Suele ser corriente que las personas que vivan en una ciudad con atractivo turístico, no sean conscientes de los monumentos que les rodean y que atraen a multitud de turistas, pues tienen costumbre de convivir diariamente con esos exponentes del arte. En esa línea, a todos nos pasa que muchas veces no nos damos cuenta que vivimos en un mundo de tres dimensiones y las propiedades o características que ello conlleva. Estamos acostumbrados a nuestra arquitectura y pocas veces nos paramos a pensar que estamos rodeados de planos y rectas que están relacionados entre sí. Por la costumbre, no nos llama la atención que nuestras paredes sean verticales y nuestros suelos y techos horizontales, salvo si estamos en una buhardilla o utilizamos una escalera que tenga otra encima.

Por lo anterior, cuando nos encontramos en un lugar que rompe esos esquemas a los que estamos acostumbrados de perpendicularidad y paralelismo nos choca poderosamente esa variación respecto de lo que nos es cotidiano. Para comprobarlo vamos a ver unas imágenes de una película de 1919 dirigida por Robert Wiene y que es una muestra excelente del Expresionismo alemán. Se trata de la película "El gabinete del doctor Caligari". En ella nos pueden llamar la atención las paredes, las puertas o algunas ventanas que son cuadriláteros sin ningún lado paralelo.

1. La relación en el espacio

En muchas situaciones cotidianas es importante la situación en la que nos encontremos. Por ejemplo si estamos en nuestro salón, donde tenemos una tele con una buena pantalla, no es lo mismo sentarnos en un sofá que esté colocado paralelo frente a la pantalla que en uno que esté colocado de forma perpendicular a ella, y por tanto nos encontremos de lado frente al televisor. Lo mismo ocurre si vamos a cualquier espectáculo. Si vamos al futbol no es lo mismo estar detrás de la portería, que en las tribunas o en el voladizo; en un cine, aunque estemos al mismo nivel, no es lo mismo sentarse en medio de una fila de butacas que en el extremo y otro tanto pasa en un teatro. Es decir, la posición en que nos encontremos respecto a un determinado elemento influye.

En este tema lo que vamos a tratar son las posiciones que pueden existir entre los elementos del espacio que tienen alguna dimensión, es decir, entre rectas y planos.

1.1. Entre dos rectas

En el espacio, después de los puntos, los elementos más simples que existen son las rectas. Así que vamos a empezar por estudiar la situación en que pueden estar las rectas. A continuación tienes una ventana en la que están representadas dos rectas. Mueve los puntos P_1 y P_2 y los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ para investigar cuáles pueden ser las posiciones que tienen dos rectas en el espacio.

En la siguiente escena observamos dos vectores V1 y V2 y dos puntos P1 y P2. Hemos construido la recta que pasa por P1 y tiene por vector director V1 y hemos construido la recta que pasa por P2 y tiene por vector director V2.

V1 y V2 son dos vectores linealmente dependientes, es decir V1 se obtienen al multiplicar V2 por un número. Además P1 y P2 están sobre la misma recta. Observamos que las dos rectas son la misma. En la escena puedes mover de sitio el punto P1 y el P2 y observar que si no están sobre esa misma recta, las rectas que se obtienen no son la misma. Puedes cambiar los vectores V1 y V2 y observar que si son linealmente dependientes las rectas son paralelas, y si son independientes, las rectas tienen distinta dirección.

Instrucciones:

- Arrastre el ratón para rotar la figura.
- Arrastre los puntos rojos P1 y P2 con el ratón al igual que los vectores v1 y v2.
- Shift + arrastre vertical = zoom

Importante

Dos rectas en el espacio pueden tener cuatro posiciones relativas:

- Si tienen distinta dirección la rectas pueden:
  - **Cruzarse** en el espacio: cuando no tienen ningún punto en común.
  - **Cortarse** : si tienen un único punto común,
- Si tienen la misma dirección entonces las rectas pueden ser:
  - **Paralelas** : cuando no tienen punto en

Coincidentes : cuando todos los puntos de una pertenecen a la otra.	

