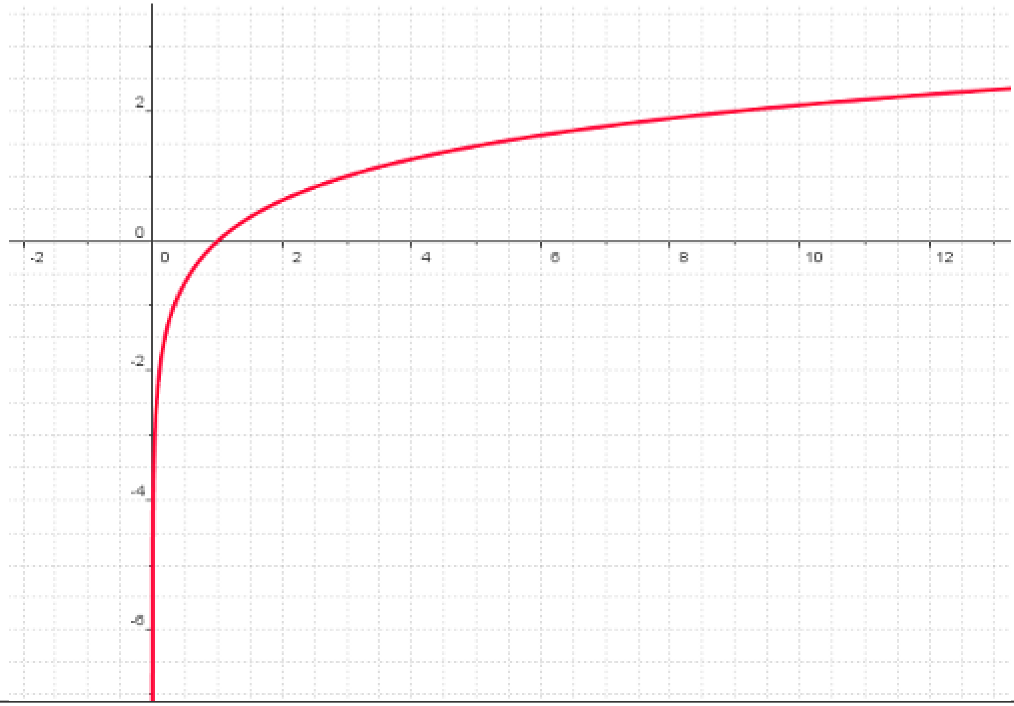


Comprueba lo aprendido

Ahora te toca a ti. Coge lápiz, papel y calculadora y siguiendo el mismo procedimiento representa gráficamente la función:

$$y = log_3(x)$$

Debe salirte una gráfica similar a esta:



Importante

En un logaritmo, el argumento, es decir, el número sobre el que opera siempre tiene que ser positivo.
Así, si en lugar de $\log_a(x)$, tenemos la función $f(x) = \log_a(g(x))$, el dominio será el conjunto de puntos donde $g(x)$ es positivo;

$Dom(f) = \{x \,/\, g(x) > 0\}$

Es decir, cuando el argumento del logaritmo es distinto de la función x, tenemos que estudiar cuándo es mayor que 0.

Ejemplo:

Veamos un ejemplo concreto en el siguiente vídeo:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/nYF6v1wyVQk

Vídeo de lasmatematicas.es alojado en Youtube

Para saber más

Traslaciones de la función logaritmo

En la siguiente escena puedes ver qué ocurre si multiplicamos la función logaritmo por una constante o se la sumamos:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_funciones3-JS-LOMCE/q10_resueltos_3b.htm

Curiosidad

Logaritmo y pH

En la Naturaleza se dan situaciones en las que se tienen que utilizar medidas de órdenes muy diferentes. Por ejemplo, si hablamos del peso de los seres vivos, tenemos que:

