Cifras y letras: Desequilibrio y equilibro simultáneo

En nuestra vida diaria establecemos comparaciones de manera natural. Es algo intrínseco a la naturaleza humana. Dados dos objetos cualesquiera, no hay cosa que genere más curiosidad en nosotros que establecer comparaciones entre ellos.

El Universo, según palabras del propio Galileo Galilei**, está escrito en el lenguaje de las matemáticas.** Por tanto, las matemáticas no podían quedar al margen de estas comparaciones.

Acabamos de ver en el tema anterior cómo obtener los valores que hacen cierta una **igualdad** entre los dos miembros de una **ecuación**.

Dicho de otro modo, hemos encontrado el valor númerico (llamado **solución** de la ecuación) que al sustituirlo por la incógnita (la letra de la ecuación) hace que ambos miembros valgan lo mismo y se mantengan como *una balanza en posición de equilibrio*.

Foto de commons.wikimedia con licencia dominio público

A partir de ahora nos vamos a dedicar a intentar encontrar aquellos valores de la **incógnita** que *rompen el equilibrio*.

Es decir, buscaremos los valores numéricos de la letra, que hacen que *la balanza se incline hacia uno u otro lado* (hacia uno u otro miembro) generando una **desigualdad**.

Foto de ckmck con licencia CC BY 2.0 DEED

Foto de daquellamanera con licencia CC BY 2.0 DEED

Tras convivir y profundizar en el **desequilibrio** con cifras y letras (inecuaciones) durante gran parte del tema, buscaremos de nuevo el estado de equilibrio, vuelta a la normalidad, pero esta vez con varias balanzas al mismo tiempo (**equilibrio simultáneo**), a través del estudio de sistemas de ecuaciones con varias incógnitas.

1. Desequilibrio con cifras

Dicen que no hay manera más hermosa para expresar sentimientos y desequilibrios emocionales que una poesía. Otros piensan que lo ideal es hacerlo a través de la música con una hermosa canción.

Sea como fuere, lo que nunca podrías imaginar es que con matemáticas y poesía se podría decir algo tan bello como lo hace el siguiente poema.

Tras realizar su lectura, tendrás un motivo más para rebatir a aquellos que piensan que las matemáticas no están presentes en nuestras vidas.

¡Vamos que si lo están. Hasta en lo más profundo de nuestro ser!

Curiosidad

(...)

Somos la desigualdad del alma de la ecuación:
yo te quiero en un entero, tu me quieres en fracción.
Quise formar un binomio, quise a tu lado estar junto,
y vacío quedó el conjunto: das tu amor en polinomio.
(...)

Tú eres la incógnita extraña de mi pobre inecuación:
No hay igualdad de cariño, ni el menor signo de amor,
restaste las esperanzas de una unión de primer grado
que te ofrecía en potencia como un bello resultado.

Fragmento de “El Amor Imposible de Pitágoras” / poema / Edit. Patria / México, de *Eduardo Robles Boza.*

El poema anterior contiene una colección de términos matemáticos estrechamente relacionados con esta unidad. Algunos de ellos ya los conocerás, otros no. A recordar los primeros y a descubrir los que no conozcas, te ayudará el siguiente **crucigrama poético-matemático.**

Crucigrama elaborado con **educaplay**

Vamos a refrescar algunas propiedades básicas sobre relaciones numéricas que nos serán de gran ayuda para el resto del tema.

Importante

Recordamos que, dados dos números **a** y **b** pueden darse únicamente tres relaciones entre ellos:

- **a** es menor que **b** y lo expresamos **a < b**
- **a** es igual a **b** y lo expresamos **a = b**
- **a** es mayor que **b** y lo expresamos **a > b**

La segunda relación se denomina **igualdad** y cuando aparecen letras además de cifras numéricas, dan origen a las **ecuaciones.**

Las relaciones primera y tercera se denominan **desigualdades** y cuando aparecen letras además de cifras numéricas, dan origen a las **inecuaciones.** Con ellas trabajaremos a continuación.

Estas relaciones numéricas la aplicamos de manera insconciente en multitud de situaciones. Veamos el siguiente ejemplo ejemplo de aplicación.

Comprueba lo aprendido

En el día de ayer, las temperaturas medias en cinco capitales europeas fueron:

Capital	Madrid	Londres	Berlín	Moscú	Roma
Temperatura (ºC)	16	8	-1	-5	8

Indica la veracidad o falsedad de la siguientes afirmaciones:

En Madrid hace más calor que en Londres.
Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero
Porque 16 > 8

En Berlín hace más frío que en Moscú.
Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso
Porque -5 < -1 . Recuerda que, dados dos números negativos , el que tenga mayor valor absoluto es el menor de los dos.

En Londres hace la misma temperatura que en Roma.
Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero
Porque 8 = 8

Comprueba lo aprendido

Ordena la lista de temperaturas de la tabla anterior, en orden ascendente (y luego en orden descendente), colocando entre cada dos valores el signo <, =, >, que corresponda.

En orden ascendente (de menor a mayor): ☐ ☐ ☐ < 8 ☐ ☐ ☐ ☐

En orden descendente (de mayor a menor): 16 > ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Enviar

Comprueba lo aprendido

¿Te has parado a pensar cómo se comportan las desigualdades numéricas cuando se someten a variaciones (aumento, disminución, ...)? Enseguida lo vas a descubrir.

¿Qué ocurre si aumenta la temperatura 2 ºC en Moscú y en Roma? ¿Sigue haciendo más frío en Moscú que en Roma?

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Verdadero
La respuesta es afirmativa puesto que -5 < 8 (si sumamos 2 a cada miembro) -3 < 10, luego la desigualdad no ha cambiado.

Si disminuye 2 ºC la temperatura en ambas ciudades, podemos afirmar ahora que hace más frío en Roma que en Moscú.

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso
Es falso puesto que -5 < 8 (y si restamos 2 a cada miembro tendríamos) -7 < 6, luego la desigualdad no ha cambiado y sigue haciendo más frío en Moscú que en Roma.

Si se triplica la temperatura en ambas ciudades, hará más calor en Moscú que en Roma.

