2º de Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

Cálculo de probabilidades:
Cálculo de probabilidades. Formas de contar. Axiomática de Kolmogorov

1. Experimentos aleatorios

¿Qué tal vamos?

Ya hemos pasado el ecuador de este curso y prepárate para lo que ahora viene.

Nos olvidamos un poco de matrices, funciones, derivadas y entramos en un mundo apasionante de las Matemáticas como es el del azar, la probabilidad y la estadística.

Dejamos a nuestros amigos de la finca "La Alfonsita" y nos apuntamos a la peña "Los improbables" donde conoceremos a M.ª José, compañera de Alba en la Universidad de Nogara, con la que aprenderemos un montón de probabilidad para que cuando compremos un cupón o echemos una quiniela, sepamos qué posibilidades tenemos de que nos toque.

¿Estás preparado? ¿Estás preparada?

¡ADELANTE!

Imagen de atalaya bajo licencia Creative Commons

Imagen de hombredhojalata bajo licencia Creative Co

Imagen de marionzetta bajo licencia Creative Commons

Imagen de kainita bajo licencia Creative Commons

Imagen de wiros bajo licencia Creative Commons

A nuestro amigo Gonzalo de la peña "Los improbables", además de gustarle los juegos de azar, le encanta la pintura. Y aunque no te lo creas, a veces hace unas láminas casi de profesional.

Él tiene claro que si en su paleta mezcla los colores blanco y negro, obtiene tonalidades grises y que experimentando con otros colores en las proporciones adecuadas, puede conseguir el color y la tonalidad deseados.

Mezclar colores es un experimento en el que puede conocerse de antemano el resultado.

Sin embargo, situaciones como lanzar un dado, saber quién va a ganar en el partido de fútbol F.C. Barcelona - Real Madrid, averiguar qué número está pensando una persona, extraer cartas de una baraja española, girar una ruleta, etc., son fenómenos o experimentos de los que no sabemos cuál va a ser su resultado ya que se dan en situaciones de azar. Por eso se denominan **experimentos aleatorios**.

En este tema repasaremos todo lo que viste el curso pasado de Azar y Probabilidad

Curiosidad

El término **aleatorio**, proviene del latín ***alea***, que significa dado, suerte o azar.

La palabra **azar** proviene del vocablo árabe ***zahr***, que significa flor.

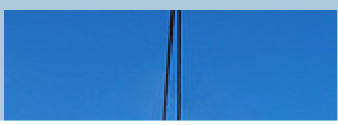


Imagen de Luciano Meirelles bajo licencia Creative Commons	Imagen de Kjunstorm bajolicencia Creative Commons

Importante

Los fenómenos o experimentos que dependen del azar se llaman **fenómenos o experimentos aleatorios.**

Los fenómenos o experimentos en los cuales los resultados producidos se pueden conocer de antemano se llaman **fenómenos o experimentos deterministas.**

Comprueba lo aprendido

Señala aquellos fenómenos o experimentos que sean aleatorios.

- [ ] a) Averiguar cuál será el próximo día que habrá luna llena
- [ ] b) Predecir el número de personas que acudirán al Barça-Madrid
- [ ] c) Averiguar el color de una bola al sacarla de una bolsa donde hay bolas de distintos colores
- [ ] d) Saber el resultado al lanzar un dado cúbico con sus caras numeradas del 1 al 6.

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Correcto
4. Correcto

Imagen de Mates y Más bajo licencia Creative Commons

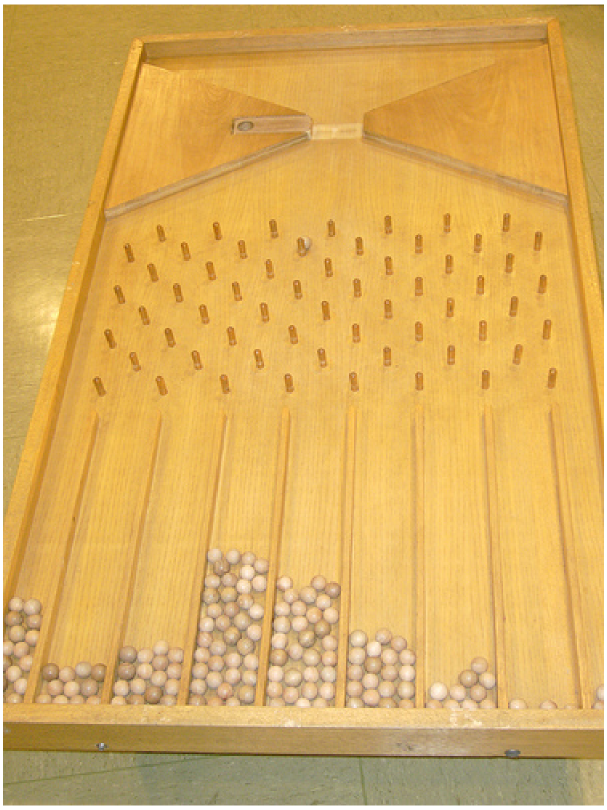


Imagen de Mates y Más bajo licencia Creative Commons

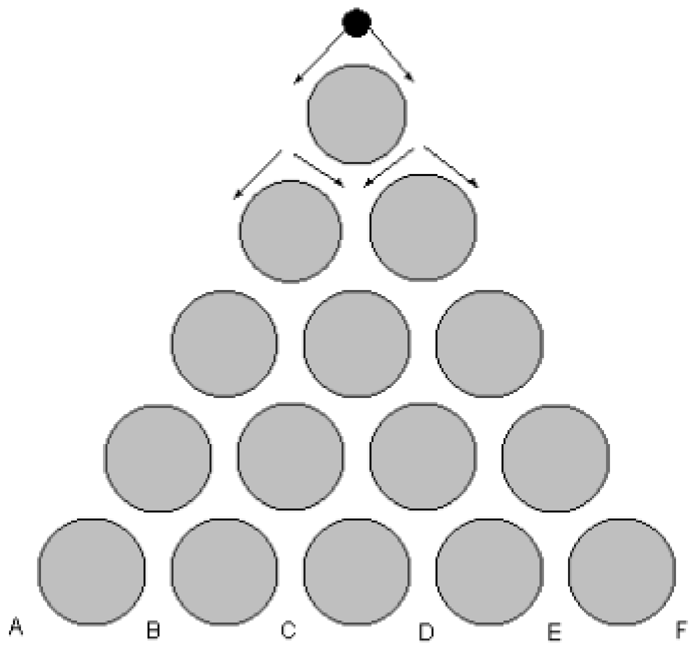
Por ejemplo si lanzamos una moneda al aire 10 veces (o 10 monedas a la vez).¿Qué número promedio de caras esperas obtener?

Si cada alumno elabora una tabla con el número de caras que ha obtenido al realizar la experiencia en repetidas ocasiones, se puede llevar a cabo un recuento de los resultados de la clase.

Si en la clase se ha realizado la experiencia un total de doscientas veces, por ejemplo, se puede obtener la misma distribución lanzando, por un aparato de Galton con diez filas de clavos, doscientas bolitas.

Este experimento de dejar caer las bolas por esta máquina llamada "Máquina de Galton" es un **experimento aleatorio**.

El trayecto seguido por cada bolita representa los diez resultados al lanzar la moneda diez veces. Las doscientas bolitas representan otras tantas realizaciones de la experiencia.



En el siguiente video se muestra como funciona la máquina de Galton.

Importante

En la escena anterior, los resultados que podemos esperar son que la bola caiga en A, B, C, D, E o F.

A este conjunto de resultados que se obtienen en un experimento aleatorio es lo que se llama **Espacio muestral** y se representa por la letra **E**.

En este ejemplo de la máquina de Galton, **E={A,B,C,D,E,F}**

En el ejemplo anterior de la máquina de Galton, podemos considerar algunos subconjuntos de **E**, como por ejemplo:

- Caer la bola en una esquina: P={A,F}.
- Caer la bola en el centro: Q={C,D}.
- Caer la bola en una posición par: R={B,D,F}.

Importante

A cada uno de estos subconjuntos del espacio muestral se les llama **suceso aleatorio.**

Al conjunto de todos los sucesos que ocurren en un experimento aleatorio se le llama **espacio de sucesos** y se nombra con la letra ***S***.

Ejemplos de espacios muestrales:

1. Una bolsa contiene bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas.

   E = {(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (n,b,b); (b,n,n); (n,b,n); (n,n ,b); (n, n,n)}

2. El suceso A = {extraer tres bolas del mismo color}.

   A = {(b,b,b); (n, n,n)}

3. El suceso B = {extraer al menos una bola blanca}.

   B= {(b,b,b); (b,b,n); (b,n,b); (n,b,b); (b,n,n); (n,b,n); (n,n ,b)}

4. El suceso C = {extraer una sola bola negra}.

   C = {(b,b,n); (b,n,b); (n,b,b)}

Comprueba lo aprendido

Accede a la siguiente animación de una carrera de camellos elaborada por Ana García López y Manuel Martínez Díaz.