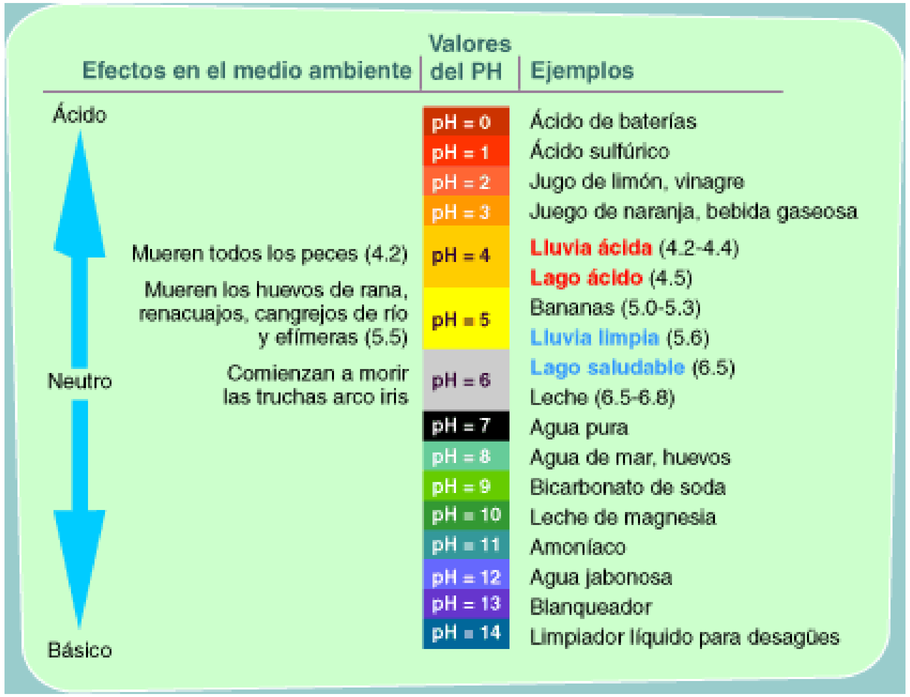
- Un hombre puede pesar 90 kg = 90.000 gr = $10^{4,96}$ gr
- Un rotífero (el menor animal pluricelular): 0,00000000603 gr = $10^{-8,22}$ gr
- Una ballena (el mayor de todos los animales): 120 T = 120.000.000 gr = $10^{8,08}$ gr

Así que si tenemos que referirnos a diferentes animales por sus pesos o hacer una gráfica con los mismos, es un gran inconveniente que haya tan enormes diferencias entre unos y otros. Una solución para abreviar la expresión de esas diferencias es **asignar a cada animal el logaritmo decimal** de su peso.
Así, al hombre le asignaríamos el valor 4,96, al rotífero -8,22 o a la ballena 8,08, cifras en cualquier caso mucho más cómodas de manejar. En este caso, estaríamos usando una escala logarítmica que iría aproximadamente desde -8 hasta 8.

Pues bien algo muy similar se utiliza para asignar la medida del pH de una determinada solución. Seguro que has visto y oído más de una vez eso de "pH neutro" en algún producto de aseo como champú, gel, desodorante,...
El pH es la concentración de iones hidronio [H_3O+] presentes en determinada sustancia. La sigla significa "potencial de hidrógeno".
Este término fue acuñado por el químico danés Sørensen, quien lo definió como el logaritmo negativo de base 10 de la actividad de los iones hidrógeno. Esto es:

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}\left[\mathrm{a}_{H_3O^+}\right]$$

Desde entonces, el término "pH" se ha utilizado universalmente por lo práctico que resulta para evitar el manejo de cifras largas y complejas.
La escala logarítmica del pH va de 0 a 14 en disolución acuosa, siendo ácidas las disoluciones con pH menores a 7, y básicas las que tienen pH mayores a 7. El pH = 7 indica la neutralidad de la disolución (donde el disolvente es agua).
Por ejemplo, los jugos gástricos tienen pH= 1,5, el vinagre 2,9, la leche 6,5, el agua 7, el jabón entre 9 y 10 y el amoniaco 11,5.



Efectos en el medio ambiente
Valores del PH
Ejemplos
Ácido
Neutro
Básico
Mueren todos los peces (4.2)
Mueren los huevos de rana, renacuajos, cangrejos de río y efímeras (5.5)
Comienzan a morir las truchas arco iris
pH = 0
pH = 1
pH = 2
pH = 3
pH = 4
pH = 5
pH = 6
pH = 7
pH = 8
pH = 9
pH = 10
pH = 11
pH = 12
pH = 13
pH = 14
Ácido de baterías
Ácido sulfúrico
Jugo de limón, vinagre
Juego de naranja, bebida gaseosa
Lluvia ácida (4.2-4.4)
Lago ácido (4.5)
Bananas (5.0-5.3)
Lluvia limpia (5.6)
Lago saludable (6.5)
Leche (6.5-6.8)
Agua pura
Agua de mar, huevos
Bicarbonato de soda
Leche de magnesia
Amoníaco
Agua jabonosa
Blanqueador
Limpiador líquido para desagües

3. Funciones irracionales

Ya hemos visto que existen funciones que son inversas como la función exponencial y la logarítmica. Pero, ¿qué ocurre con las funciones polinómicas? ¿Todas tienen inversa? ¿Cuál será su dominio?