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso
Efectivamente, la afirmación es falsa.
No ha cambiado la situación puesto que al triplicar la temperatura lo que ha ocurrido es que se ha hecho aún mayor la diferencia entre ambas ciudades.
Veámoslo. Tenemos que -5 < 8 y al multiplicar por 3 ambos miembros tendremos que -15 < 24.

En las noticias, dan el siguiente titular:

> "Hoy 15 de Diciembre, se aprecian los efectos del cambio climático en las temperaturas de ciertas capitales europeas. Se ha invertido la situación, Moscú presenta una temperatura atípica para estas fechas con 10 ºC. Al mismo tiempo una ola de frío se encuentra situada sobre Roma donde se han alcanzado temperaturas de - 16 ºC".

Por tanto, podemos afirmar que ahora sí que hace más calor en Moscú que en Roma.

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Verdadero
Veremos de manera detallada lo que ha ocurrido.
¿Qué significa que se ha invertido la situación? Pues que ahora hace más calor en Moscú que en Roma.
Tenemos la siguiente relación: -16 < 10, cuando antes teníamos: -5 < 8.
Si observas las temperaturas actuales: 10 = **(-2)** · (-5) y -16 = **(-2)** · 8, se obtienen multiplicado las anteriores por un número negativo, en este caso -2, pero al hacer esta operación la desigualdad ha cambiado de sentido, la balanza se ha desequilibrado para el otro lado.

Cada una de las situaciones de la autoevaluación anterior muestra el comportamiento de una desigualdad numérica cuando se suman, restan, multiplican o dividen los dos miembros de una desigualdad por una misma cantidad.

A continuación, se presenta de manera resumida cada uno de los casos.

Importante

- Si a los dos miembros de una desigualdad se le **suman o restan un número positivo**, la desigualdad **no cambia de sentido.**

- Si a los dos miembros de una desigualdad se le **suman o restan un número negativo**, la desigualdad **no cambia de sentido.**

- Si se **multiplican o dividen por un número positivo** los dos miembros de una desigualdad, entonces la desigualdad **no cambia de sentido.**

- Si se **multiplican o dividen por un número negativo** los dos miembros de una desigualdad, entonces **se invierte y cambia de sentido.**

2. Desequilibrio con cifras y letras

En el punto anterior hemos tratado las desigualdades numéricas (desigualdades con cifras).

Ha llegado el momento de invitar a las letras a unirse a este tema. Cuando lo hagamos, estaremos trabajando con **inecuaciones**. ¿Ves que fácil es?

Foto de luan torreira CC BY 2.0

Si eres un buen conductor seguro que sabes que en las autopistas españolas debemos circular a una velocidad inferior o igual a 120 km/h.
Si llamamos v, a la velocidad en kilómetros por hora a la que conducimos, la expresión algebraica que representa esa situación vendría dada por: $v \leq 120$.

Si circulamos a velocidad superior a 120 km/h estaremos poniendo en peligro nuestra seguridad y seremos sancionados. En este caso la expresión algebraica sería: $v > 120$.

Foto de sugree con licencia by-sa 2.0 de

Las dos expresiones anteriores se denominan inecuaciones o desigualdades.

Lo primero que llama la atención de las inecuaciones es que tienen infinitas soluciones. Esa es una característica esencial de las inecuaciones.

Trabajaremos exclusivamente con inecuaciones de una incógnita.

Importante

Una **inecuación** es una expresión matemática con cifras y letras caracterizada por tener alguno de los signos de desigualdad **(** $<, \leq, >, \geq$ **),** mostrando un desequilibrio entre cifras y letras**.**

Una inecuación respeta todas las propiedades vistas para las desigualdades numéricas, que son:

- No cambia de sentido, si se suman o restan números a ambos miembros, ya sean positivos o negativos.

- Tampoco cambia de sentido, si se multiplican o dividen ambos miembros por un número positivo.

- Cambia de sentido, se desequilibra hacia el otro lado, si se multiplican o dividen ambos miembros por un número negativo.

Importante

Resolver una inecuación es **encontrar el conjunto** de números reales que cumplen la desigualdad. Este **conjunto infinito** de soluciones será un intervalo de la recta real.

El proceso de resolución consiste en realizar tranformaciones (suma, resta, multiplicación o división) de una misma cantidad a ambos miembros de una inecuación, hasta llegar a una inecuación en la que la incógnita esté sóla en uno de sus miembros, en el otro haya un número y, entre ambos, uno de los signos de desigualdad.

El objetivo de estas transformaciones es llegar a obtener uno de los siguientes modelos (donde *x* es la incógnita y *s* un número real)

$x<s$	$x \leq s$	$x>s$	$x \geq s$

Finalmente, la solución de la inecuación vendrá dada por los infinitos valores que verifican esta última desigualdad. Es decir, todos los puntos del intervalo que tienen por extremo inicial (o final) al valor s.

Reflexiona

En la siguiente escena de Descartes, debes asociar a cada inecuación que aparece en la primera columna la desigualdad que le corresponda de la última columna.

Basta con que le apliques a casa inecuación la operación que se indica a la derecha de cada una de ellas.

Esta unidad interactiva requiere la máquina virtual de Java J2RE.

Hemos indicado anteriormente que las soluciones de una inecuación son puntos de una semirrecta de la recta real.

Importante

- Si el símbolo de desigualdad de la ecuación es estricto, es decir, es un $<$ o un $>$. entonces el extremo numérico de la semirrecta no es una solución de la inecuación. (Ver primer apartado de la autoevaluación anterior)
- Si el símbolo de desigualdad de la ecuación no es estricto, es decir, es un $\leq$ o un $\geq$. entonces el extremo numérico de la semirrecta si es una solución de la ecuación. (Ver segundo apartado de la autoevaluación anterior)

En el siguiente applet de Geogebra creado por Pilar Gallego, se representan las soluciones de inecuaciones de diferentes tipos. Basta que modifiques los valores a, b y c para cambiar los coeficientes, o el control **Casos**, para modificar el tipo de desigualdad. Las soluciones se expresan tanto en forma de intervalo como de semirrecta.

Comprueba lo aprendido

Indica si son Verdaderos o Falsos los intervalos que se dan como soluciones de las dos inecuaciones siguientes.

Puedes ayudarte del applet de Geogebra para comprobar tus cálculos. Ten en cuenta que antes de poder utilizar este applet, debes realizar algunas transformaciones en las dos inecuaciones.

El intervalo $(-\infty,4]$ es la solución de $2x-3<x+1$

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso

Veámoslo:

$$2x-3<x+1$$
$$2x-x<1+3$$
$$x<4$$

El valor x = 4 **no entra** en el conjunto de soluciones de la inecuación puesto que si sustituimos x= 4, quedaría **5 < 5**, que no es cierto.

Por tanto, la solución de la inecuación viene dada por el **intervalo abierto** $(-\infty,4)$

La solución de $3(x+1) \geq -2(2x-3)$ es el intervalo $[\frac{3}{7}, +\infty)$

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Verdadero

Si resolvemos la inecuación, paso a paso, vemos que:

$$3(x+1) \geq -2(2x-3)$$
$$3x+3 \geq -4x+6$$
$$3x+4x \geq 6-3$$
$$7x \geq 3$$
$$x \geq \frac{3}{7}$$

Es decir, cualquier valor **mayor o igual que** {{3} \over {7}} verifica la inecuación. La solución es el intervalo: $[\frac{3}{7}, +\infty)$

Para saber más

Puedes seguir practicando y consolidar lo aprendido con el anterior applet de Geogebra.

(a) $2x-3<x+1$

(b) $3x+5 \leq 8$

(c) $5x>9-x-3$

(d) $-3x+5 \geq -10+x-25$

Ayuda: debes realizar las transformaciones previas en cada una de la inecuaciones hasta obtener ax + b < c, o una cualquiera de las otras tres desigualdades.

Una vez tengas ésto, cambia en el applet los valores de **a, b, c y el signo de relación** (signo de desigualdad) y compara los resultados que has obtenido con los que te ofrece el applet.

A continuación presentamos un problema que sin la ayuda de las inecuaciones sería imposible de resolver.

Ejercicio resuelto

Jesús es el chico de mayor edad de un equipo de fútbol de categoría infantil. Es un poco bromista y además está bien preparado en Matemáticas.

Ante la pregunta realizada por el nuevo entrenador: "¿cuántos años tienes?" le responde: “El doble de mi edad más dos años es mayor que mi edad más 14 años”.

Con esta pista el nuevo entrenador no puede obtener la edad de Jesús, pero ¿puede averiguar que edad como mínimo tiene Jesús?

Llamemos x a su edad.

Entonces:

2x + 2 > x + 14

2x - x > 14 - 2

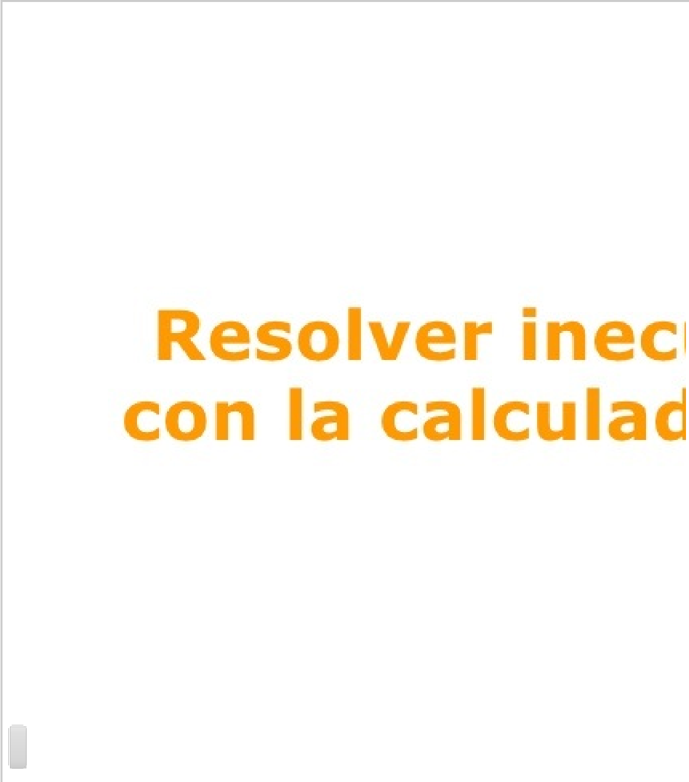
x > 12

Luego Jesús es mayor de 12 años.

De la misma manera que hemos acometido la resolución de inecuaciones con la ayuda de applet de Geogebra, también podemos hacerlo con la ayuda de otro programa de cálculo simbólico y numérico, bastante potente. Se trata de **Wiris.**

Al igual que ocurre con Geogebra, Wiris no resuelve los problemas que se nos puedan plantear. Nosotros tenemos que entender el enunciado, adivinar qué se nos pide, decidir quién es la incógnita, plantear la ecuación, inecuación. En ese momento es cuando entran en escena estas herramientas, ellas son las que resuelven la ecuación o inecuación. Aún nos queda comprobar si la solución obtenida tiene sentido en el contexto del problema planteado, y se ajusta a las condiciones impuestas.

A continuación, tienes una presentación, dónde se explican cómo resolver inecuaciones con Wiris.



Resolver inecuaciones con_la_calculadora_wiris from

Jesús Fernández

Comprueba lo aprendido

Indica si es **Verdadero** o **Falso** el intervalo solución propuesto para cada una de las siguientes inecuaciones.

(a) $3x+5\leq 8$ Solución: $(-\infty,1)$

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso
Solución: $x\leq 1$, que expresado en forma de intervalo sería: $(-\infty,1]$

(b) $5x>9-x-3$ Solución: $(1,+\infty)$

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Verdadero

(c) $-3x+5\geq 10+x-25$ Solución: $(-\infty,-\frac{1}{2}]$

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso
Solución: $x\leq 5$, que expresado en forma de intervalo sería: $(-\infty,5]$

3. Equilibrio. Más de una letra. Más de una ecuación

Dejamos las inecuaciones, para volver a centrarnos en el estudio del equilibrio (ecuaciones).

Pero, esta vez, en vez de aparecer una letra aparecerán dos. Y aún hay más ...

Si no tuviéramos bastante con dos letras, en vez de una ecuación aparecerán dos. Como se diría en el argot circense: ¡más difícil todavía!.

¡No te preocupes! ¡Tampoco es para tanto!

A continuación, vas a descubrir que la complejidad no aumenta en exceso ni con la aparición de una letra más, ni con la aparición de una ecuación más.

Verás que trabajar con ellas es imprescindible para la resolución de algunas situaciones problemáticas que, sin la ayuda de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, serían mucho más complicado resolver.

Foto de daquellamanera con licencia CC BY 2.0 DEED

El siguiente titular apareció en el diario **SPORT.es** el día 3 de abril de 2010.

UN TÁNDEM QUE CADA VEZ SE ENTIENDE MEJOR

Messi-Ibrahimovic, seguro de gol... y de victoria

En lo que va de Liga entre los dos delanteros han marcado 40 goles, los mismos que lleva el Athletic

Fuente: **SPORT.es** Fecha: **03/04/2010**

Si traducimos al lenguaje algebraico la frase del subtítulo: "entre los dos delanteros han marcado 40 goles", al haber dos objetos (en este caso dos jugadores), y dos cantidades asociadas a ellos, "número de goles que ha marcado cada uno",necesitamos dos incógnitas.

Por tanto, si llamamos:

x: Número de goles que ha marcado Messi
y: Número de goles que ha marcado Ibrahimovic

La frase anterior ya traducida, quedaría de la siguiente forma: $x + y = 40$, que es una ecuación (igualdad entre dos miembros) con dos incógnitas (letras). ¿Has visto que no es tan complicado?

Importante

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Su expresión general tiene la siguiente forma: $ax + by = c$, donde **x** e **y** son las incógnitas de la ecuación y **a**, **b** y **c** son números.

a y **b** son los **coeficientes** y **c** es el **término independiente** de la ecuación.

En el caso anterior $x+y=40$, $a=1$, $b=1$ y $c=40$.

Las **soluciones de la ecuación son pares de números** que al sustituirlos en la ecuación por **(x, y)**, hacen que ambos miembros valgan lo mismo (se alcance el equilibrio).

Comprueba lo aprendido

1. ¿Es posible que Messi haya marcado 30 goles e Ibrahimovic 20 goles?

- Sí
- No

¡Incorrecto!

No es posible, porque 30 + 20 = 50 y entre los dos han marcado 40 goles no 50.

Conclusión: (x,y) = (30, 20) no es una solución de la ecuación.

¡Correcto!

No es posible, porque 30 + 20 = 50 y entre los dos han marcado 40 goles no 50.

Conclusión: (x,y) = (30, 20) no es una solución de la ecuación.

Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Opción correcta (Retroalimentación)

2. ¿Es posible que tanto Messi como Ibrahimovic hayan marcado 20 goles cada uno?

- Sí
- No

¡Correcto!

Sí es posible, porque 20 + 20 = 40 , que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.

Conclusión: (x,y) = (20, 20) es una solución de la ecuación.

¡Incorrecto!

Sí es posible, porque 20 + 20 = 40 , que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.

Conclusión: (x,y) = (20, 20) es una solución de la ecuación.

Solución

1. Opción correcta (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)

3. Yo creo que Messi ha marcado 25 goles y que Ibrahimovic ha marcado sólo 15 pero mi hermana dice que, según sus cuentas, Messi ha marcado 12 goles e Ibrahimovic 28. ¡Vaya disparidad de opiniones!. Pero, ¿podemos tener razón los dos?

- Sí
- No

¡Correcto!

En efecto, y aunque parezca contradictorio, tenemos razón los dos, porque

- según mis datos: 25 + 15 = 40 , que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.

- según las cuentas de mi hermana: 12 + 28 = 40 , que es la cantidad de goles que han marcado.

Conclusión: (x,y) = (25, 15) es una solución de la ecuación y (x,y) = (12, 28) es otra solución de la ecuación.

¡Incorrecto!

En efecto, y aunque parezca contradictorio, tenemos razón los dos, porque

- según mis datos: 25 + 15 = 40 , que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.

- según las cuentas de mi hermana: 12 + 28 = 40 , que es la cantidad de goles que han marcado.

Conclusión: (x,y) = (25, 15) es una solución de la ecuación y (x,y) = (12, 28) es otra solución de la ecuación.

Solución

1. Opción correcta (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)

Para saber si una pareja de números es solución de una ecuación lineal con dos incógnitas, basta con sustituir en la ecuación cada número por la letra correspondiente y comprobar si se cumple o no la igualdad numérica.

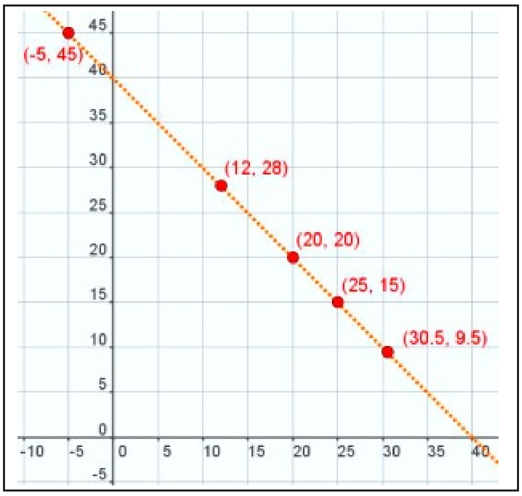
Acabamos de ver, que los pares (12, 28), (20, 20) y (25, 15) son soluciones de la ecuación x + y = 40. Estos pares de puntos, además de cumplir la ecuación tienen sentido en el contexto de la situación que planteamos, es decir, pueden ser los goles marcados por Messi e Ibrahimovic respectivamente.

Pero hay otros pares de puntos que también cumplen la igualdad x + y = 40. Por ejemplo (-5, 45) ó (30,5; 9,5) suman 40, pero no tienen sentido como goles marcados en un partido.

Nos planteamos entonce ¿cuántos pares de puntos pueden ser solución de la ecuación lineal x + y = 40?

En la imagen de la derecha hemos representado en uno ejes coordenados los pares de puntos que hemos visto que son solución de x +y = 40. Para ello, el valor de la x lo hemos colocado en el eje OX, y el de la y en el eje OY.

A la vista de la imagen, ¿qué otros pares de puntos pueden ser solución de nuestra ecuación?



Importante

Dada una **ecuación lineal** con dos incógnitas, **ax + by = c**, siempre se cumple:

1. Que sus soluciones, pares de valores **(x,y)**, representan puntos del plano que están alineados, es decir, están situados sobre la misma **recta.**

2. Como una recta tiene infinitos puntos, una ecuación lineal con dos incógnitas también tiene **infinitas soluciones**.

Comprueba lo aprendido

En un portal deportivo en internet leemos el siguiente titular:

> **"A estas alturas de la temporada el Real Madrid es el equipo más goleador de la Liga con 6 goles más que el F.C. Barcelona, que ocupa la segunda posición en la clasificación de equipos goleadores."**

Indica **Verdadero** o **Falso** en las siguientes afirmaciones:

1. La ecuación que relaciona el número de goles marcados por ambos equipos es: **x = y + 6** , siendo x: nº goles marcados por el Real Madrid e y: nº goles marcados por el F.C. Barcelona.

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Verdadero

2. El F.C Barcelona ha marcado 73 goles y el Real Madrid 80.

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso

No es cierto. Veamos por qué.

Sabemos que la relación entre los goles marcados por ambos equipos viene dada por la ecuación: **x = y + 6** , donde **x: nº goles marcados por el Real Madrid** e **y: nº goles marcados por el F.C. Barcelona.**

Si fuera cierto, entonces, la pareja: (x,y)=(80,73) sería una solución de la ecuación.

Pero, si sustituimos en la ecuación vemos que no la satisfacen, porque: 80 = 73 + 6, 80 = 79, que no es cierto.

3. Podemos afirmar, con toda seguridad, que: "El F.C Barcelona ha marcado 73 goles y el Real Madrid 79".

Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso

No es cierto. Veamos por qué.

Sabemos que la relación entre los goles marcados por ambos equipos viene dada por la ecuación: **x = y + 6** , donde **x: nº goles marcados por el Real Madrid** e **y: nº goles marcados por el F.C. Barcelona.**

En este caso, la pareja: (x,y)=(79,73) si que es una solución de la ecuación. **Podemos decir que es una combinación goleadora posible, pero, con los datos que disponemos, no podemos afirmar con toda seguridad que esta sea la única combinación posible**.

Ésto es debido a que una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

En las dos situaciones mostradas en el punto anterior no hemos podido más que *establecer una relación entre las dos incógnitas* y *dar posibles combinaciones de resultados*.

Pero, ni hemos podido determinar un número único de goles marcados por cada uno de los delanteros del F.C Barcelona, ni el número preciso de goles marcados por cada uno de los equipos.

En ambas situaciones nos falta una pista: otra ecuación. Al tener dos incógnitas, para poder encontrar unos valores únicos para los goles marcados, necesitamos al menos dos pistas, es decir dos ecuaciones.

Si las dos pistas son "buenas", entonces sí que podremos encontrar unos valores únicos para las incógnitas planteadas.

Con las dos pistas tendremos lo que en matemáticas se conoce con el nombre de **sistema de ecuaciones**.

Importante

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**, como su propio nombre indica, está compuesto por dos ecuaciones de primer grado.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Resolver el sistema es encontrar una solución común de ambas ecuaciones. Por tanto, una **solución** del sistema es una pareja de valores **(x,y)** que cumple ambas ecuaciones de manera simultánea.

Vamos a ver distintas maneras de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Comenzaremos con el **método gráfico** que nos mostrará que resolver un sistema de ecuaciones no es otra cosa que calcular los puntos de corte de sus dos rectas asociadas.

Importante

Vimos que existe una relación entre una ecuación lineal con dos incógnitas y su representación gráfica (una recta). Además, sabemos que una solución del sistema de ecuaciones es una solución común de ambas ecuaciones.

Si interpretamos ésto desde un punto de vista gráfico, una solución del sistema vendrá dada por las coordenadas (x,y) de un punto que pertenezca a las dos rectas, esto es, de un punto de corte de las dos rectas.

Por tanto, para resolver un sistema de ecuaciones, por el método gráfico, debemos:

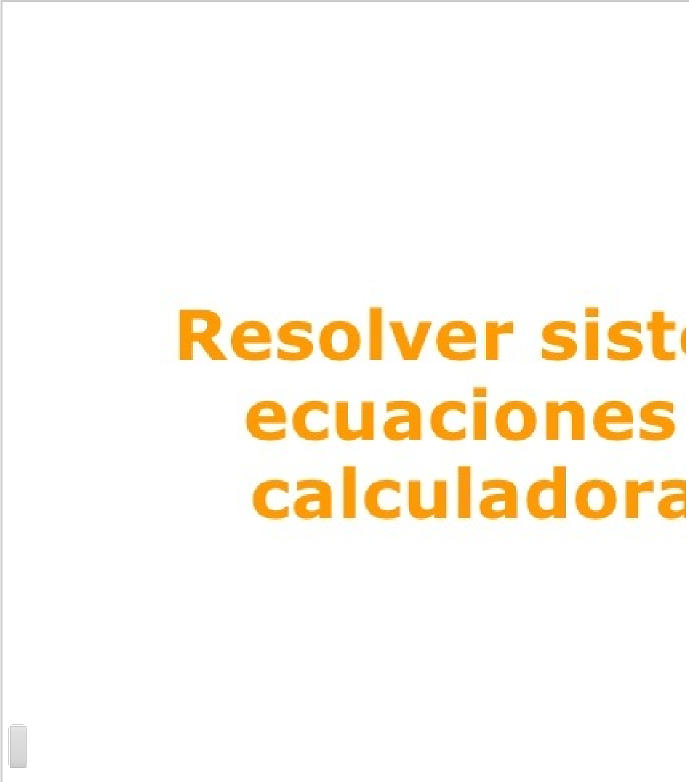
- Representar gráficamente la recta de cada una de las ecuaciones.
- Determinar los puntos comunes de ambas rectas.

En el siguiente applet aparecen multitud de ejemplos de sistemas resueltos para que puedas practicar de manera autónoma. Pulsa sobre el botón gris situado debajo del sistema para ver **"OTRO EJEMPLO"**.

Esta unidad interactiva requiere la máquina virtual de Java J2RE.
Applet del proyecto ed@d. Ministerio de Educación

Como puedes ver, dibujar las rectas de cada una de las ecuaciones no es una tarea excesivamente compleja. Basta despejar **y** en función de **x**, elaborar una pequeña tabla de valores y representar los puntos obtenidos.

En el siguiente applet, se explica cómo puedes resolver sistemas de ecuaciones con Wiris de manera **analítica**.



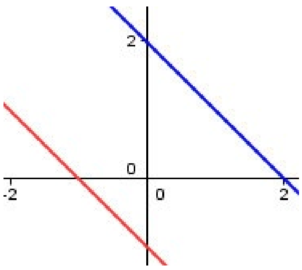
Resolver sistemas de ecuaciones con Wiris from

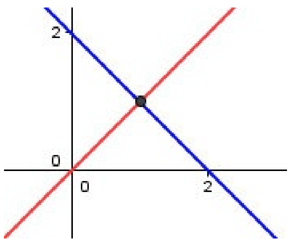
Jesús Fernández

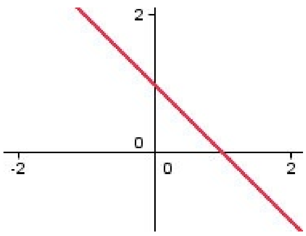
Comprueba lo aprendido

Asocia cada sistema con su representación gráfica.

1	2	3
$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=1 \\ -2x-2y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$







- Al Sistema 1 le corresponde la:

Sugerencia

- ○ Gráfica 1
- ○ Gráfica 2
- ○ Gráfica 3

¡Correcto!

Gráfica 1.

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de x y realizando una pequeña tabla de valores.

Ten en cuenta esta observación para futuros sistemas que vayas a resolver. Si observas las ecuaciones verás que es imposible que al mismo tiempo: "la suma de dos números (x e y) valga 2 y que valga -1". O una cosa o la otra pero no ambas. **Las ecuaciones, son contradictorias** y así es imposible encontrar una solución. Cada vez que ocurra ésto, en las ecuaciones de un sistema, en **la representación gráfica van a salir dos rectas paralelas que**, evidentemente, **nunca se cortan. No hay punto de corte, no hay solución.**

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

Solución

1. Opción correcta (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)
3. Incorrecto (Retroalimentación)

- Al sistema 2 le corresponde la:

○ Gráfica 1
○ Gráfica 2
○ Gráfica 3

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

¡Correcto!

Gráfica 3.

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de x y realizando una pequeña tabla de valores.

Ten en cuenta esta observación para futuros sistemas que vayas a resolver. Si observas las ecuaciones verás que **la segunda ecuación es múltiplo de la primera**. Se obtiene multiplicando la primera por -2. En realidad, son ecuaciones equivalentes, tienen las mismas soluciones. Se cortan en infinitos puntos. **El sistema tiene infinitas soluciones**. Cuando ocurra ésto, **su representación gráfica serán dos rectas coincidentes, una encima de la otra**.

Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)
3. Opción correcta (Retroalimentación)

- Al sistema 3 le corresponde la:

○ Gráfica 1
○ Gráfica 2
○ Gráfica 3

¡Incorrecto!

¡Correcto!

Gráfica 2.

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de x y realizando una pequeña tabla de valores.

Ten en cuenta esta observación para futuros sistemas que vayas a resolver. Si observas las ecuaciones verás que ni son contradictarias, ni una es múltiplo de otra. Cada vez que ocurra ésto, **la representación gráfica van a salir dos rectas secantes (que se cortan) en un único punto. El sistema tiene una única solución, que viene dada por las coordenadas (x,y)=(1,1) del punto de corte.**

¡Incorrecto!

Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Opción correcta (Retroalimentación)
3. Incorrecto (Retroalimentación)

3.3. Resolución, haciendo operaciones

Como hemos visto en el apartado anterior, un sistema se puede resolver gráficamente. Pero en muchas ocasiones, este método presenta algunos inconvenientes.

En el caso de que no dispongamos de una herramienta informática preparada para representar las gráficas, estaremos obligados a construir una tabla con los puntos, para posteriormente realizar la representación de las rectas a mano.

También nos puede ocurrir que, una vez representadas las rectas, el punto de corte esté muy alejado del origen de coordenas o que no tenga las coordenadas enteras. Situaciones estas, que suelen significar un obstáculo para encontrar la solución exacta.

Todos los inconvenientes señalados anteriormente justifican de manera clara la necesidad de que existan métodos de resolución de sistemas analíticos, es decir, realizando operaciones.

Veamos los tres métodos más clásicos.

Importante

Método de sustitución
Consiste en despejar la incógnita que elijamos de una de las ecuaciones y, posteriormente, sustituirla en la otra.

Método de sustitución from **pepemunoz**

Importante

Método de igualación
Consiste en, elegida una misma incógnita para las dos ecuaciones, despejarla en ambas, para posteriormente igualar las expresiones obtenidas.

Método de igualación from **pepemunoz**

Comprueba lo aprendido

A las dos situaciones relacionadas con el fútbol que vimos en el punto anterior, le vamos a añadir una nueva pista.

Plantea en cada uno de los casos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, resuélvelos por el método que prefieras y completa los espacios en blanco que nos dan la solución.

1. Sabemos que x: Número de goles que ha marcado Messi e y: Número de goles que ha marcado Ibrahimovic y que entre los dos han marcado 40 goles. La nueva pista que nos dan es: "Messi ha anotado 10 goles más que su compañero Ibrahimovic".

x: Número de goles marcados por Messi	
y: Número de goles marcados por Ibrahimovic	

2. La ecuación que relaciona el número de goles marcados por ambos equipos es: x = y + 6 , siendo x: nº goles marcados por el Real Madrid e y: nº goles marcados por el F.C. Barcelona. En este caso, la nueva pista que nos dan es: "Entre los dos equipos han marcado 172 goles."

x: Número de goles marcados por el Real Madrid	
y: Número de goles marcados por el F.C Barcelona	

Enviar

1. La nueva pista, traducida al lenguaje matemático, quedaría: x=y+10.

A continuación, planteamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos. En este caso, se ha optado por resolverlo mediante el **método de sustitución**.

Como la **x** está despejada en la segunda ecuación, lo aprovecharemos y la sustituimos en la primera ecuación. El resto es hacer operaciones.

$$\begin{cases} x+y=40 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (y+10)+y=40 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y=30 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=15 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=15 \\ x=25 \end{cases}$$

2. La nueva pista, traducida al lenguaje matemático, quedaría: x+y=172

A continuación, planteamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos. En este caso, se ha optado por resolverlo mediante el **método de igualación**.

Para ello, como la **x** está despejada en la primera ecuación, la despejamos también en la segunda e igualamos ambas expresiones. El resto es hacer operaciones.

$$\begin{cases} x=y+6 \\ x+y=172 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y+6 \\ x=172-y \end{cases} \rightarrow y+6=172-y \rightarrow 2y=166 \rightarrow y=83 \rightarrow x=83+6=89 \rightarrow \{$$

Ejercicio resuelto

A un partido benéfico celebrado en el estadio Ramón Sánchez Pizjuan, de Sevilla, han asistido 42000 espectadores. Se ha puesto a la venta únicamente dos tipos de entradas, a un precio de 15 € para los adultos y entradas infantiles a 6 €. La recaudación total ha sido de 612000 €. ¿Cúantas entradas de cada tipo se han vendido?

Si llamamos x: Nº de entradas de adultos vendidas, y: Nº de entradas infantiles vendidas, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x+y=42000 \\ 15x+6y=612000 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos vistos, tendremos que se han vendido:

x = 40000 entradas de adultos, y = 2000 entradas infantiles.

Si en el sistema del ejercicio anterior:

$$\begin{cases} x+y=42000 \\ 15x+6y=612000 \end{cases}$$

multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por -15, tendremos que, el coeficiente de **x** en ambas ecuaciones es opuesto, -15 y 15. Si ahora sumamos las dos ecuaciones miembro a miembro, haremos desaparecer la **x**, y nos quedará una ecuación con una única incógnita, y. Si la resolvemos tendremos el valor numérico de **y**.

Posteriormente, sustituiremos este valor de **y** en la primera, calculando el valor de **x**. *Hemos encontrado la solución de una manera rápida, simplemente obteniendo coficientes opuestos en una de las incógnitas*.

$$\begin{cases} x+y=42000 \\ 15x+6y=612000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -15x-15y=-630000 \\ 15x+6y=612000 \end{cases} \rightarrow -9y=-18000 \rightarrow y=2000 \rightarrow \begin{cases} x+2000=42000 \\ y=2000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=40000 \\ y=2000 \end{cases}$$

Lo que hemos hecho es aplicar el **método de reducción.**

Importante

El **método de reducción**, consiste en obtener un sistema en que los coeficientes de **x** o de **y** sean opuestos (con igual valor y distinto signo), para que así podamos eliminar dicha incógnita al sumar las dos ecuaciones.
Para obtener que los coeficientes sean opuestos, se pueden multiplicar por números distintos una o las dos ecuaciones, teniendo en cuenta lo que sea conveniente en cada caso.

Método de reducción from **pepemunoz**

Reflexiona

Uno de los motores que propulsa el lanzamiento del cohete **Ariane 5** es el **Vulcain 2**.

Durante los 540 segundos que dura su funcionamiento consume las 155 toneladas de combustible que contiene, compuestas exclusivamente de **oxígeno** e **hidrógeno** líquido.

Por cada tonelada de hidrógeno el Vulcain carga 5,2 toneladas de oxígeno.

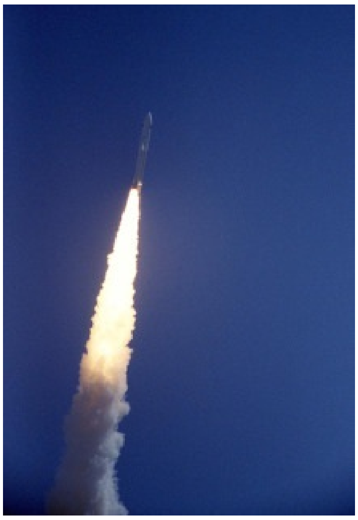
Plantea y resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que nos permita saber la cantidad exacta de oxígeno e hidrógeno líquido que almacena en el motor.

Por ejemplo, si llamamos **x** a las toneladas de hidrógeno e **y** a las de oxígeno, obtendremos las siguientes ecuaciones.

Como almacena 155 toneladas en total, tenemos que: $\mathbf{x + y = 155}$.

Y por otro lado, ya que por cada tonelada de hidrógeno carga 5,2 de oxígeno: $\mathbf{y = 5{,}2 \cdot x}$.

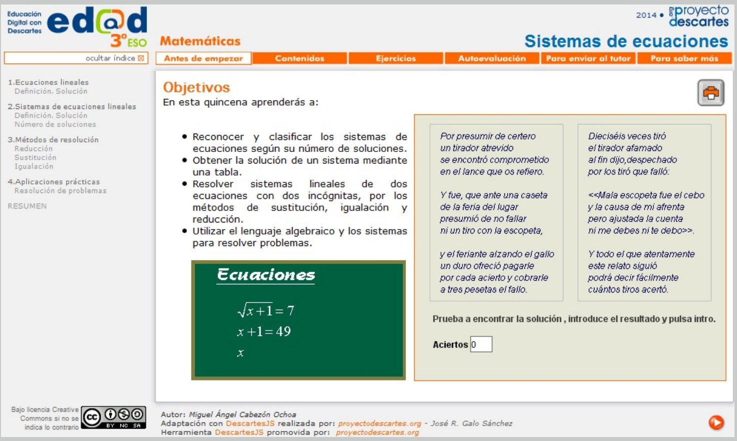
Sustituimos la y en la primera ecuación, y nos queda $x + 5{,}2x = 150$. Por tanto $x = 25$ toneladas, e $y = 130$.



Start von Herschel und Planck de **astirn**, CC by-nc-nd 2.0

Para saber más

Para que puedas practicar los métodos de resolución anteriores te proponemos que visites el siguiente enlace del proyecto Descartes.



4. Malabarismo. Gauss

Hay multitud de situaciones y problemas cuya solución se obtiene resolviendo sistemas con muchas ecuaciones e incógnitas. Si ya tiene mérito resolver problemas usando dos ecuaciones, imagínate con tres, cuatro, ... Es casi un ejercicio de **"malabarismo"**.

Pero no te preocupes, que no usaremos sistemas excesivamente complejos. Comenzaremos este apartado con una curiosidad, con un toque de humor las cosas se ven de otra manera.

¡Matemáticas, aplicación a las ciencias y humor pueden ir de la mano!

Curiosidad

¿Has oído alguna vez la frase "fallas más que el hombre del tiempo"?
En los años 60 del siglo XX, Edward Lorenz se dedicaba a estudiar el comportamiento de la atmósfera **buscando un conjunto de ecuaciones sencillas que permitiera hacer predicciones climatológicas.** Consiguió encontrar un modelo donde tres variables expresan como cambian a lo largo del tiempo, la velocidad y la temperatura del aire. Lo resumió **en tres ecuaciones muy simples conocidas como modelo de Lorenz.**

Pero, el matemático y físico, se llevó una gran sorpresa cuando observó que pequeñas diferencias en los datos de partida (algo tan simple como utilizar 3 ó 6 decimales) llevaban a grandes diferencias en las predicciones. Es decir, comprobó que cualquier pequeña perturbación, o error, en las condiciones iniciales del sistema tenía gran influencia sobre el resultado final. *En definitiva, demostró que, los hombres y mujeres del tiempo, no es que fallen en sus predicciones, sino que es casi imposible acertar con toda seguridad en predicciones meteorológicas a largo plazo debido al propio comportamiento de la atmósfera.*

El aleteo de una mariposa puede provocar la rotura del tejado de una casa

¿Sabes lo qué es "el efecto mariposa"?

Lorenz intentó explicar esto con un ejemplo sencillo. Sugirió que imaginásemos a un meteorólogo que hubiera conseguido hacer una predicción muy exacta del comportamiento de la atmósfera, mediante cálculos muy precisos y con datos muy exactos. Pues debido al comportamiento de la atmósfera, *esta predicción podría fallar, simplemente por no haber tenido en cuenta el aleteo de una mariposa en el otro lado del planeta. Ese simple aleteo podría introducir perturbaciones en el sistema que llevaran a la predicción de una tormenta.*

Así surgió el nombre de **efecto mariposa**. Se denomina efecto mariposa a la amplificación de errores que pueden aparecer en el comportamiento de un sistema complejo. Un pequeño error o desviación, al principio, puede causar unos efectos sorprendentes al final.

¿Y cómo resolvemos sistemas de ecuaciones con muchas ecuaciones e incógnitas?

Gauss, dio una respuesta a este problema, resolviendo sistemas con el mismo número de ecuaciones que incógnitas.

El método de resolución de Gauss lleva su nombre debido a que Gauss lo describió en un artículo detallando los cálculos que hizo para determinar la órbita del asteroide Pallas. Los parámetros de la órbita tenían que determinarse mediante observaciones del asteroide durante seis años (1803-1809). Esto dio lugar a *seis ecuaciones con seis incógnitas*.

Gauss demostró cómo resolver estas ecuaciones, reemplazándolas sistemáticamente por un nuevo sistema en el que sólo la primera ecuación tenía seis incógnitas, la segunda cinco, la tercera sólo cuatro, y así sucesivamente, hasta que la sexta ecuación tenía una sola incógnita. Este método también se denomina método de reducción en cascada o de triangulación.

Importante

El **método de Gauss** consiste en obtener sistemas equivalentes al que queremos resolver, cada vez más sencillos, hasta obtener uno muy simple con forma triangular.

El sistema que buscamos debe tener una única incógnita en su última ecuación, dos en la penúltima, ..., y todas las incógnitas en la primera ecuación.

Las soluciones se obtienen finalmente de abajo a arriba. Esto es, resolvemos la última, sustituimos el valor obtenido en la penúltima, y así sucesivamente.

En la siguiente presentación se explica de manera sencilla, clara y mediante un ejemplo el método de Gauss. En este caso, resuelve un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Gauss. Sistemas de ecuaciones from **José María Vázquez**

Comprueba lo aprendido

Rellena los huecos, para completar la resolución mediante el método de Gauss del siguiente sistema:

2x - 2y + 6z = - 8	Mantenemos la 1ª fila	2x - 2y + 6z = - 8	Mantenemos la 1ª fila	2x - 2
2x + 2y + 2z = 4	Colocamos, 2ª - 1ª fila	☐ y - ☐ z = 12	Colocamos, 2ª fila : 4	

2x + 4y - 2z = 12	Colocamos, 3ª - 1ª fila	☐ y - 8z = ☐	Colocamos, 3ª fila : 2	☐ y -

Mantenemos la 1ª fila	2x - 2y + 6z = - 8	Calculamos x	x = (-8 + 2y - 6
Mantenemos la 2ª fila	y - z = 3	Calculamos y	y =
Colocamos, 3ª - 3 · 2ª fila	- z = ☐	Calculamos z	

Enviar

Para saber más

Puedes utilizar Wiris para resolver sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas o de cualquier número de ecuaciones o incógnitas. Basta que sigas los pasos que se detallan en la presentación que aparecía en el punto 3.2 de este tema. Sólo tendrás que cambiar el número de ecuaciones que tiene el sistema, y por supuesto, al escribir cada una de las ecuaciones, añadir las incógnitas necesarias.