En la parte superior tienes que escribir el número del camello que crees va a ganar, después pulsa en "Comenzar Carrera", en la parte inferior derecha.

Lanza los dados y el camello que lleve el número que resulte de la suma obtenida, se moverá una casilla.

Después de la carrera, contesta con verdadero o falso a las siguientes cuestiones.

Imagen de Saharauiak bajo licencia Creative Commons.

CARRERA DE CAMELLOS

Este experimento es aleatorio.

Sugerencia

Verdadero Falso

Verdadero
El resultado depende del azar.

El espacio muestral es **E={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}**

Sugerencia

Verdadero Falso

Falso
La suma de dos dados nunca puede ser 1.

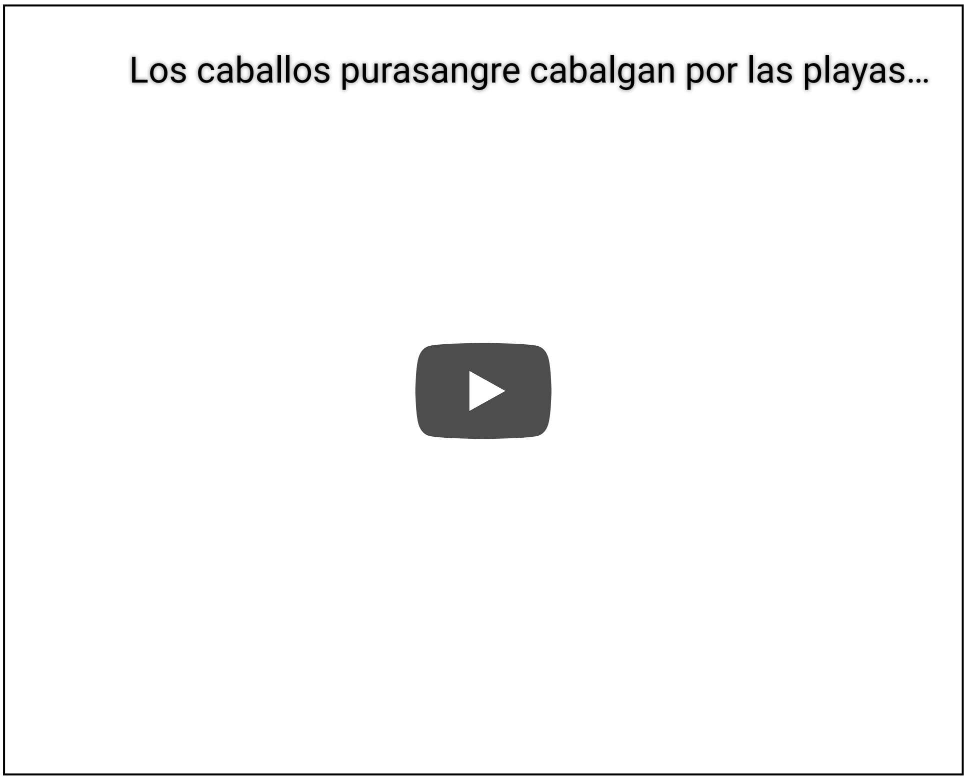
El suceso aleatorio salir número primo es P={2,3,5,7,11}

Sugerencia

Verdadero Falso

Verdadero
El número 1 no se considera número primo ni compuesto por convenio.

1.2. Compatibilidad de sucesos. Sucesos elementales y compuestos



Había amanecido un domingo soleado y M.ª José, la profesora de la Universidad de Nogara, llamó a sus amigos Gonzalo y Blanca para ir a ver una carrera de caballos en la playa de Sanlúcar de Barrameda, en Cádiz.

Gonzalo y Blanca se quedaron un poco extrañados de que hubiera carreras en la playa, pero cuando llegaron quedaron alucinados con el ambiente que allí había.

Imagen de Mates y Más bajo licencia Creative Commons

(314) Cuarta Carrera - Premio

PARQUE COMERCIAL LAS DUNAS

Handicap condicionado triplicado 2.ª parte

Distancia: 1.600

PROPIETARIO	N.º	CABALLO Y ORIGEN	K.	PREPARADOR Y JINETE
UADA GORDEJUELA	1	EUROBETIS	62	M. Álvarez B. Fayos
ARTEL SÁNCHEZ	2	MATILDA POLIPORT (GB) (4) (2)	61	Blas Rama I. López
ANLUQUEÑA	3	CELENA	60	J. Calderón F. Jiménez
ELSU	4	MISTER DRAGO (IRE)	60	J. Calderón D. Delgado
MADELAINE	5	AMISURA (FR) (5)	60	H. López R. Huaya
EL CABEZA	6	MISTERQUILLO (FR)	58	J. Calderón J. E. Jarki
AIRES DE DOÑANA	7	ACCOMPLISH (GB) (3)	58	E. Olgado N. García
C. ROBERTO COCHETEUX	8	POMPEYO (FR)	58	E. Olgado Sr. Soto
C. MONTERANA	9	HIGH WONDER (IRE) (5)	58	Juan Mart F. Alvarad

Imagen de Mates y Más bajo licencia Creative Commons

Una vez en la playa decidieron hacer una apuesta y como había 9 caballos y no entendían mucho decidieron tirar dos dados cúbicos numerados del 1 al 6 y sumar los resultados obtenidos, sin considerar resultados mayores de 9.

En un dado salió el 5 y en el otro el 2, con lo que apostaron por el caballo n.º 7 que se llamaba ACCOMPLISH.

Cuando terminó la carrera, se llevaron una gran decepción porque el caballo ganador fue EUROBETIS.

M.ª José les dijo que aunque hubieran tirado muchas veces el dado, nunca hubieran ganado la apuesta ya que el caballo que había ganado tenía el número 1, y es imposible que si sumamos el resultado de dos dados, consignamos el número 1, es decir, el suceso I={1} en el experimento aleatorio lanzar dos dados y sumar sus resultados se llama **suceso imposible**.

También les dijo que los sucesos que estaban formados por un único caballo, se llamaban **sucesos elementales** y que el formado por todos los caballos se llamaba **suceso seguro**.

Si hubieran decidido apostar por un caballo de origen francés, tendrían que haber considerado el suceso formado por los caballos n.º 5, 6 y 8, es decir, un suceso formado por más de un suceso elemental F={5,6,8}, o lo que es lo mismo un **suceso compuesto**.

Blanca le preguntó a M.ª José que si hubiera apostado por un caballo que no fuera francés, cuál hubiera sido el suceso que tendría que haber tomado y M.ª José le dijo que sería el **suceso contrario** y se representaría por:

$\overline{F}=\{1,2,3,4,7,9\}$.

Con tanto hablar de matemáticas, se les había olvidado que era la hora de comer y se fueron rápidamente para disfrutar del "pescaíto" de la ciudad.

En este enlace puedes realizar el experimento aleatorio de lanzar dos dados e indicar que sucesos ocurren o no, según el resultado.

Ejercicio resuelto

Después de una copiosa comida, nuestros amigos fueron a tomar café a la casa de una amiga de M.ª José y de paso echar una partidita al bingo, ya que como sabéis, una de sus pasiones son los juegos de azar.

Imagen de kainita bajo licencia Creative Commons

Gonzalo tomó el cartón **A**, Blanca el **B** y M.ª José el **C**.

		29		43	54		72	89
8	10	27		45			74	
	15		30	44	56	68		

A

	17		38	46		67		84
	19		34	48		69	78	
4		24			58		77	83

B

2		21			59	66	72
	10	28	30				76
			38	47	55		73

C

La amiga de M.ª José empieza a mover el bombo de lotería y va sacando bolas. Al cabo de un tiempo, Gonzalo, Blanca y M.ª José tienen casi completos sus cartones, pero la de un tiempo, Gonzalo, Blanca y M.ª José tienen casi completos sus cartones, pero la pregunta es:

a) ¿Pueden cantar Gonzalo y Blanca "Bingo" a la vez?

b) ¿Y Blanca y M.ª José?

c) ¿Y Gonzalo y M.ª José?

Razona tu respuesta.

¿Te acuerdas cómo se llamaban este tipo de sucesos que podían ocurrir a la vez y los que no podían ocurrir a la vez?

Mostrar retroalimentación

a) Gonzalo y Blanca no podrán cantar "Bingo" a la vez porque sus cartones no tienen ningún número en común.

b) Blanca y M.ª José tienen en común los números 38 y 84, por lo que si completan todo el cartón menos alguno de esos números, cantarán a la vez "Bingo".

c) Lo mismo ocurre con Gonzalo y M.ª José ya que tienen en común los números 10, 30, 72 y 89.