Ejemplos de las cuatro posiciones podemos encontrarlos con facilidad en nuestro entorno cotidiano. Imaginemos que vamos circulando por una carretera; si de pronto nos encontramos con otra carretera con la que hay un cruce, con los correspondientes *Stop* o *Ceda el paso* , nos encontramos con dos rectas que se cortan. Precisamente el punto de corte es el cruce. Si por el contrario la carretera cruza a distinto nivel, como pasa por ejemplo en las autovías, tenemos dos rectas que se cruzan.

Si circulamos por una autovía, nosotros marchamos por un carril y los que van en dirección contraria por otro paralelo, estaríamos en el caso de rectas paralelas. Mientras que si circulamos por una carretera comarcal, los dos sentidos circulan por la misma carretera, estaríamos en el caso de dos líneas coincidentes.

Vamos a continuación a estudiar cómo se halla la posición relativa de dos rectas. Consideraremos una recta r que pasa por el punto P y tiene de vector dirección $\vec{v}$ y otra s que pasando por Q tiene de dirección $\vec{w}$. En las siguientes presentaciones tienes dos métodos distintos de hallar la posición. Pulsa sobre ellas para avanzar.

Ejercicio resuelto

Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas. Si alguna de ellas se cortan en un punto, halla dicho punto.

a) $r \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-9} = \frac{z}{-3}$ y $r' \equiv \frac{x+1}{-4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+1}{2}$

Reflexiona

Estudia la posición relativa de las siguientes pares de rectas.

a) $r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y $r' \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-2}$

b) $r \equiv (2,3,1) + t(-1,2,1)$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 3+2s \\ y = 1-4s \\ z = -2s \end{cases}$

Para saber más

Si tomamos un punto cualquiera del espacio y consideramos todas las rectas que pasan por ese punto, al conjunto de rectas que se forman se le llama ***Radiación de Rectas*** .

Si tenemos el punto $P(p_1, p_2, p_3)$, que sería el vértice de esa radiación, la ecuación de este lugar geométrico sería:

Para cada valor que le demos a la terna (a,b,c) obtendremos una recta distinta perteneciente a la radiación.

Después del apartado anterior suponemos que ya te irás situando correctamente en el espacio y aprendiendo a diferenciar cómo pueden estar colocadas las rectas y por qué, por ejemplo, las cuerdas para tender de dos vecinas pueden ser paralelas o cruzarse, nunca cortarse pues sino no podrían tender. Pero vamos a dar ahora el salto a los planos.

Quizás a lo largo de tu juventud tuviste que compartir habitación con alguno de tus hermanos e incluso dormir en literas donde los colchones formaban planos paralelos. Si actualmente tienes pareja, seguramente compartes el mismo plano, llamémoslo colchón, con ella. Y si un día hay discusión y te toca dormir en el sofá te vas a encontrar con dos planos que se cortan en una línea, ese agujero negro donde son absorbidos los pañuelos, monedas, pinzas, tijeras, llaves y cualquier otro elemento que se te escape de las manos o de los bolsillos.

Importante

En el espacio, dos planos pueden tener las siguientes posiciones relativas:

1. **Se cortan en una recta** . Cuando sus vectores de dirección no son linealmente dependientes o sus vectores normales no son proporcionales.
2. **Son paralelos** . Cuando sus vectores de dirección son linealmente dependientes o sus vectores normales son proporcionales, y además ningún punto de uno de los planos pertenece al otro.
3. **Son coincidentes** . Cuando sus vectores de dirección son linealmente dependientes o sus vectores normales son proporcionales, y además cualquier punto de uno de los planos pertenece al otro.

Hay programas que nos permiten dibujar planos y rectas en un espacio tridimensional. Uno de ellos es la calculadora Wiris que puedes encontrar fácilmente en Internet, por ejemplo en la siguiente dirección . Nosotros te hemos incorporado un acceso a la misma en estos contenidos. En la presentación de la derecha puedes ver como representar planos. Basta que vayas pulsando sobre ella.

Utiliza la calculadora para responder a la siguiente autoevaluación.