Imagen de cocoparisiene en Pixabay. Licencia CC

3.1 Definición y propiedades

Estas funciones, también llamadas irracionales, son las que en su expresión tienen algún radical, es decir, alguna raíz. La más simple, es evidentemente esta:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

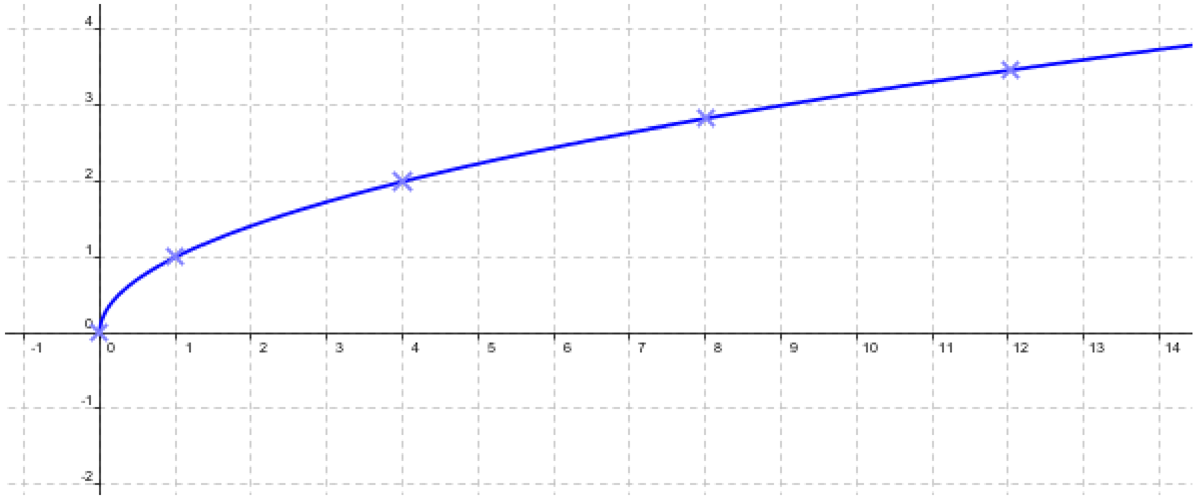
Si queremos ver cómo es la gráfica, basta con que hagamos una pequeña tabla y veamos cómo va evolucionando. Ahora bien, puesto que en los números reales, las raíces negativas no existen, a "x" habrá que darle valores mayores o iguales que cero, es decir, Dom(f) = [0 , + ∞)

Por otro lado, si recuerdas, la raíz cuadrada tiene dos resultados; uno positivo y otro negativo (por ejemplo $\sqrt{9} = \pm 3$), pero para que tengamos una función hemos de quedarnos con un solo resultado; el positivo. Recuerda en la definición de función; "A cada valor de x le corresponde un solo valor de y".

Ahora sí, podemos hacer la tabla:

x	0	1	4	6	8	9	10	12
$f(x) = \sqrt{x}$	0	1	2	2,4	2,8	3	3,2	3,5

Y representando y uniendo los puntos tenemos la gráfica:



En la siguiente escena, representamos la función $f(x)=\sqrt{ax+b}$. Modifica los controles de "a" y "b" y observa lo que ocurre.

https://tube.geogebra.org/material/iframe/id/2053589/width/800/height/438/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/false/smb/false/stb/false/stbh/true/ld/false/sri/true/at/auto

$$f(x) = \sqrt{1}\,x + 6$$

Reflexiona

Contesta a las siguientes cuestiones a partir de la escena anterior:

1. Si multiplicamos x por un número positivo (a>0), ¿la función es creciente o decreciente?
2. ¿Qué ocurre si a "b" le damos un valor positivo? ¿Y si es negativo?

3. Si a = -1 y b = 3, ¿cuál es el dominio de la función? ¿La función crece o decrece?
4. ¿Puede la "x" alguna vez tomar valores negativos? ¿Y la función f(x)?

1. Creciente.
2. Cuando "b" es positivo, si "a" es positivo se desplaza a la izquierda y si "a" es negativo a la derecha. Si "b" es negativo ocurre lo contrario.
3. (-∞,3], que es donde la expresión "-x + 3" resulta mayor o igual que cero. Como "a" es negativo la función es decreciente.
4. x sí puede ser negativa; depende de los valores de a y b; por ejemplo si a =-1 y b =0. La función nunca es negativa, pues estamos considerando la raíz positiva.