El curso pasado estudiaste el nombre estos sucesos.

Los sucesos de que cante "Bingo" Gonzalo y cante "Bingo" Blanca a la vez, se llaman **sucesos incompatibles**, porque no pueden ocurrir a la vez.

Los sucesos de que cante "Bingo" Blanca y cante "Bingo" M.ª José a la vez, se llaman **sucesos compatibles**, porque pueden ocurrir a la vez. Lo mismo ocurre con Gonzalo y Mª José.

Importante

Dos sucesos son **compatibles** cuando pueden ocurrir a la vez. Cuando no pueden darse al mismo tiempo, se denominan **incompatibles**.

Ejemplo:

Experimento aleatorio: Extraer de una baraja española una carta al azar.

Suceso A = "Obtener un oro"

Suceso B = "Obtener una figura"

A y B son **compatibles** porque puedo sacar la sota, el caballo o el rey de oros.

Imagen de GViciano bajo licencia Creative Commons

Si el suceso B hubiera sido "obtener un bastos", A y B serían **incompatibles**.

Importante

Imagen de sergis blog bajo licencia Creative Commons

Todos los sucesos de un experimento aleatorio pueden obtenerse a través de otros más simples llamados **sucesos elementales** o **casos posibles**, que están formados por un sólo resultado del experimento.

A estos sucesos formados por más de un suceso elemental se llaman **sucesos compuestos**.

Los sucesos elementales son incompatibles.

Los casos posibles que favorecen la obtención de un suceso dado se denominan **casos favorables** para este suceso.

Ejemplo:

Experimento aleatorio: Lanzar un dado cúbico numerado del 1 al 6.

A_1="Que salga el 1"

A_2="Que salga el 2"

A_3="Que salga el 3"

A_4="Que salga el 4"

A_5="Que salga el 5"

A_6="Que salga el 6"

Al lanzar un dado siempre ocurre uno de estos sucesos. Además, dos de ellos no pueden darse a la vez. Se llaman **sucesos elementales** o **casos posibles**.

Si tenemos el suceso B="Obtener un número menor que 3", se obtiene con A_1 y A_2. Se dice que B es un **suceso compuesto** y que A_1 y A_2 son los **casos favorables** a dicho suceso.

Comprueba lo aprendido

Contesta si cada uno de estos sucesos es **elemental**, **compuesto**, **seguro** o **imposible**.

El experimento es que sale una papeleta premiada de una rifa con papeletas numeradas del 1 al 100 y los sucesos son:

A="he comprado los números que acaban en 0"

B=" no he comprado papeletas"

C="he comprado los números que son múltiplos de 5"

D="he comprado todas las papeletas"

E="he comprado los números que no acaben ni en 0 ni en 5"

F="he comprado la papeleta con el número 24"

A es un suceso ________ .

B es un suceso ________ .

C es un suceso ________ .

D es un suceso ______ .

E es un suceso ______ .

F es un suceso ______ .

Escribe si son compatibles o incompatibles:

A y C son sucesos ______ .

C y E son sucesos ______ .

C y F son sucesos ______ .

Enviar

Imagen de Chesi bajo licencia Creative Commons

No te asustes que no vamos a ver sangre ni vamos a hablar de hospitales y médicos.
En este apartado repasaremos las principales operaciones matemáticas (no médicas), entre sucesos. Recuerda que el curso pasado estudiastes la unión, intersección y diferencia de sucesos. Aquí vamos a recordar este tipo de operaciones.

Importante

Imagen de Carlos Urzua bajo licencia Creative Commons

Recuerda que dos sucesos A y $\overline{A}$ son **contrarios** cuando al realizar una experiencia aleatoria:

- Son incompatibles.
- Se obtiene siempre uno de los dos.

El suceso seguro S y el suceso imposible $\emptyset$ son un ejemplo de sucesos contrarios.

Ejemplo:

Experimento aleatorio: Lanzamiento de un dado.

Sucesos:

A="Obtener un número impar".

B="Obtener un número par".

A y B son incompatibles, pero siempre se da uno de los dos. A y B son **sucesos contrarios**.

Si los sucesos son:

A="Obtener un número mayor que 0".

B="Obtener un número menor que 0", el segundo no puede darse nunca, mientras que el primero se da siempre.

Ejercicio resuelto

Después de la partida de bingo de nuestros amigos, empezó una de dados, donde se apostaban quién pagaba la cena.

El experimento consistía en lanzar un dado y anotar el resultado, y los sucesos eran los siguientes:

A="Salir un número impar" (ganaba Gonzalo).

B="Salir un número primo" (ganaba Blanca).

C="Salir un divisor de 6"(ganaba M.ª José).

D="Salir un múltiplo de 4" (ganaba la amiga de M.ª José).

Imagen de Gato Azul bajo licencia Creative Commons

a) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde ganan Gonzalo o Blanca?

b) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde ganan M.ª José o su amiga?

c) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde ganan Gonzalo y Blanca?

d) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde ganan M.ª José y su amiga?

e) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde gana Gonzalo y no gana Blanca?

f) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde gana Blanca y no gana M.ª José?

Mostrar retroalimentación

Tenemos los siguientes sucesos:

A={1,3,5}, B={2,3,5}, C={1,2,3,6} y D={4}.

a) Para que gane Gonzalo o gane Blanca, se tiene que realizar el suceso A o el suceso B. Este nuevo suceso se llama **suceso unión** de A y B y se representa $A \cup B$.

Este suceso unión está formado por los números impares y los números primos, $A \cup B = \{1,2,3,5\}$.

b) El suceso donde ganan M.ª José o su amiga será $C \cup D = \{1,2,3,4,6\}$.

c) Para que ganen Gonzalo y Blanca, tienen que realizarse a la vez los sucesos A y B. Este nuevo suceso se llama **suceso intersección** de A y B y se representa $A \cap B$.

Este suceso intersección está formado por los números impares que a la vez son primos, $A \cap B = \{3,5\}$.

d) En este caso, nunca podrán ganar a la vez M.ª José y su amiga ya que C y D son sucesos incompatibles y por lo tanto $C \cap D = \emptyset$.

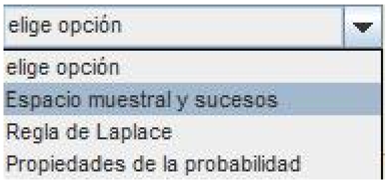
e) Para que gane Gonzalo y no gane Blanca, se tiene que realizar el suceso A y no se puede realizar el suceso B. Este nuevo suceso se llama **suceso diferencia** de A y B y se representa $A - B$.

Este suceso diferencia está formado por los números impares que no son primos, $A - B = \{1\}$.

f) En este caso $B - C = \{5\}$.

Reflexiona

En la página del proyecto ed@d (Enseñanza Digital a Distancia), tienes varias actividades donde puedes practicar con las operaciones entre sucesos. Haz clic en la siguiente imagen y elige la opción de "Espacio muestral y sucesos".



Mostrar retroalimentación

Haz clic en el botón que te aparece en la parte inferior "VER LA SOLUCIÓN".

Importante

Llamamos **suceso unión** de A y B al que se produce cuando se realiza A o B. Se representa por $A\cup B$.

Llamamos **suceso intersección** de A y B al que se produce cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B. Se representa por $A\cap B$.

Llamamos **suceso diferencia** de A y B al que se produce cuando se realiza el suceso A pero no se realiza el B. Se representa por $A-B$.

Existen dos leyes que son muy útiles a la hora de operar con sucesos contrarios; las **leyes de De Morgan**:

1.- El suceso contrario de la unión de dos sucesos es la intersección de sus sucesos contrarios: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

2.- El suceso contrario de la intersección de dos sucesos es la unión de sus sucesos contrarios: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

Ejercicio resuelto

Comprueba que se cumplen las leyes de Morgan con los sucesos de la partida de dados de nuestros amigos.

Comprueba que se cumplen $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{C \cap D} = \overline{C} \cup \overline{D}$.

Mostrar retroalimentación

$A \cup B = \{1,2,3,5\}$, $\overline{A \cup B} = \{4,6\}$

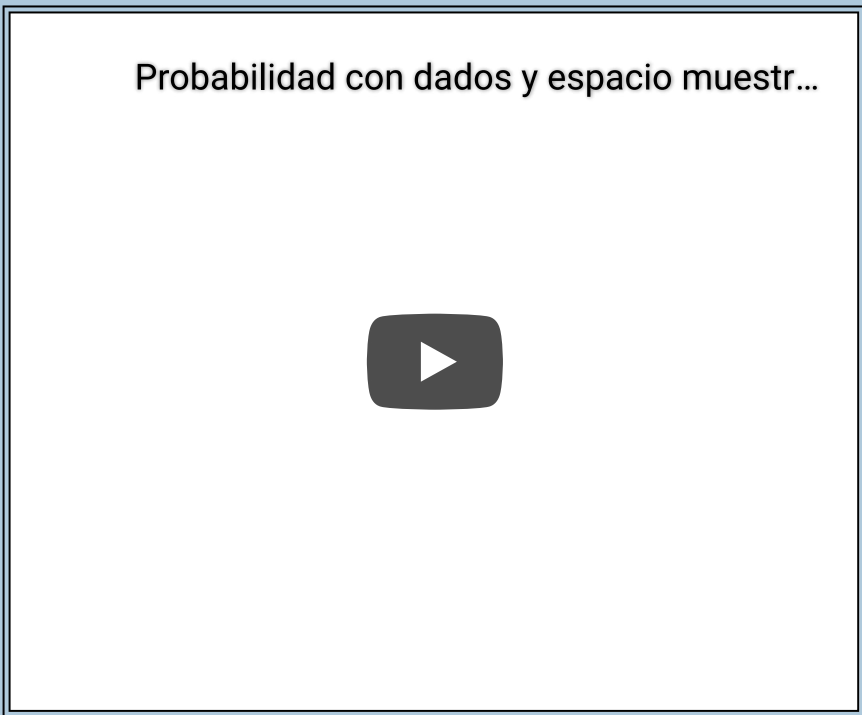
$\overline{A} = \{2,4,6\}$, $\overline{B} = \{1,4,6\}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4,6\}$

$C \cap D = \emptyset$, $\overline{C \cap D} = \{1,2,3,4,5,6\} = E$

$\overline{C} = \{4,5\}$, $\overline{D} = \{1,2,3,5,6\}$, $\overline{C} \cup \overline{D} = \{1,2,3,4,5,6\} = E$

Curiosidad

Aquí tienes un vídeo para que practiques en el lanzamiento de dados.



Para saber más

Augustus De Morgan nació el 27 de junio de 1806 en Mandura, en la India. A los 16 años entró en el Trynity Collage de Cambridge siendo alumno de Peacock, un

Imagen de Wikimedia Commons

Collage de Cambrigde siendo alumno de Peackock, un profesor a quién algunos calificaron como “el Euclides del Álgebra”, ya que pretendía sistematizar los contenidos de esta rama de las matemáticas para conseguir algo similar a "Los Elementos de Euclides".

De Morgan fue tutor de Lady Ada Lovelace, amiga de su esposa Sofía e hija de Lord Bayron.

Se cuenta que Babbage, Ada y De Morgan formaron una sociedad de apuestas en las carreras de caballos convencidos de que sus conocimientos sobre probabilidad les servirían para ganar el suficiente dinero para financiar la máquina para calcular que había diseñado Babbage. Al poco tiempo se convencieron de que no podían controlar con la probabilidad los caballos que iban a ganar.

Escribió libros sobre varios temas, aritmética, álgebra, análisis, lógica, siendo esta última el campo en el que más sobresalió.

Una de sus grandes aportaciones, son las leyes que llevan su nombre y que acabamos de ver en este tema.

De Morgan también estuvo interesado en la historia de las matemáticas y era un apasionado, como el que os escribe, de los acertijos matemáticos, llegando incluso a escribir algún libro sobre el tema.

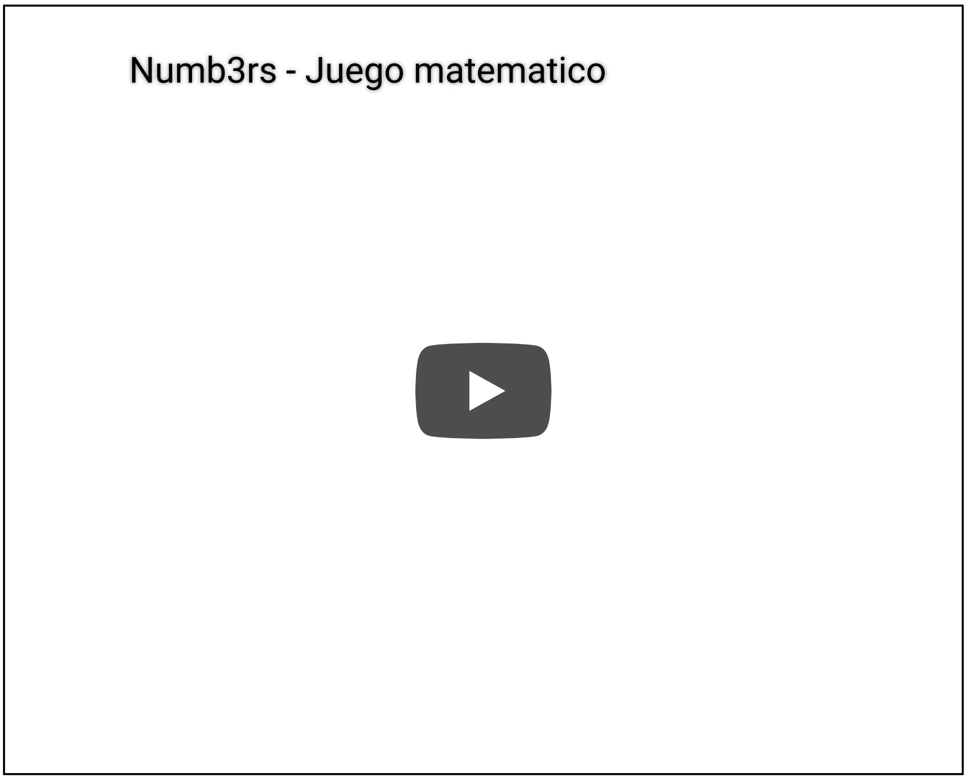
En uno de sus acertijos decía De Morgan que él tenía $\mathbf{x}$ años en el año $\mathbf{x^2}$.

¿Serías capaz de averiguar cuántos años tenía y en qué año, sabiendo que nació en 1806 y murió en 1871?

El problema de Monty Hall está inspirado en el concurso televisivo estadounidense Let's Make a Deal ("hagamos un trato"). El problema se conoce con el nombre del presentador de aquel concurso: Monty Hall.

En el siguiente vídeo de un capítulo de la serie de televisión Numb3rs, puedes ver de qué trata este problema.

Ahora nuestra pregunta es: ¿es mejor cambiar de tarjeta o seguir con la que había elegido inicialmente?, ¿dónde tengo más probabilidad de quedarme con el coche?



En la siguiente escena de GeoGebra creada por José Luis Álvarez García y Rafael Losada Liste puedes simular tres posibles alternativas: mantener siempre la elección inicial, cambiar siempre la elección inicial o elegir al azar si mantenemos la puerta elegida o cambiamos.

Haz clic en la imagen.

Imagen de Cirofono bajo licencia Creative Commons

En el juego anterior hablamos de qué tarjeta elegir para que tuviéramos mayor **probabilidad** de ganar el coche.

Recuerda del curso pasado que la probabilidad de que ocurriera un suceso se medía con un número comprendido entre 0 y 1, que si estaba cerca de 1 era más probable y cerca de 0, menos probable.

En la partida de dados de nuestros amigos de la Peña "Los improbables", M.ª José era la que tenía más posibilidades de ganar (mayor probabilidad), seguramente porque era la matemática y jugaba con ventaja, y la amiga de M.ª José era la que tenía más probabilidad de perder.

Gonzalo y Blanca tenían las mismas posibilidades, aunque menor que Mª José.

¿Por qué crees que ocurría esto?

Espero que a partir de ahora, si todavía no te has dado cuenta, seas consciente de lo importante que es saber matemáticas, al menos para que no te tomen el pelo.

Importante

Recuerda que llamamos **probabilidad** de un suceso A, al nivel de certeza que tenemos de que ocurra dicho suceso y esto se mide con un número comprendido entre 0 y 1.

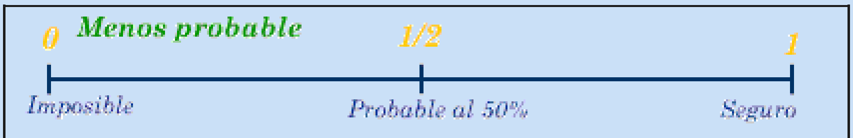


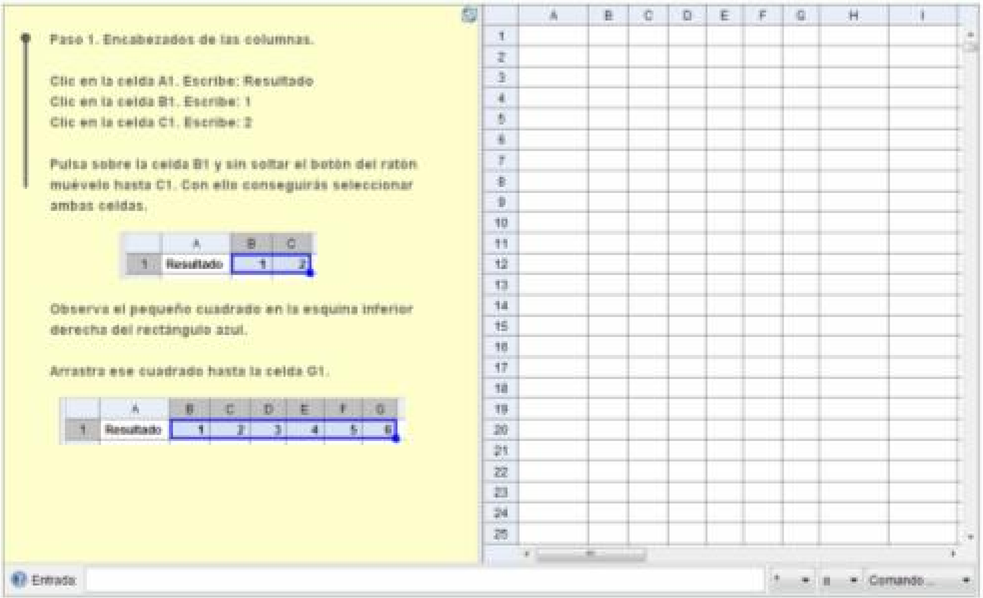
Imagen de Juan Pérez Rosales bajo licencia Creative Commons

Volvamos a la partida de dados de nuestros amigos.

En la siguiente escena de GeoGebra creada por José Luis Álvarez García y Rafael Losada Liste, puedes hacer una simulación del lanzamiento de mil dados cúbicos con números del 1 al 6, o lo que es lo mismo el lanzamiento de un dado mil veces.

Practica con ella e intenta responder a la pregunta que te hacía al principio de este apartado, sobre la probabilidad que tenía cada jugador de ganar.

Haz clic en la imagen.



Ejercicio resuelto

Imagen de Rennett Stowe bajo licencia Creative Commons

Supongamos que tomamos los resultados que vienen en el ejemplo de la escena de GeoGebra anterior. En mil lanzamientos, estas son las veces que han salido cada número:

Número	1	2	3	4	5	6
Número de veces	173	186	167	156	171	147

Si consideramos el suceso S="salir el 1"={1}, tenemos que ha salido 173 veces, o lo que es lo mismo, que su frecuencia absoluta es 173.

Como hemos lanzado el dado 1000 veces, tenemos que la frecuencia relativa de S es $f_r(S)=\frac{173}{1000}=0{,}173$.

a) ¿Cuál es la frecuencia relativa de "salir el 3"?

b) Si consideramos los sucesos de la partida de nuestros amigos:

A="Salir un número impar" (ganaba Gonzalo); B="Salir un número primo" (ganaba Blanca); C="Salir un divisor de 6"(ganaba M.ª José), D="Salir un múltiplo de 4" (ganaba la amiga de M.ª José).

¿Cuál es la frecuencia relativa de cada uno de los sucesos?

c) ¿Es cierto que Mª José tiene más posibilidades de ganar?

d) En este caso, ¿tienen las mismas posibilidades Gonzalo y Blanca de ganar? ¿Cuándo tendrían la misma posibilidad?

Mostrar retroalimentación

a) De la misma forma que con el 1, la frecuencia relativa de que salga el 3 es $\frac{167}{1000}=0{,}167$.

b) $f_r(A)=\frac{173+167+171}{1000}=\frac{511}{1000}=0{,}511$

$f_r(B)=\frac{186+167+171}{1000}=\frac{524}{1000}=0{,}524$

$f_r(C)=\frac{173+186+167+147}{1000}=\frac{673}{1000}=0{,}673$

$f_r(D)=\frac{156}{1000}=0{,}156$

c) Como ves en los resultados, de mil tiradas, M.ª José gana más veces, en 673 veces y su amiga sólo en 156.

d) En este ejemplo Blanca ganaría más veces que Gonzalo, pero sabes por el curso pasado que si lanzáramos el dado infinitas veces, la frecuencia relativa se convertiría en probabilidad y los dos tendrías la misma, en este caso $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Importante

Recuerda que llamamos **frecuencia absoluta de un suceso S**, y la representamos $f_a(S)$, al número de veces que ocurre dicho suceso.
Llamamos **frecuencia relativa de un suceso S**, y la representamos $f_r(S)$,al cociente de la frecuencia absoluta entre el número de veces, **n**, que se ha repetido el experimento, es decir $f_r(S)=\frac{f_a(S)}{n}$.

Cuando el número de pruebas que hacemos de un experimento crece indefinidamente, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en un número, que es la **probabilidad** del suceso. Este resultado es lo que llamamos **Ley de los grandes números**.

La probabilidad de un suceso S suele representarse por P(S) y tiene las siguientes propiedades:

1. La probabilidad de un suceso es siempre un número comprendido entre 0 y 1: $0\leq P(S)\leq 1$.
2. La probabilidad del suceso seguro es 1 y la del suceso imposible es 0: $P(E)=1$, $P(\emptyset)=0$.
3. La suma de las probabilidades de los sucesos elementales vale 1.
4. La suma de un suceso y de su suceso contrario vale 1: $P(\overline{S})=1-P(S)$.
5. La probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman.

Para saber más

En el siguiente enlace puedes comprobar la Ley de los grandes números y en la pestaña superior "Ejercicios" puedes practicar con problemas de probabilidad.

Importante

Unión de sucesos:

Si A y B son sucesos compatibles, la probabilidad de la unión es: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Comprueba lo aprendido

En una encuesta realizada entre el alumnado de 2º de Bachillerato de un instituto, el 80% utiliza la red social "Tuenti" y el 20% utiliza "Twitter".

Además, el 15% utiliza Tuenti y Twitter. ¿Con estos datos, cuál es la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, utilice Tuenti o Twitter?

Imagen de Jesús León bajo licencia Creative Commons

Llamamos TU al suceso "utilizar Tuenti" y TW al suceso "utilizar Twitter".

Las probabilidades que no da el problema son:

P(TU)=0,8; P(TW)= ____ y P(TU ∩ TW)= ____ .

El problema nos pide P(TU ∪ TW)=P(TU) + P(TW) - P(TU ∩ TW)= ____ + ____ - ____ = ____ .

Enviar

Después de un día tan ajetreado en Sanlúcar de Barrameda, nuestros amigos cogieron el coche de regreso a Mérida, en Extremadura, ya que iban a celebrar el cumpleaños de un amigo que conocieron en Trujillo pero ahora vivía en esta preciosa ciudad de Mérida.

Imagen de Mates y Más bajo licencia Creative Commons

Durante el viaje, Blanca comentó, que la amiga de M.ª José le había dicho en un momento de la tarde, que la probabilidad era mentira, porque tenías unos amigos aficionados al golf y cada vez que los veía jugar, comprobaba lo difícil que era meter la pelota en el agujero, pero sin embargo la probabilidad, según ella era del 50 %, o la metía o la tiraba fuera.

Imagen de Dan perry bajo licencia Creative Commons

Gonzalo empezó a dudar, pero rápidamente M.ª José los sacó de dudas.

Existe una regla en probabilidad que se llama **Regla de Laplace**, que nos dice que la probabilidad de que ocurra un suceso es igual al cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, pero...

Blanca la interrumpió diciéndole, eso es. Si consideramos el suceso "meter la bola con un lanzamiento", los casos posibles son 2, meterla o fallar y los casos favorables son 1, meterla, luego la probabilidad es 1/2.

Entonces M ª José le dijo que la dejara terminar.

La regla de Laplace sólo es válida cuando los sucesos son equiprobables, es decir, cuando tienen la misma probabilidad de que ocurran, y en este caso, para que fueran equiprobables, tendríamos que llenar el campo de golf de agujeritos del tamaño del agujero principal y considerar el agujero donde está el banderín como 1 entre muchos, con lo cual no son equiprobables los sucesos meter la bola en un agujerito pequeño y colocar la bola en el resto del campo que imaginariamente estaría formado por multitud de agujeritos del mismo tamaño. Y no se puede aplicar esta regla.

Gonzalo se puso muy contento y le dijo a M.ª José, por fin lo he entendido.

Cuando ya estaban llegando a su destino, M.ª José les dijo a sus amigos, que en el cumpleaños de sus amigos, que iban a ir 40 personas, casi seguro que habría otra persona allí que cumpliera los años también ese día, ya que había una probabilidad de más del 90% de que esto ocurriera.

Compruébalo cuando estés con un grupo de más de 30 personas.

En este último apartado del tema, recordaremos como utilizar la probabilidad para resolver problemas, siempre analizando previamente si los sucesos son equiprobables o no.

Curiosidad

Aquí tienes una **Miniquest** para trabajar la paradoja del cumpleaños.

Importante

Regla de Laplace:

Si un espacio muestral está formado por un número finito de sucesos simples y todos ellos tienen la misma posibilidad de suceder, entonces la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles.

$$P(A)=\frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Los **casos posibles** son todos los resultados del experimento, es decir, todos los elementos del espacio muestral y los **casos favorables** son los elementos del suceso A.

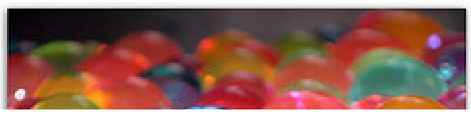
En casos como el lanzamiento de una chincheta, o cuando un dado está mal construido, los sucesos no son equiprobables, no se puede utilizar la regla de Lapalce y hay que recurrir a la Ley de los grandes números.

Ejercicio resuelto

En una bolsa se introducen 4 bolas azules, 4 rojas y 2 verdes. Se agita la bolsa y seguidamente se extraen tres bolas, de las que dos son rojas y una azul.
A continuación se extrae otra bola.
¿Qué color es el que tiene mayor probabilidad de ser elegido?

Mostrar retroalimentación

El color que tiene más probabilidad de ser elegido es el azul, ya que:



$P(azul)=\frac{3}{7}$; $P(roja)=\frac{2}{7}$; $P(verde)=\frac{2}{7}$

Imagen de Bananaguay bajo licencia Creative Commons

Ejercicio resuelto

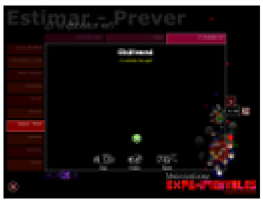
En el siguiente enlace puedes ver la regla de Laplace y en la pestaña superior "Ejercicios" puedes practicar con problemas de probabilidad.

Mostrar retroalimentación

Para ver las soluciones haz clic en "Ver la solución".

Para saber más

En este enlace, practica en el apartado Estimar-Prever, en las actividades que aparecen en las pestañas superiores.



Comprueba lo aprendido

Calcula las siguientes probabilidades. Escribe el resultado en decimales utilizando la coma.

1. Experimento: sacar una carta de una baraja española de 40 cartas.

Sucesos: A="salir As" , B="salir figura", C="salir espadas"

a) P(A)= [ ]

b) P(B)= [ ]

c) P(C)= [ ]

d)P($\overline{B}$)=1- [ ] = [ ]

2. Experimento: Lanzar dos dados cúbicos numerados del 1 al 6.

Sucesos: A="la suma de las caras superiores es 7" , B="Los números de las dos caras superiores son primos"

a) P(A)= [ ] /36.

b) P(B)= [ ] /36.

Enviar

Curiosidad

En esta página creada por Ricardo B. Cervantes Quintana, podrás conocer un poco más del famoso problema propuesto por el Conde de Buffon.

¿Qué tiene que ver la **aguja de Buffon**, con la probabilidad y con el número π?

Al hallar probabilidades de sucesos complicados, suele resultar difícil y tediosa una enumeración de los casos. La aplicación de la combinatoria facilita mucho esa tarea.

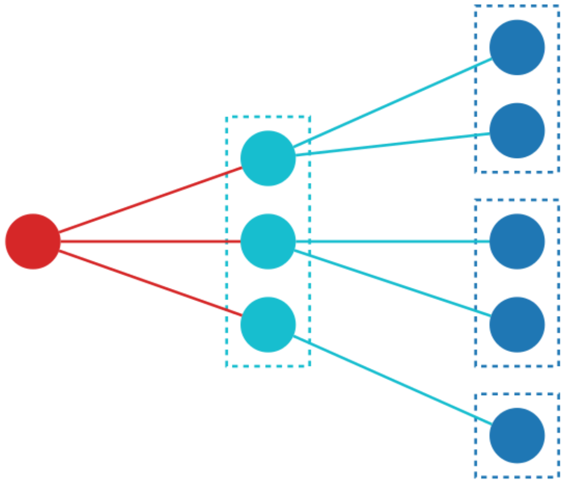


Imagen en Wikimedia Commons. Licencia CC

Importante

Principio fundamental del análisis combinatorio (principio de multiplicación)

Si un suceso puede ocurrir de n_1 formas, y si cuando éste ha ocurrido otro suceso puede ocurrir de n_2 formas, entonces el número de formas en que ambos pueden ocurrir en el orden especificado es $n_1 \cdot n_2$ formas.

Ejercicio resuelto

Un restaurante tiene una carta que consta de cuatro primeros platos y tres segundos. ¿Cuántos menús formados por dos platos, uno del primer grupo y otro del segundo, se pueden confeccionar?

Fotografía de Jorge Franganillo en Flickr. Licencia CC

Mostrar retroalimentación

Denotemos por 1,2,3 y 4 los primeros platos de la carta y por A, B y C los segundos platos. Construyamos el siguiente diagrama de árbol:

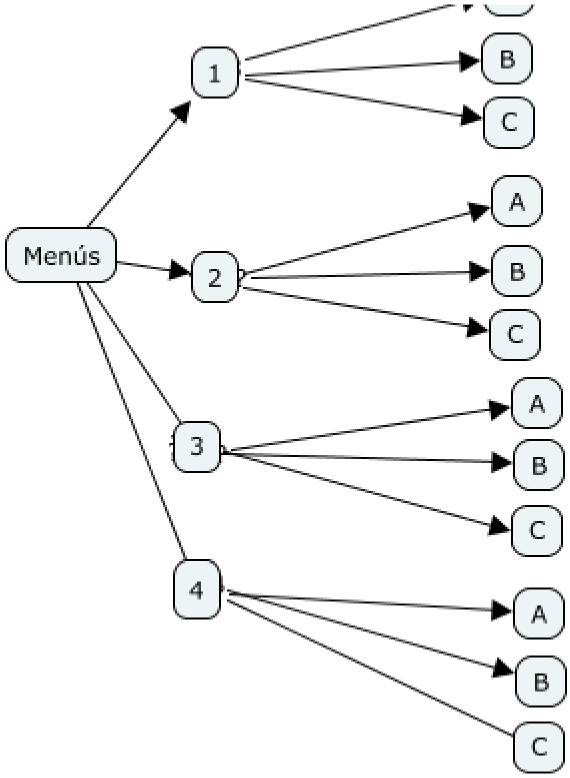


Imagen de elaboración propia . Licencia CC0

Luego los menús que se pueden formar son.

1A	1B	1C
2A	2B	2C
3A	3B	3C
4A	4B	4C

Por tanto hay 12 posibilidades. Este resultado se puede obtener de forma más rápida aplicando el principio fundamental. En este caso S_1 consta de cuatro elementos y S_2 de tres. El conjunto de pares distintos, en el supuesto que no hayan platos comunes, serán: 4x3=12.

El principio fundamental se puede generalizar para más de dos sucesos, como vamos a ver en el siguiente caso práctico.

Ejercicio resuelto

¿Cuántos grupos de seis cartas se pueden formar con una baraja de 40 cartas, en los siguientes casos?

1. Se extrae una carta y se devuelve a la baraja, así sucesivamente hasta extraer las seis cartas.

2. Se extrae una carta y no se devuelve a la baraja, esta acción se realiza de forma sucesiva hasta obtener el grupo de seis cartas.

Fotografía de Nacho en Flickr . Licencia CC

Mostrar retroalimentación

1. Sea E el conjunto formado por las 40 cartas. Sacamos una carta, la apuntamos como primer componente del grupo de seis. Devolvemos la carta a la baraja y volvemos a sacar otra y la apuntamos como segunda componente y así sucesivamente, hasta que se han completado las seis extracciones (a este tipo de extracción se le llama muestreo con reposición). De esta forma una misma carta puede aparecer varias veces en el grupo de seis cartas. Aplicando el principio fundamental, se puede elegir la primera carta de 40 formas y así sucesivamente; luego el número de grupos de seis cartas que se pueden obtener es:

$$40 \cdot 40 \cdot 40 \cdot 40 \cdot 40 \cdot 40 = 4096.000.000$$

2. Sea E el conjunto formado por las 40 cartas. Sacamos una carta, la apuntamos como primer componente del grupo de seis. Dejamos esta carta aparte y volvemos a sacar otra y la apuntamos como segunda componente y así sucesivamente, hasta que se han completado las seis extracciones (a este tipo de extracción se le llama muestreo sin reposición). Aplicando el principio fundamental, se puede elegir la primera carta de 40 formas, la segunda de 39 formas, la tercera de 38 y así sucesivamente; luego el número de grupos de seis cartas que se pueden obtener es:

$$40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 = 2763.633.600$$

Un concepto importante dentro del estudio de la combinatoria es el de factorial, el cual vamos a ver a continuación.

Importante

Sea n un número entero no negativo, se define el factorial de n, n! de la siguiente forma:

1. 0!=1
2. Si n>0, entonces $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Del punto 2 se deduce que n!=n(n-1)!

Así por ejemplo, el factorial de los siguientes números es:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$
$$0! = 1$$
$$7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040$$

En ocasiones los sucesos que conforman un grupo de los mismos se ordena según una ley dada. Las principales formas de ordenación que se estudian en análisis combinatorio las vamos a ver a continuación.

3.1. Variaciones

En música se entiende por "variación" a una técnica compositiva en que un tema se repite con cambios a lo largo de una pieza. Como ejemplo de variación tenemos las variaciones Goldberg de Juan Sebastián Bach, de la cual te invitamos a escuchar el fragmento que te enlazamos antes de afrontar el estudio de este apartado.

Johann Sebastian Bach

Imagen en Wikimedia Commons. Dominio Público

Importante

Si tenemos una colección de n elementos de los cuales queremos obtener grupos de r elementos ($r \leq n$), al número de grupos que se pueden formar, los cuales se distinguen unos de otros en al menos un elemento, o en el orden de colocación de los mismos se le llama **variaciones de n elementos tomados de r en r** (V_n^r), las cuales se calculan de la siguiente forma.

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejercicio resuelto

Con las cifras 1,2,3,4,5 y 7 se formar grupos de cinco en los cuales no se repite ninguna.

a. ¿Cuántos números se pueden formar?

Fotografía de Matthew Perkins en Flickr . Licencia CC

Mostrar retroalimentación

a. La cantidad de números que se pueden formar con cinco cifras (de las dadas) es igual al número de variaciones de 6 elementos tomados de cinco en cinco:

$$V_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Importante

Si tenemos una colección de n elementos de los cuales queremos obtener grupos de r elementos ( ), al número de grupos que se pueden formar, los cuales se distinguen unos de otros en al menos un elemento, en el orden de colocación de los mismos, y además se pueden repetir, se le llama **variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r** (VR_n^r), las cuales se calculan de la siguiente forma.

$$VR_n^r = n^r$$

Ejercicio resuelto

En el juego de las quinielas, ¿cuál es el número mínimo de columnas que han de rellenarse para acertar con seguridad los catorce signos.

Fotografía de J J Merelo en Flickr . Licencia CC

Mostrar retroalimentación

Una columna es un conjunto con 14 huecos. En cada uno de ellos podemos poner uno de los tres signos 1,X y 2.

Se trata de hallar el número de variaciones con repetición de orden 14 (los 14 huecos) de 3 elementos. Habrá que rellenar.

$$VR_3^{14} = 3^{14} = 4\,782\,969 \text{ columnas}$$

columnas.

3.2. Permutaciones

Dentro de la interpretación musical los compositores gustan de explorar las distintas permutaciones que pueden realizar con las notas musicales y observar los efectos, tanto melódicos como armónicos, que pueden conseguir. Cada género musical tienes sus permutaciones sonoras características, como se puede apreciar en este fragmento de Jazz que te dejamos a continuación.

Satin Doll. Joe Pass.
Vídeo de GtrWorkShp alojado en Youtube

Importante

Si disponemos de un conjunto A de n elementos. Una permutación es una lista ordenada formada por los n elementos de A. Dos permutaciones de A difieren en la colocación de al menos uno de los elementos. Para hallar el número de permutaciones que podemos obtener del conjunto A se utiliza la siguiente fórmula.

$$P_n = n!$$

Las permutaciones pueden considerarse un caso particular de las variaciones, ya que si queremos hallar las variaciones de n elementos tomados de n en n:

$$V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$$

Ejercicio resuelto

¿De cuántas maneras se pueden distribuir siete personas en una fila de siete sillas?

Fotografía de Noticias UFM en Flickr . Licencia CC

Mostrar retroalimentación

Las diferentes maneras de colocarlos se corresponden con las posibles permutaciones de siete personas y éstas son:

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Importante

Si tenemos un conjunto A de n elementos, y queremos hallar el número de permutaciones que podemos crear teniendo en cuenta que el primer elemento de A se repite r_1 veces, el segundo r_2 veces, y así sucesivamente. La fórmula que emplearemos es la siguiente:

$$PR_k^{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \frac{k!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_n!}$$

siendo: $k = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$

Ejercicio resuelto

¿Cuántos números de cinco cifras pueden escribirse con tres sietes y dos nueves?

Mostrar retroalimentación

Vemos que con tres sietes y dos nueves se pueden obtener números de cinco cifras, y estos se pueden repetir como indica el enunciado, de ahí que la solución es:

$$PR_{3,2}^5 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = 10$$

3.3. Combinaciones

En nuestra sociedad podemos encontrarnos con muchas situaciones en las cuales manejamos series de números que son diferentes en al menos una cifra, como es el caso de la guía telefónica. O bien el orden que aparecen los elementos que componen un grupo determinado de objetos es irrelevante, como es el caso del póker, en este juego al repartir cartas para formar una mano de póker, el resultado es independiente del orden en que las cinco cartas hayan llegado al jugador.

Fotografía de Arcaion en Pixabay, Licencia CC

Importante

Sea A un conjunto finito con n elementos (n>0) y r un número natural $r \leq n$. Una combinación de orden r de A es un grupo de r elementos A que se diferencian unos de otros en al menos un elemento. Se calculan de la siguiente forma:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

A C_n^r se le designa también como $\binom{n}{r}$ a esta última notación se le llama **número combinatorio**.

Ejercicio resuelto

Determínese el número de manos de póker distintas (cinco cartas) que pueden formarse con una baraja de 52 naipes. ¿Cuántas manos contienen exactamente tres ases?

Fotografía de Café en Pixabay, Licencia CC

Mostrar retroalimentación

El número de manos de póker distintas es el mismo que el número de combinaciones de orden 5 que se pueden formar con un conjunto de 52 elementos. Es decir,

$$C_{52}^{5}=\frac{52!}{5!\cdot 47!}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot \cancel{47!}}{5!\cdot \cancel{47!}}=2598960\ combinaciones$$

Importante

Sea A un conjunto finito con n elementos (n>0) y r un número natural. Una combinación con repetición de orden r de A es una lista $(a_1,a_2,\ldots,a_r)$ de elementos de A, en donde los elementos pueden repetirse. Diremos que dos combinaciones con repetición son diferentes si algún elemento de una de las dos listas no se encuentra en la otra.

$$CR_n^r=C_{n+r-1}^r=\binom{n+r-1}{r}$$

Ejercicio resuelto

Determina el número de combinaciones con repetición de orden 3, del conjunto A={1,2,3,4}.

Fotografía de geralt en Pixabay, Licencia CC

Mostrar retroalimentación

Aplicando la fórmula se tiene:

$$CR_4^3=\binom{4+3-1}{3}=\binom{6}{3}=20$$

4. Axiomática de Kolmogorov

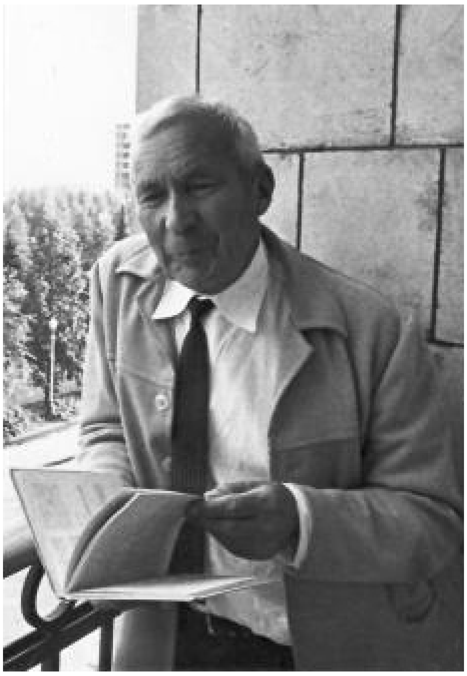


Imagen en Wikimedia Commons. Licencia CC

El matemático ruso Andrei Kolmogorov (1903, 1987) basándose en las propiedades del álgebra de sucesos y en las propiedades de las frecuencias relativas, dio una definición de probabilidad basada en un sistema de axiomas.

Importante

Axiomas de Kolmogorov

Supóngase que tenemos un espacio muestral $\wp$. Si $\wp$ es discreto todos los subconjuntos corresponden a sucesos y recíprocamente, pero si $\wp$ es continuo solamente subconjuntos especiales (llamados medibles) corresponden a sucesos. A cada suceso A en la clase $\mathcal{C}$ de sucesos asociamos un número real P(A), es decir P es una función de valor real definida en $\mathcal{C}$. Así P se llama función de probabilidad y P(A) la probabilidad del suceso A, si se satisfacen los axiomas siguientes:

Axioma 1. Para cada suceso A en la clase $\mathcal{C}$.

$P(A) \geq 0$

Axioma 2. Para el suceso cierto o seguro $\wp$ en la clase $\mathcal{C}$

P($\wp$)=1

Axioma 3. Para cualquier número de sucesos mutuamente excluyentes A_1, A_2... en la clase $\mathcal{C}$.

$$P(A_1 U A_2 U ...) = P(A_1) + P(A_2) + ...$$

En particular, para solo dos sucesos mutuamente excluyentes A_1, A_2,

$$P(A_1 U A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

De los axiomas de arriba se pueden deducir los siguientes teoremas.

Importante

Teorema 1

Si $A_1 \subset A_2$ entonces $P(A_1) \leq P(A_2)$ y $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$.

Este resultado es equivalente al siguiente: $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

Teorema 2

Para cada suceso A se cumple que $0 \leq P(A) \leq 1$.

Teorema 3

La probabilidad del suceso imposible es 0. Es decir $P(\emptyset) = 0$.

Teorema 4

Si A' es el complemento de A se cumple que $P(A') = 1 - P(A)$.

Teorema 5

Si $A = A_1 U A_2 U ... U A_n$ y $A_1, A_2, ..., A_n$ son sucesos mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

En particular si $A = \wp$ el espacio muestral, entonces:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$$

Teorema 6

Si A y B son dos sucesos cualesquiera, entonces:

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Comprueba lo aprendido

Ana estaba entretenida con las fichas del Scrabble. Separó unas cuantas letras y dijo a sus amigos:

Tengo aquí las fichas A, B, C, D y E. Las letras A y E valen 1 punto cada una, las letras B y C valen 3 puntos, y la letra D sólo vale 2 puntos.

Vamos a usar los sucesos X = "Sacar la A, la B o la C", Y = "Sacar la B, la C o la D" y Z = "Sacar una ficha de tres puntos".

Sólo os diré que,

- P(X) = P({A, B, C}) = 0,7
- P(Y) = P({B, C, D}) = 0,8
- P(Z) = P({B, C}) = 0,5

come quando fuori piove, de **auro**, CC by-nc-nd 2.0

a) Antes de empezar, ¿qué suceso sería la unión de los dos primeros?

Sugerencia

- X U Y = {A, B, C, B, C, D}
- X U Y = {A, B, C, D}

No, estás repitiendo sucesos elementales

Correcto, son los elementos que pertenecen a alguno de los dos, o a los dos a la vez.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

b) ¿Qué suceso sería la intersección de los dos primeros?

- X ∩ Y = {B, C}
- X ∩ Y = {A, D}

Correcto, son los elementos que pertenecen a los dos a la vez

No, recuerda que la intersección de dos sucesos son los elementos que pertenecen a ambos a la vez.

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una de las cuatro primeras letras?
Sugerencia

- 1,5
- 1

No, recuerda que P(X U Y) = P(X) + P(Y) - P(X ∩ Y)

Correcto. P(X U Y) = P(X) + P(Y) - P(X ∩ Y) = 0,7 + 0,8 - 0,5 = 1, ya que X ∩ Y = Z

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

d) ¿Cuál es la probabilidad de sacar la letra E?
Sugerencia

- 1 / 5 = 0,2
- 0

No, puesto que no sabemos si todas las letras tienen la misma probabilidad de salir.

Exacto. Si usamos la probabilidad del complementario, sabemos que P({E}) = 1 - P($\{E\}^C$) = 1 - P("Sacar una de las cuatro primeras letras") = 1 - 1 = 0.

Por lo tanto es imposible que salga una E.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

e) ¿Cuál es la probabilidad de que salga una letra de 2 puntos?
Sugerencia

- 0,8
- 0,3

No. Recuerda que la única letra de 2 puntos es la D.

Correcto, ya que {D} = Y - Z, luego P(Y - Z) = P(Y) - P(Y∩Z) = 0,8 - 0,5 = 0,3

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

Ejercicio resuelto

Demuestra los teoremas 1, 2 y 3.

Mostrar retroalimentación

Demostración del teorema 1

Tenemos $A_2 = A_1 + (A_2 - A_1)$ al ser sucesos mutuamente excluyentes, entonces por el axioma 3.

$P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1)$ de ahí que $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - p(A_1)$

Puesto $P(A_2 - A_1) \geq 0$ de ahí se deduce que $P(A_2) \geq P(A_1)$.

Demostración del teorema 2

Por el axioma 1 sabemos que $P(A) \geq 0$. Para demostrar que $P(A) \leq 1$ primero observamos que $A \subset \wp$. Así por el teorema 1 y el axioma 2 $P(A) \leq P(\wp) = 1$.

Demostración del teorema 3

Tenemos $\wp = \wp \cup \emptyset$. Puesto que $\wp \cap \emptyset = \emptyset$ se sigue del axioma 3

$P(\wp) = P(\wp) + P(\emptyset)$ ó $P(\emptyset) = 0$.

Importante

Los fenómenos o experimentos que dependen del azar se llaman **fenómenos o experimentos aleatorios.**

Los fenómenos o experimentos en los cuales los resultados producidos se pueden conocer de antemano se llaman **fenómenos o experimentos deterministas.**

Importante

En la escena anterior, los resultados que podemos esperar son que la bola caiga en A, B, C, D, E o F.

A este conjunto de resultados que se obtienen en un experimento aleatorio es lo que se llama **Espacio muestral** y se representa por la letra **E**.

En este ejemplo de la máquina de Galton, **E={A,B,C,D,E,F}**

A cada uno de estos subconjuntos del espacio muestral se les llama **suceso aleatorio.**

Al conjunto de todos los sucesos que ocurren en un experimento aleatorio se le llama **espacio de sucesos** y se nombra con la letra ***S***.

Importante

Llamamos **suceso unión** de A y B al que se produce cuando se realiza A o B. Se representa por $A \cup B$.

Llamamos **suceso intersección** de A y B al que se produce cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B. Se representa por $A \cap B$.

Llamamos **suceso diferencia** de A y B al que se produce cuando se realiza el suceso A pero no se realiza el B. Se representa por $A - B$.

Existen dos leyes que son muy útiles a la hora de operar con sucesos contrarios; las **leyes de De Morgan**:

1.- El suceso contrario de la unión de dos sucesos es la intersección de sus sucesos contrarios: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2.- El suceso contrario de la intersección de dos sucesos es la unión de sus sucesos contrarios: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Importante

Recuerda que llamamos **probabilidad** de un suceso A, al nivel de certeza que tenemos de que ocurra dicho suceso y esto se mide con un número comprendido entre 0 y 1.

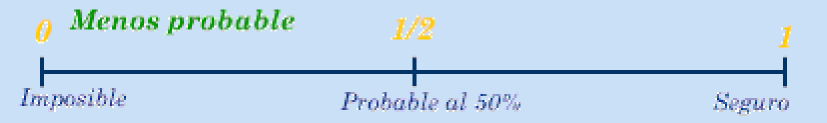


Imagen de Juan Pérez Rosales bajo licencia Creative Commons

Importante

Recuerda que llamamos **frecuencia absoluta de un suceso S**, y la representamos $f_a(S)$, al número de veces que ocurre dicho suceso.
Llamamos **frecuencia relativa de un suceso S**, y la representamos $f_r(S)$,al cociente de la frecuencia absoluta entre el número de veces, **n**, que se ha repetido el experimento, es decir $f_r(S) = \frac{f_a(S)}{n}$.

Cuando el número de pruebas que hacemos de un experimento crece indefinidamente, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en un número, que es la **probabilidad** del suceso. Este resultado es lo que llamamos **Ley de los grandes números**.

La probabilidad de un suceso S suele representarse por P(S) y tiene las siguientes propiedades:

1. La probabilidad de un suceso es siempre un número comprendido entre 0 y 1: $0 \leq P(S) \leq 1$.
2. La probabilidad del suceso seguro es 1 y la del suceso imposible es 0: $P(E) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
3. La suma de las probabilidades de los sucesos elementales vale 1.
4. La suma de un suceso y de su suceso contrario vale 1: $P(\overline{S}) = 1 - P(S)$.
5. La probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman.

Importante

Regla de Laplace:

Si un espacio muestral está formado por un número finito de sucesos simples y todos ellos tienen la misma posibilidad de suceder, entonces la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favorables a } A}{\textit{número de casos posibles}}$$

Los **casos posibles** son todos los resultados del experimento, es decir, todos los elementos del espacio muestral y los **casos favorables** son los elementos del suceso A.

En casos como el lanzamiento de una chincheta, o cuando un dado está mal construido, los sucesos no son equiprobables, no se puede utilizar la regla de Lapalce y hay que recurrir a la Ley de los grandes números.

Aviso Legal