Considera los siguientes pares de planos.

a) $\begin{cases} 2x+4y-6z=2 \\ -3x-6y+9z=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y-6z=5 \\ -3x+y+2z=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -6x+3y-12z=-12 \\ -2x+y-4z=13 \end{cases}$

1. Los planos que se cortan son los del apartado ☐ .
2. Los planos paralelos son los del apartado ☐ .
3. Los planos coincidentes son los del apartado ☐ .

OJO, escribe sólo la letra sin el paréntesis.

Enviar

Para saber la posición relativa de dos planos, a través de sus ecuaciones, basta estudiar el sistema formado por sus ecuaciones implícitas.

Partimos del sistema $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$ y consideramos la matriz ampliada del sistema

$M_a=\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{array}\right)$. Veamos sus posibilidades.

a) El rango(M_c)=2 el sistema es compatible indeterminado (pues el rango de la matriz ampliada no puede variar), luego los dos planos se cortan en una recta. En este caso las dos filas de la M_c son independientes, se verifica que al menos una de las igualdades entre las fracciones formadas por los coeficientes no es correcta, es decir, se cumple en al menos una que $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$.

b) Si rango(M_c)=1, los dos planos tienen la misma dirección y se verifica $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$.

En este apartado hay dos posibilidades distintas:

1. Si rango(M_a)=2 el sistema es incompatible y los planos son paralelos. Se cumple en este caso que $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{-D}{-D'}$
2. Si rango(M_a)=1 el sistema es compatible indeterminado, hay infinitas soluciones y los planos coinciden. Ahora se cumplen las igualdades $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{-D}{-D'}$

Ejercicio resuelto

Halla la posición relativa de los siguientes planos. Si se cortan en una recta halla la ecuación de la recta intersección.

$\alpha\equiv x+2y-3z+5=0$ y $\beta\equiv -x+y-3z+1=0$

Reflexiona

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de planos.

a) $\begin{cases} 3x-6y+15z+6=0 \\ -2x+4y-10z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-9y+6z=15 \\ 2x-6y+4z=10 \end{cases}$

Para saber más

Si consideramos una recta del espacio y construimos todos los planos que pasan por dicha recta obtenemos lo que se llama una **Haz de Planos** de arista la recta indicada.

Es muy fácil hacerse la idea de lo que es un haz de planos. Piensa en un libro abierto, todas las hojas del libro simulan planos que pasan por una misma recta, lo que sería el lomo del libro. También te pueden dar ideas de haces de planos las puertas giratorias de algunos hoteles

Si tenemos la recta $r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$, hallar la ecuación del haz de planos que pasan por ella es muy fácil, basta hallar una combinación lineal de ambos planos, es decir, la expresión

$$\alpha\cdot(Ax+By+Cz+D)+\beta\cdot(A'x+B'y+C'z+D')=0$$

nos da un haz de planos.

Para cada valor que le demos a α y a β obtendremos un plano que pasa por la recta r.

Ya hemos visto las posiciones relativas de dos elementos del espacio cuando son iguales. ¿Qué pasará si elegimos uno de cada tipo? Pues que las posiciones relativas serán las mismas que en el caso del plano. Imagina un lanzador de jabalina. Si hace bien el tiro, al terminar la jabalina quedará clavada sobre el suelo, si se equivoca la jabalina quedará sobre el plano del suelo y cuando la ha lanzado, habrá momentos en que la jabalina esté paralela al suelo.

Antes de ver los casos los vamos a comprobar gráficamente. En la siguiente escena de Descartes puedes escribir la ecuación de un plano de coeficientes Ax+By+Cz+D=0 (el plano verde que aparace en la imagen) y una recta indicando las coordenadas del punto P y las del vector dirección $\vec{v}$. Para incluir los coeficientes puedes utilizar los controles o escribir los valores en las casillas y pulsar Intro. Si pulsas sobre la ventana y mueves un poco el ratón, el sistema de ejes comenzarán a girar, con lo que podrás verlo desde distintos lugares. Se para volviendo a hacer clic.

Dibuja los siguientes pares de elementos y observa las distintas posiciones.

a) $\alpha \equiv x+2y+1=0$ y $r \equiv (2,0,0)+t\cdot(1,1,-1)$

b) $\alpha \equiv x+2y+1=0$ y $r \equiv (1,-2,0)+t\cdot(0,0,3)$

c) $\alpha \equiv x+2y+3=0$ y $r \equiv (1,-2,0)+t\cdot(0,0,3)$

Importante

Ilustración de Gustavo Doré , imagen de dominio público de Wikimedia Commons.