Importante

Si tenemos una función de la forma:

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

El dominio de la función es el conjunto de valores donde g(x) es mayor o igual que cero:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$$

Comprueba lo aprendido

Determina el dominio de las siguientes funciones:

$f_1(x) = \sqrt{2x-6}$

$f_2(x) = \sqrt{x^2-3x}$

$f_3(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

$f_4(x) = \sqrt{-x^2+4}$

$f_5(x) = \sqrt{1-4x}$

Las respuestas deben haberte coincidido con estas:

1. [3,+∞)

2. (-∞,0] U [3, +∞)

3. (-∞,+∞)

4. [-2, 2]

5. (-∞, 1/4]

Vamos ahora a ver lo que ocurre con la raíz cúbica.

En las siguientes escenas hemos representado $f(x)=\sqrt[3]{ax+b}$ y $g(x)=\sqrt[3]{ax^2+bx+c}$. Manipula en ambos casos los controles de los coeficientes y observa lo que ocurre.

https://tube.geogebra.org/material/iframe/id/2054091/width/800/height/438/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/false/smb/false/stb/false/stbh/true/ld/false/sri/true/at/auto

https://tube.geogebra.org/material/iframe/id/2054157/width/800/height/438/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/false/smb/false/stb/false/stbh/true/ld/false/sri/true/at/auto

Puedes ver que ahora, el dominio es siempre $\mathbb{R}$, haya dentro de la raíz cúbica lo que haya; y es que, las raíces cúbicas de números negativos sí existen. Un número negativo elevado a 3 da como resultado otro número negativo.

Importante

Para determinar el dominio de una función con **raíz** cuadrada (o cualquiera **de índice par**), hemos de ver dónde lo de dentro de la raíz (radicando) es positivo. Luego la función radical existe en los puntos del dominio del radicando donde éste es positivo:

$$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}, \quad n \text{ } par \quad \rightarrow \quad Dom(f)=\{x \in Dom(g) / g(x) \geq 0\}$$

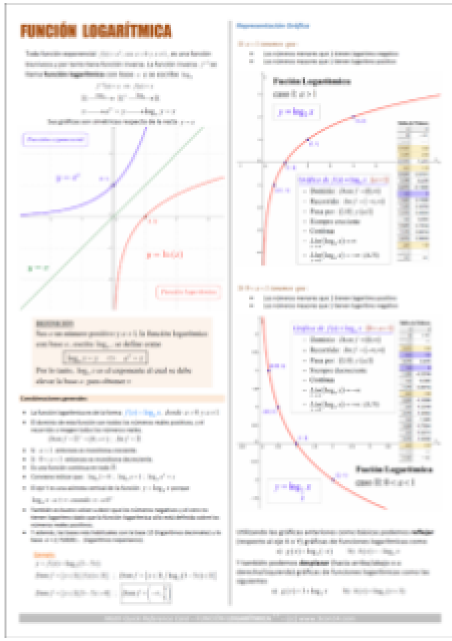
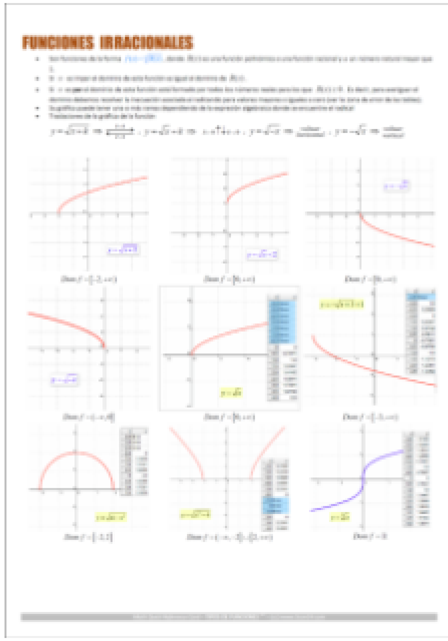
En una **raíz de índice impar** no importa el signo del radicando. En principio, el dominio está formado por todos los números reales salvo que la función de dentro aporte alguna restricción. Es decir, el dominio de la función radical coincide con el dominio del radicando:

$$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}, \quad n \text{ } impar \quad \rightarrow \quad Dom(f)=Dom(g)$$

Resumen

Importante

Pinchando en las siguientes imágenes puedes acceder a resúmenes en pdf de las funciones:

 >> Documento de descarga	 >> Documento de descarga	 >> Documento de descarga
Exponencial	**Logarítmica**	**Irracional**