Las posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio son las siguientes.

a) **La recta y el plano se cortan en un punto** . Cuando la dirección de la recta es linealmente independiente de las dos direcciones del plano.

b) **La recta es paralela al plano** . Cuando la dirección de la recta es linealmente dependiente de las dos direcciones del plano y no hay ningún punto de la recta en el plano.

c) **La recta está contenida en el plano** . Cuando la dirección de la recta es linealmente dependiente de las dos direcciones del plano y cualquier punto de la recta está en el plano.

Para estudiar algebraicamente la posición relativa de una recta y un plano tomamos la ecuación general del plano y la paramétrica de la recta: $\alpha \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\begin{cases} x=p_1+t\cdot v_1 \\ y=p_2+t\cdot v_2 \\ z=p_3+t\cdot v_3 \end{cases}$

Basta sustituir las expresión de la recta en el plano y obtenemos una ecuación con una incógnita t.

$A(p_1+t\cdot v_1)+B(p_2+t\cdot v_2)+C(p_3+t\cdot v_3)+D=0$ operamos en la expresión y obtenemos

$(Av_1+Bv_2+Cv_3)\cdot t+(Ap_1+Bp_2+Cp_3+D)=0$ los dos paréntesis son números, llamémoslos f y g.

Estudiamos la ecuación resultante f·t+g=0.

1. Si f es distinto de cero, se puede despejar la t y existe una única solución. La recta corta al plano en un punto.
2. Si f es cero, pero g no, obtendríamos la ecuación 0·t+g=0 con g no nulo. Esta ecuación es imposible, por lo que no hay solución. La recta es paralela al plano.
3. Si f y g son ambos cero, nos queda la ecuación 0·t+0=0 que se verifica para todo valor de t, luego todos los puntos de la recta están en el plano y, por tanto, la recta está incluida en el plano.

Ejercicio resuelto

Estudia la posición relativa de la recta $r\equiv(x,y,z)=(-2,1,-1)+t\cdot(1,-1,2)$ y del plano $\alpha\equiv 3x+2y+5z-2=0$.

Reflexiona

Halla las posiciones relativas de los siguientes pares de elementos.

1. $\alpha\equiv x-2y+3=0$ y $r\equiv(x,y,z)=(1,1,1)+t\cdot(2,1,-1)$
2. $\alpha\equiv 2x+y-z-1=0$ y $r\equiv(x,y,z)=(1,1,2)+t\cdot(1,-1,1)$
3. $\alpha\equiv x-y+z-2=0$ y $r\equiv(x,y,z)=(3,-3,-4)+t\cdot(1,2,-3)$

1.4. ¡Será por planos!

En la vida cotidiana es usual que nos encontremos con la confluencia de más de dos elementos. Es fácil encontrarse con tres o más planos en los lugares más corrientes. Por ejemplo, en la esquina de cualquier habitación suelen coincidir tres planos, el techo o suelo, y dos paredes contiguas. En cualquier estantería nos encontramos con varios planos paralelos. También es corriente encontrar dos planos paralelos cortados por una transversal, por ejemplo, de nuevo en casa, el techo y el suelo suelen ser dos planos paralelos y cualquier pared corta a ambos planos. Y así en multitud de casos.

En este último apartado vamos a estudiar la posición relativa de tres planos, lo que es muy fácil de estudiar pues si consideramos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos,

$$\begin{cases} \alpha \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \beta \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ \chi \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases}$$

vemos que lo que hay que estudiar es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, exactamente lo mismo que hicimos en el tema 4 de la unidad anterior. Lo único que tendremos que hacer es estudiar todos los casos que pueden darse en ese sistema.

Consideramos la matriz ampliada del sistema anterior: $M_a = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right)$ en la que vamos a estudiar todos los casos posibles.

1) Si **rango(M_c)=3** entonces obligatoriamente rango(M_a)=3, el sistema es compatible determinado y hay una única solución. **Los tres planos tienen un punto común** .

2) Si **rango(M_c)=2 y rango (M_a)=3** el sistema es incompatible y no hay ningún punto común a los tres planos. En este caso podemos tener varios casos.

rango(M_c)=rango(M_a)=3

2-1) Si las tres filas de la matriz de los coeficientes son independientes dos a dos, cada dos planos se cortan en una recta independiente del otro plano. Los planos forman un prisma. Un ejemplo sería el prisma triangular típico de la caja de chocolates Toblerone o si pensamos en las paredes y el suelo de una tienda de campaña canadiense.

2-2) Si una de las filas de la matriz de los coeficientes es proporcional a otra, entonces tenemos dos planos paralelos cortados por otro plano.

rango(M_c)=2 y rango(M_a)=3 Tres planos formando un prisma.

3) Si **rango(M_c)=rango(M_a)=2** el sistema es compatible indeterminado. Hay infinitos puntos soluciones. Como depende de un parámetro (pues el número de incógnitas es 3 y el rango 2, las soluciones dependen de 3-1 = 1 parámetro) la solución es una recta. Es decir, en este caso **los tres planos se cortan en**

una recta . Pero podemos tener también dos casos:

rango(M_c)=2 y rango(M_a)=3 Dos planos paralelos y el otro secante.

3-1) Si las tres filas de la matriz de los coeficientes sin independientes dos a dos, los tres planos tienen distinta dirección y pasan por una misma recta. Formarían parte de un haz de planos tal como vimos en el apartado 1.2.

3-2) Si una de las filas es proporcional a otra, en este caso tenemos dos planos coincidentes y el tercer plano lo corta en una recta.

4) Si **rango(M_c)=1 y rango(M_a)=2** el sistema es incompatible, es decir, no hay punto común a los tres planos. Vuelve a haber dos casos.

rango(M_c)=1 y rango(M_a)=2. Tres planos paralelos

4-1) Si no hay ninguna fila de la matriz ampliada que sea proporcional a otra, los tres planos son paralelos entre sí.

4-2) Si dos filas de la matriz ampliada son proporcionales, entonces dos de los planos son coincidentes y el tercero es paralelo a los otros dos.

5) Si **rango(M_c)=rango(M_a)=1** entonces **los tres planos son coincidentes** .

En la siguiente dirección tienes una página donde aparece la misma clasificación pero en la que se incluye n dibujos esquematizados de las distintas posiciones relativas y algún ejercicio resuelto.

Posiciones relativas de tres planos

Reflexiona

Indica la posición de los siguientes grupos de planos.

a) $\begin{cases} 2x+3y-2z+1=0 \\ x-y+2z+3=0 \\ -4x-6y+4z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y-2z+1=0 \\ x-y+2z-3=0 \\ 3x+y+2z-5=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x+2y+z+2=0 \end{cases}$

Vamos, como en todos los temas anteriores, a presentar una serie de ejercicios aparecidos en Selectividad. Veremos que en muchos de ellos se mezclan ejercicios de este tema con ejercicios del tema anterior.

Ejercicio resuelto

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=-2 \\ x-z=-3 \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-2 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de r y s.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.

Ejercicio resuelto

Sean las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y-k}{4}=\frac{z}{5}$ y $r' \equiv \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$

a) Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

b) Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Ejercicio resuelto

Sea la recta r dada por $\begin{cases} 2x+y-mz=2 \\ x-y-z=-m \end{cases}$ y el plano definido por $\pi \equiv x+my-z=1$

a) ¿Existe algún valor de m para el que la recta y el plano sean paralelos?

b) ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano?

c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando m=0?

Ejercicio resuelto

Considera el plano de ecuación $2x+y-z+2=0$ y la recta $r \equiv \frac{x-5}{-2}=y=\frac{z-6}{m}$.

a) Halla la posición relativa de la recta y el plano según los valores del parámetro m.

b) Para m=-3 halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano.

c) Para m=-3, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano.

Reflexiona

Se sabe que los planos siguientes se cortan en una recta.:

$x+2y+bz=1$, $2x+y+bz=0$, $3x+3y-2z=1$.

a) Calcula el valor de b.

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta.