PAU

Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas

Expresiones numéricas: Números enteros y racionales

1. Introducción. Números naturales

Facultad de Ciencias Políticas, Amsterdam

Imagen en INTEF de Pablo Garrido Pintado bajo CC

Bienvenido a este curso para preparar las pruebas de acceso a la universidad para mayores de 25 años, en la materia de matemáticas. En él encontrarás todo lo necesario para poder preparar convenientemente dichas pruebas, y adquirirás los conocimientos necesarios para poder afrontar los estudios que elijas.

Ponte manos a la obra, sé constante, sobre todo no desesperes ni decaigas en el intento, ¡y lo conseguirás!

Vas a comenzar con este primer tema, en el que realizarás un repaso por los conjuntos de números más básicos que hay: los naturales, los enteros y los racionales. Verás las operaciones que se pueden realizar con ellos, incluyendo las potencias y las raíces o radicales.

Curiosidad

Steve Jobs (1955-2011), fundador de Apple y Pixar, inauguró el curso académico de 2005 en la Universidad de Stanford, con un discurso que ha hecho historia. Si quieres comenzar conociendo sus consejos sobre cómo afrontar los estudios y la vida, puedes verlo en el siguiente vídeo:

1.1. Números para contar

El ser humano ha sentido siempre la necesidad de contar. En un principio, el hombre prehistórico utilizaba piedras y ramas para representar números y operar con ellos. De hecho, la palabra cálculo viene del latín *Calculus* y significa piedra pequeña o guijarro. Se conoce que la idea de enumerar mediante muescas en un hueso o en la piedra es antiquísima, desde luego anterior a la rueda, aunque posterior a la utilización del fuego.

Los **números naturales** nos sirven para contar. Si te dicen el número de personas que asisten a un concierto o a una reunión, o te preguntan por la edad, por el número de hijos, o por las estrellas que podrías contar en una noche entera, los estarás usando.

Imagen en arte y fotografía de Salvador bajo CC

Importante

El conjunto de los **números naturales**, que lo representaremos por $\mathbb{N}$, está formado por los números:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,...\}$$

Por tanto, los números naturales son los que empezando en cero (aunque algunos matemáticos proponen que empiezan en el uno), van aumentando de uno en uno, y no tienen final.

Fíjate que, como cualquier conjunto matemático, se expresa poniendo entre llaves unos cuantos de sus elementos. Para expresar que un número pertenece al conjunto de los números naturales, se utiliza el símbolo de pertenencia $\in$, lo mismo que para indicar, en general, que un elemento forma parte de un conjunto. Por ejemplo, para decir que el 12 es un número natural tendrás que escribir que $12 \in \mathbb{N}$, expresión que se lee "12 pertenece a $\mathbb{N}$".

Con los números naturales se puede operar, y seguro que recuerdas cómo hacerlo, no obstante el siguiente vídeo nos lo recuerda en un momento:

Importante

En multitud de ocasiones tenemos que realizar más de una operación a la vez. Para ello, tendremos en cuenta la **prioridad de las operaciones**, que es la siguiente:

1. Operaciones con paréntesis y corchetes.
2. Multiplicación y división.
3. Sumas y restas.

Este orden en las operaciones lo deberás aplicar en cualesquiera operaciones que tengas que realizar en matemáticas, y con cualquier conjunto de números, ya sean naturales, enteros, etc.

Ejercicio resuelto

En la familia Martínez-Cruz están haciendo un análisis de su economía doméstica. La señora Cruz trabaja por horas con el siguiente horario de trabajo: los lunes, miércoles y viernes trabaja cuatro horas al día, los martes y los jueves sólo tres horas por día y sabemos que cobra a 14 € la hora. Su marido, el señor Martínez tiene un sueldo de 1620 € al mes, y su hijo Miguel gana la mitad que su padre.

¿Cuánto ingresa la familia en dos semanas?

Mostrar retroalimentación

Supondremos que el padre cobra la mitad del mes exactamente: 1.620:2 = 810 €.

Su hijo Miguel cobrará la mitad de lo que él ingrese, por tanto 810:2= 405 €.

Has calculado las horas que trabaja la madre (18 por una semana) y las has multiplicado por el número de semanas: 2, y por el precio por hora: 14. Luego 18·2·14 = 504 €.

Sumándolo todo 810+405+504 = 1.719 €. Obtenemos que los ingresos de la familia en dos semanas son de 1.719 €.

Si la familia destina a pagar la hipoteca la tercera parte de sus ingresos en esos 15 días, a comida 120 € quincenales, a ropa y calzado 250 € mensuales y el resto de gastos aseguran que los cubren con 350 € semanales. ¿Cuánto ahorran cada dos semanas?

Mostrar retroalimentación

La tercera parte de 1.719 € hacen 573 €. Si a eso sumamos 120 €, 125 € (la mitad de los 250 mensuales) y 700 € (el doble de los 350 semanales) obtenemos 1.518 €. Por tanto, el ahorro será de 201 €.

Miguel quiere quedarse con la tercera parte de su sueldo para ahorrar y comprarse una moto. ¿Puede asumir la familia esta propuesta sin cambiar el reparto de gastos que tiene?

Mostrar retroalimentación

La tercera parte de la aportación de Miguel en dos semanas son 135 €. Luego sí sería posible, pero reduciendo el ahorro.

Comprueba lo aprendido

A continuación tienes dos problemas relacionados con números naturales, para que hagas operaciones con ellos.

Un avión recorre 798 km cada hora. Al cabo de 4 horas, ¿cuántos kilómetros le faltarán para finalizar un viaje de 7.834 km?

Sugerencia

- 7.036 km.
- 3.192 km.
- 4.642 km.
- Ya ha llegado a su destino.

Piensa que son 4 horas a 798 km/h.

Esa es la distancia que lleva recorrida.

Muy bien. 7834 - 4 · 798 = 4.642 km.

Repasa tu razonamiento y tus cálculos.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Un señor vendió el lunes 27 conejos, el martes el doble que el lunes, y el miércoles la tercera parte que el lunes y el martes juntos. ¿Cuántos conejos ha vendido?

Sugerencia

- 324.
- 162.
- Menos de 100.
- 108 conejos.

Tal vez no has hecho la tercera parte, sino el triple.

Repasa el planteamiento y los cálculos.

Repasa el planteamiento y los cálculos.

Muy bien. $27 + 2 \cdot 27 + (27 + 2 \cdot 27)/3 = 27 + 54 + 27 = 108$ conejos.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

Comprueba lo aprendido

A continuación te planteamos unas cuantas preguntas para recordar aspectos interesantes sobre los números naturales:

¿Existe un número natural mayor que todos los demás?

Verdadero Falso

Falso

No hay un número natural que sea el más grande. Pensemos el que pensemos, bastaría con sumarle uno y tendríamos uno mayor. Por cierto, no vale decir infinito, ya que no es un número.

La suma y el producto de números naturales siempre da un número natural.

Verdadero Falso

Verdadero

Por eso se dice que la suma es una operación interna.

La resta de números naturales resulta siempre un número natural.

Verdadero Falso

Falso

En el conjunto de los números naturales no es posible restar a un número otro que sea mayor. Por este motivo se necesita ampliar los números naturales a un conjunto mayor de números: los números enteros, que estudiarás en el próximo punto del tema.

Por ejemplo, 5 - 8 no es un número natural.

El cociente de números naturales no es necesariamente un número natural.

Verdadero Falso

Verdadero

Por ejemplo 17 entre 5 no es natural. Para hacer este tipo de divisiones necesitamos los números racionales, que estudiarás en este tema.

La suma y el producto de números naturales son operaciones que verifican la propiedad conmutativa.

Verdadero Falso

Verdadero

El orden de los factores no altera el producto y el de los sumandos no altera la suma.

2. Números enteros

Nunca es agradable encontrarse la cuenta bancaria en "números rojos", que no es más que un eufemismo para describir que el saldo de la cuenta esté en **números negativos**. En efecto, los números negativos han sido identificados siempre con el concepto de deuda, desde que el ser humano realiza transacciones de bienes materiales. Pero aparecen en muchísmias más situaciones, como pueden ser al hablar de las temperaturas por debajo de cero, o al aparcar en la planta -2 de un aparcamiento subterráneo. Igualmente no es lo mismo hablar de un acontecimiento ocurrido en el año 100 *antes* de Cristo (o año -100), que en el año cien *después* de Cristo (+100).

En todos estos casos es necesario utilizar los números negativos. La historia de estos números ha estado marcada por un cierto halo de maldición. Casi ninguna civilización los consideraba como soluciones válidas de las ecuaciones que planteaban, y los descartaban como si fueran resultados falsos y engañosos. Hasta pocos años antes de que Colón llegara a América no se introdujo su uso en Europa occidental. El primero que lo hizo fue el matemático francés **Nicolas Chuquet** en 1484.

En la actualidad estamos muy habituados a ellos. Observa en el vídeo siguiente, cómo cambian las cifras en la pantalla del marcador que indica el tiempo que falta para el lanzamiento. Pasan de negativo antes del despegue, a positivo cuando la nave ya está en el aire.

En este apartado estudiaremos los números **enteros**, que están formados por los naturales (incluyendo el cero) y los negativos.

Importante

Los números enteros

El conjunto formado por los números naturales y los negativos es el conjunto de los **números enteros**, que se designan o escriben con la letra $\mathbb{Z}$, de modo que se tiene:

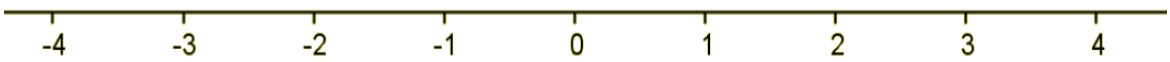
$$\mathbb{Z} = \{ \dots , -5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \dots \}$$

Fíjate que los números negativos no son números naturales. Así, el número -3 no es natural. Esto lo escribimos matemáticamente poniendo $-3 \notin \mathbb{N}$ y se lee "-3 no pertenece al conjunto $\mathbb{N}$ ".

<u>Opuesto y valor absoluto de un número entero</u>

Cada número entero tiene un **opuesto**, que sumado con él da 0. El opuesto de 5 es -5, y el de -8 es 8. El único número entero que coincide con su opuesto es el **0**. Al valor positivo elegido entre un entero y su opuesto, se le llama **valor absoluto** de ambos números entero. Así, por ejemplo, decimos que el valor absoluto del +5 es +5, e igualmente el valor absoluto del -5 es +5. El valor absoluto se representa mediante barras verticales, así escribiremos que $|5|=+5$ y también $|-5|=+5$. Durante el curso verás aparecer el valor absoluto de números y de expresiones matemáticas en distintos momentos.

Una manera muy útil y visual de representar los números enteros, es en una **recta graduada**. Se fija un punto para el 0 (lugar que se llama el origen de la recta), y determinada una unidad, se van fijando los enteros positivos a la derecha del cero, y los negativos a la izquierda.



Fuente propia realizado con geogebra bajo Dominio público

En la recta se puede estudiar muy bien tanto el **orden** en los enteros como la **simetría** que dos números opuestos tiene respecto del 0.

<u>Notación matemática</u>

En este comienzo de curso vas a ir repasando y aprendiendo símbolos y notación matemática. Con ella se pueden expresar las propiedas matemáticas de forma exacta y abreviada. Poco a poco irás aumentando tu vocabulario matemático y manejando la notación con soltura.

Acabas de ver el símbolo de permanencia. Otro símbolo matemático muy conocido es la inclusión de conjuntos: $\subset$ (o también $\subseteq$), con el que representamos que un conjunto está incluido en otro. Así, debido a que los números naturales son parte de los enteros, escribimos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Otro símbolo, menos conocido, es el que representa el sentido de "para todo", representado con $\forall$. Irás viendo su utilidad cuando vayan apareciendo, no te agobies si te resultan algo extraños ahora.

2.1. Operaciones

Los números enteros son una ampliación de los naturales, pues incluyen tanto el cero como los números negativos. Esto implica que se compliquen un poco las propiedades de las operaciones que podemos realizar con ellos.

Al sumar, restar y multiplicar números enteros, el resultado es siempre un número entero. No ocurre lo mismo con la división: al dividir dos números enteros, el resultado es un número entero sólo si el dividendo es múltiplo del divisor.

Por ejemplo: 6/3 sí da un número entero, pero 8/3 ya no es un número entero, sino racional, que los estudiaremos en el siguiente punto del tema. En el caso de 8/3, para números enteros escribimos esa división como: $8 = 2\cdot 3 + 2$, de forma que el **dividendo** (D) es igual al **divisor** (d) por el **cociente** (c) más el **resto** (r), dando lugar a la división entera:

Imagen en Flickr de Giulietto86 bajo CC

$$D = c\cdot d + r, \text{ con } 0 \le |r| \le |d|$$

Sumas y restas con enteros. Regla de los signos.

Al hacer sumas y restas con números enteros debes tener en cuenta las dos siguientes reglas de los signos:

a + (-b) = a - b | a - (-b) = a + b

Así tendrías que

$$4 + (-7) = 4 - 7 = -3$$

y que

$$4 - (-7) = 4 + 7 = 11$$

A continuación te ofrecemos un vídeo que te permitirán resolver las dudas que puedas tener sobre sumas y restas de enteros.

Vídeo de Tuto mate alojado en Youtube

Comprueba lo aprendido

Te planteamos el siguiente problema, para practicar las sumas y restas de enteros. El primer día de diciembre de 2009, la temperatura mínima en Granada fue de -1 grados. Completa los espacios blancos que aparecen en la siguiente tabla.


Fotografía en Flickr de txindoki bajo CC

Día	Temperatura	Diferencia con el día siguiente	Operación
1	-1 ºC	aumentó en 7 ºC	-1 + 7 = □
2	□ ºC	disminuyó en 2 ºC	□ - 2 = 4
3	4 ºC	disminuyó en □ ºC	4 - □ = -1
4	-1 ºC	disminuyó en □ ºC	- □ - □ = -3
5	-3 ºC	aumentó en 2 ºC	-3 + □ = □
6	□ ºC	disminuyó en □ ºC	□ - □ = -4

Enviar

Ojo a la suma y resta de números negativos.

Las reglas de los signos en el producto y la división.

Al multiplicar y dividir números entero
Antonio Ortega Moreno

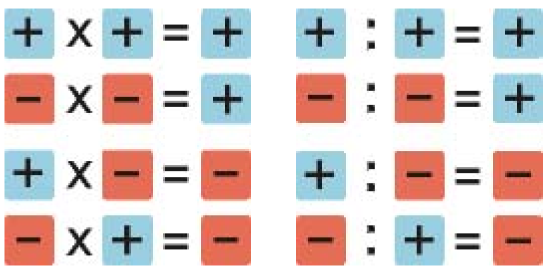


Imagen en INTEF de Antonio Ortega Moreno bajo CC

Por ejemplo:

- 8 · 4 = 32
- (-8) · (-4) = +32
- 8 · (-4) = -32
- (-8) · 4 = - 32

- 8 : 4 = 2
- (-8) : (-4) = +2
- 8 : (-4) = -2
- (-8) : 4 = -2

Fíjate que si se omite el signo delante de un número entero, siempre debes entender que es el singo "+".

Propiedades de las operaciones con números enteros.

Sean a, b y c números enteros cualesquiera. Se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades de la suma	**Propiedades de la multiplicación**
Conmutativa $a+b = b+a$	Conmutativa $a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa $(a+b)+c = a+(b+c)$	Asociativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Existencia de elemento neutro $a+0 = a$ (0 es el elemento neutro de la suma)	Existencia de elemento neutro $a \cdot 1 = a$ (1 es el elemento neutro de la multiplicación)
Existencia de elemento simétrico $a+(-a) = 0$	
Propiedad distributiva de la suma respecto a la multiplicación	
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	

La propiedad distributiva es muy importante ya que permite sacar **factor común** cuando un número se repite varias veces:

$7 \cdot 5 + 7 \cdot 6 - 7 \cdot 3 = 7 \cdot (5 + 6 - 3) = 7 \cdot 8 = 56$

Importante

A la hora de hacer operaciones combinadas, recuerda la **prioridad de las operaciones**, que es la siguiente, siempre de izquierda a derecha:

1. Operaciones con paréntesis.
2. Operaciones con corchetes.
3. Potencias y raíces (que las estudiarás en este mismo tema).
4. Multiplicación y división.
5. Sumas y restas.

Ejercicio resuelto

Realiza las siguientes operaciones combinadas con los números enteros:

$5 \cdot 8 - [-9 - (-4) + (13 - 7)] + 6 + 36 : 9$

Mostrar retroalimentación

$5 \cdot 8 - [-9 - (-4) + (13 - 7)] + 6 + 36 : 9 =$

1º - Quitar paréntesis: $= 5 \cdot 8 - [-9 + 4 + 6] + 6 + 36 : 9 =$

2º - Quitar corchetes: = $5 \cdot 8 - 1 + 6 + 36 : 9 =$

3º - Productos y cocientes = $40 - 1 + 6 + 4 =$

4º - Sumas y restas: = $39 + 6 + 4 = 45 + 4 = 49$

Por último, en los siguientes vídeos puedes repasar las cuestiones principales que se han visto en este apartado, incluyendo las reglas de los signos y el orden en el que hay que realizar las operaciones.

Vídeo de Tuto mate alojado en Youtube

Vídeo de Tuto mate alojado en Youtube

No es casualidad que un mes dure 30 días, ya que nuestro calendario es lunisolar y un mes es el tiempo aproximado que transcurre entre dos mismas fases de la luna.

Como un año tiene doce meses podemos decir que aproximadamente en un año solar transcurre doce veces el ciclo lunar. De forma aproximada, podemos considerar que un año solar es **múltiplo** del ciclo lunar y por el contrario, que el ciclo lunar es **divisor** de un año solar.

Imagen en arte y fotografía por Zeesarh bajo CC

Importante

Decimos que un número entero **a es múltiplo de b** (o que **b es divisor de a**) si al dividir a entre b la división es exacta.

Por ejemplo, 60 es múltiplo de 12 (o 12 es divisor de 60) ya que 60 : 12 = 5. También se dice que 60 es divisible por 12.

Se observa que 60 = 12 · 5. Cuando un número entero a se escribe como una multiplicación de otros enteros (a = b · c), se dice que los números b y c son **factores** del número a, que es un número **compuesto**.

Criterios de divisibilidad.

Existen unas reglas sencillas, los llamados criterios de divisibilidad, que nos permiten saber si un número entero es divisible por 2, 3, 5 u otros, sin necesidad de realizar la división. Los criterios de divisibilidad más útiles son los cuatro siguientes:

- Un número es divisible por **dos** si termina en cifra par (0, 2, 4, 6 u 8).
  Ejemplo: 58 es divisible por dos, pero 57 no lo es.

- Un número es divisible por **tres** si la suma de sus cifras es múltiplo de tres.
  Ejemplo: 54 es divisible por tres puesto que 5+4=9 es múltiplo de tres; 55 no es divisible por tres, ya que 5+5=10, que no es múltiplo de tres.

- Un número es divsible por **cinco** si acaba en cero o en cinco.
  Ejemplo: 60 es divisible por cinco; 62 no lo es.

- Un número es divisible por **once** si la suma de las cifras que están en lugar par, menos la suma de las cifras que están en lugar impar, da un múltiplo de once.
  Ejemplo: 88 es múltiplo de once ya que 8 - 8 = 0, es múltiplo de once. 121 también es múltiplo de once ya que las cifras pares suman 2, y las cifras impares suman 1+1=2, resultando su resta 2 - 2 = 0, que es múltiplo de once.

De estos criterios se deducen otros de forma inmediata. Por ejemplo, un número es divisible por 6 = 2·3, si es divisible por dos y por tres. Y un número es divisible por 10 si acaba en cero.

Para saber más

Necesitas recordar los conceptos de múltiplo y divisor de un número, así como los criterios de divisibilidad por 2, por 3, por 5, por 6 y por 11. Puedes ver ejemplos de cómo se aplican estos criterios y conocer más criterios de divisibilidad, pulsando en el siguiente enlace.

Criterios de divisibilidad

Comprueba lo aprendido

Contesta las siguientes cuestiones:

Podemos repartir 1065 paquetes de manera exacta entre 5 personas.

Verdadero Falso

Verdadero

El número acaba en 5.

Se pueden empaquetar 2563 pinceles en paquetes de a 3.

Verdadero Falso

Falso

2 + 5 + 6 + 3 es 16 que no es múltiplo de 3.

896112 ladrillos se pueden empaquetar de 6 en 6.

Verdadero Falso

Verdadero

Acaba en cifra par y la suma de sus cifras es 27 que es múltiplo de 3.

Podemos juntar en grupos de 10 los 230 turistas japoneses que han venido a visitar la Alhambra.

Verdadero Falso

Verdadero

Acaba en 0.

Números primos. Descomposición de un número en factores primos.

El concepto de divisor de un número nos permite estudiar números naturales que cumplen determinadas propiedades basadas en dicho concepto. Hablamos de los muy conocidos números primos.

Por distintos motivos, desde la antigüedad los números primos han llamado la atención de matemáticos y científicos en general. Uno de ellos es la fascinación que produce su irregular distribución en el conjunto de los números naturales. Los números primos aparecen distribuidos aquí y allá, encontrándose sectores en donde abundan y otros en donde escasean. Incluso, algunas civilizaciones han llegado a considerar que eran mágicos.

Importante

Un número **primo** es aquel que sólo tiene como divisores al 1 y a él mismo.

Los números que no son primos se les llama **compuestos**.

Se puede decir que todo número compuesto tiene más de dos divisores.

Para calcular números primos se utiliza la **Criba de Eratóstenes**, que consiste en escribir los números en secuencia e ir tachando primero los múltiplos de 2, seguidamente los múltiplos del primer número sin tachar y así sucesivamente. Los números que se queden sin tachar serán precisamente los números primos.

Los primeros números primos, y que conviene recordar son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.

Importante

Todo número compuesto se descompone en producto de números primos de forma única (no teniendo en cuenta el orden de los factores, ni los signos, ni las unidades 1). A la descomposición de un número en factores primos también se le llama **factorización** o factorizar el número.

Este resultado es tan importante que se conoce con el nombre de ***Principio Fundamental de la Aritmética***. Los números primos serían, pues, como los ladrillos, los átomos que con la ayuda del producto permiten construir el edificio de la aritmética.

Veamos un ejemplo:

Fíjate que el conjunto de los divisores de 12 es {±1,±2,±3,±4,±6,±12} y que {0,±2,±4,±6,±8,...} es el conjunto de los múltiplos de 2, también llamados números pares.

Observa que un número tiene infinitos múltiplos, mientras que el número de sus divisores es finito. Por eso podemos hablar del **máximo común divisor** (m.c.d.) y del **mínimo común múltiplo** (m.c.m). La factorización de los números será muy útil a la hora de calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

Importante

El **máximo común divisor** (m.c.d.) de varios números enteros es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.

Se llama **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de varios números enteros al menor de los múltiplos comunes a todos ellos.

Los pasos a seguir en el cálculo del m.c.d. de varios números enteros son:

1. Se descompone cada uno en factores primos.
2. Cada número se expresa como producto de factores primos en forma exponencial.
3. El m.c.d. es el producto de aquellos factores primos comunes a todos ellos tomados con su menor exponente.

Los pasos a seguir en el cálculo del m.c.m. de varios números son:

1. Se descompone cada uno en factores primos.
2. Cada número se expresa como producto de factores primos en forma exponencial.
3. El m.c.m. es el producto de aquellos factores primos comunes y no comunes a todos ellos tomados con su mayor exponente.

Puedes ver un ejemplo en la siguiente presentación. Lo haremos con dos números, pero se puede hacer con tres o más, el proceso sería el mismo (haz clic en la imagen para ir pasando las diapositivas).

Fuente propia

Y en la siguiente escena puedes practicar con estos conceptos. En algunas tendrás que ayudarte de la factorización, mientras que en otras podrás obtener la respuesta aplicando simplemente la definición.

Ejercicio resuelto

En mi casa tengo una pared de 435 cm de largo por 240 cm de alto. Deseo cubrirla entera con azulejos de forma cuadrada, todos del mismo tamaño, y usando el menor número posible de ellos (sin romper ninguno).

¿La medida del lado de los azulejos será múltiplo o divisor del largo y del alto de la pared?

Mostrar retroalimentación

Si fuese múltiplo de las longitudes de los lados, sería el azulejo más grande que la pared. El lado del azulejo, para no romper ninguno, tiene que dividir exactamente a los lados de la pared.

La longitud buscada para el lado del azulejo, por tanto, será un divisor de ambos lados y el azulejo debe ser lo más grande posible (para utilizar el menor número de azulejos). Luego, buscamos el MÁXIMO COMÚN DIVISOR de las longitudes de los lados. Intenta calcularlo.

Mostrar retroalimentación

Podemos intentar hacer un listado con todos los divisores de ambos números y buscar el mayor, pero sería tedioso y largo.

Si descomponemos los dos números en factores primos y tomamos los factores comunes con menor exponente, el número obtenido será divisor de ambos números (se ha formado con factores que están en los dos) y será el mayor, ya que si hubiese otro más grande tendría algún otro factor cosa que carece de sentido por la forma en que ha sido construido.

Si lo haces, el máximo común divisor ha de ser 15 y por tanto los azulejos tienen que tener 15 cm de lado.

$$435 = 3 \cdot 5 \cdot 29$$

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

Por tanto el máximo común divisor de 435 y 240 es $3 \cdot 5$; o sea, 15.

Ejercicio resuelto

En nuestro instituto funcionan cinco talleres: fotografía, ajedrez, canto, teatro y literatura. Las reuniones del taller de fotografía se hacen cada dos días; el de ajedrez cada tres; el de canto cada cuatro días; el de teatro cada cinco días y el de literatura cada seis días.

Si el día 1 de octubre se reunieron los cinco talleres, ¿cuando será la próxima vez en que volverán a coincidir las reuniones de todos los talleres?.

Mostrar retroalimentación

Observa que el número buscado debe ser múltiplo de los 5 números dados, ya que un taller se reúne cada vez que suma una cantidad fija de días, es decir, va construyendo un serie de múltiplos (p.e. ajedrez se reúne a los 3 días, a los 6 días, a los 9 días, ..., el de teatro a 5 días, a los 10, a los 15,...).

Por tanto, queremos un múltiplo común, y deseamos saber la primera vez que ocurrirá, luego, buscamos el MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.

Como hemos visto antes, descomponemos todos los números en factores primos y tomamos los factores comunes y no comunes con mayor exponente. De ese modo es múltiplo de todos y es el más pequeño posible.

Pues bien haciendo eso, obtenemos que 2,3 y 5 son números primos, $4 = 2^2$ y $6 = 2 \cdot 3$; Por tanto el mínimo común múltiplo es $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, o lo que es lo mismo 60.

Luego cada 60 días vuelven a coincidir. Si coincidieron el día 1 de octubre, la próxima vez será el 30 de noviembre.

Comprueba lo aprendido

Entrénate con los dos siguientes problemas:

Tres luces se encienden a intervalos fijos. Una cada 25 segundos, la segunda cada 20 segundos y la tercera cada 30 segundos. Si a las 12 de la noche coinciden las tres encendidas, ¿a qué hora volverán a coincidir?

Sugerencia

- A las 2 de la madrugada.
- A las 12 horas y 5 minutos.
- A las 12 horas y 1 minuto.
- Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Repasa el planteamiento.

Muy bien. El mcm(20, 25, 30) = 300, y 300 segundos son 5 minutos.

Revisa los cálculos.

Revisa los cálculos y/o el planteamiento.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Un depósito tiene 600 litros de agua y otro 480 litros de vino. Queremos pasar el contenido de ambos depósitos a bidones de la misma capacidad máxima, sin que sobre ni agua ni vino en los depósitos, sin mezclarlos y dejando todas los bidones completos. ¿Qué capacidad debe tener la bidones?

Sugerencia

- Bidones de 100 litros.
- 2625 litros.
- 120 litros.
- El vino y el agua no se deben mezclar.

Sobraría vino o se quedaría un bidón de vino sin completar.

¿No sería demasiado grande?

Muy bien. El mcd(600, 480)=120.

Lee de nuevo el enunciado.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

3. Números racionales

Del mismo modo que contar impulsó el desarrollo de los números naturales, la necesidad de medir generó la aparición de las fracciones o, como se decía hace unas décadas: "números quebrados". La palabra árabe para fracción es *al-kasar* que es la raíz del verbo que significa **romper** o **quebrar**, lo que dio origen a que se hablara de números quebrados.


Imagen en Flickr de etrinqita bajo CC

Es evidente la necesidad de contar con partes de la unidad para poder hacer mediciones y operaciones. Al dividir dos números enteros el resultado no es siempre exacto, y por tanto necesitamos nuevos números que podamos identificarlos con divisiones como 7/3, -4/5, etc.

Expresiones del tipo: "me bebí medio litro de leche, compré un cuarto y mitad de jamón, queda un cuarto de hora para que suene el timbre", son muy utilizadas en nuestra vida diaria. Pero, ¿somos conscientes de a qué nos referimos cuando hablamos de fracciones?

Importante

En la actualidad, definimos **fracción** como el cociente entre dos números enteros $\frac{m}{n}$, en donde n nunca puede ser cero.

Números racionales
El conjunto de números formado por todos los números naturales, los enteros, y además, todas las fracciones que podemos hacer con ellos, recibe el nombre de conjunto de los **números racionales**, y se designa por $\mathbb{Q}$

Importante

Números decimales
Si hacemos la división de una fracción, puede que esta sea exacta o puede que nos de decimales. En tal caso, podemos obtener tres tipos de **números decimales**.

- $\frac{43}{10}=4,3$; al que llamaremos número decimal exacto, porque tiene un número finito de decimales.
- $\frac{1}{3}=0,3333...=0,\widehat{3}$; o sea, los decimales no acaban, son infinitos, pero se repiten sin cesar, esto es, siguen un periodo; este es un número decimal periódico puro, ya que su periodo empieza justo después de la coma decimal.
- $\frac{13}{6}=2,16666...=2,1\widehat{6}$; o sea, igual que antes, solo que el periodo no empieza justo después de la coma; este es un número decimal periódico mixto.

Hay multitud de problemas de muy distintos contextos en los que aparecen las fracciones: medida, reparto equitativo, trayectos, recetas, áreas, etc. Esta amplia variedad nos permitirá conocer los diferentes usos de las fracciones, como por ejemplo:

1. **La fracción como la parte con el todo.** En este caso se utiliza para indicar "división en partes", respondiendo a la pregunta ¿qué parte es? del *todo*. El denominador de la fracción indica el número de partes en las que está dividido el *todo* y el numerador las partes que se escogen.
2. **La fracción como reparto equitativo.** Responde a la pregunta ¿cuánto le corresponde a cada uno? Se diferencia del caso anterior en que intervienen más de una unidad.
3. **La fracción como razón.** Responde a la pregunta ¿en qué relación están? ya que pone de manifiesto la relación que mantienen un par de números.
4. **La fracción como división indicada.**
5. **La fracción como un punto de la recta numérica.**
6. **La fracción como operador.** Cuando actúa sobre otro número, por ejemplo, los 4/5 de 20.

En el siguiente vídeo, con mucho humor, podemos ver como el Profesor Jirafales intenta explicarle a El Chavo la noción de fracción como parte de un todo.

Ejercicio resuelto

Seguro que recuerdas que el primer viaje del hombre a la Luna fue realizado por la nave espacial Apolo XI, siendo sus tripulantes los astronautas Neil Armstrong, Edwin Aldrin y Michael Collins.

El lanzamiento se realizó el día 16 de julio de 1969, y la vuelta a la Tierra tuvo lugar el 24 de julio. En pocas palabras, el viaje consistió en ir de la Tierra a la Luna, amenizar en nuestro satélite, y el viaje de regreso de la Luna a la Tierra.

La mitad del tiempo de este viaje correspondió a la ida. Del resto del tiempo, una cuarta parte fue la que estuvo el módulo espacial en la superficie de la Luna.

¿Qué fracción del viaje total correspondió al regreso y a la estancia en la Luna? ¿Cuántos días duró cada una de las fases?

Mostrar retroalimentación

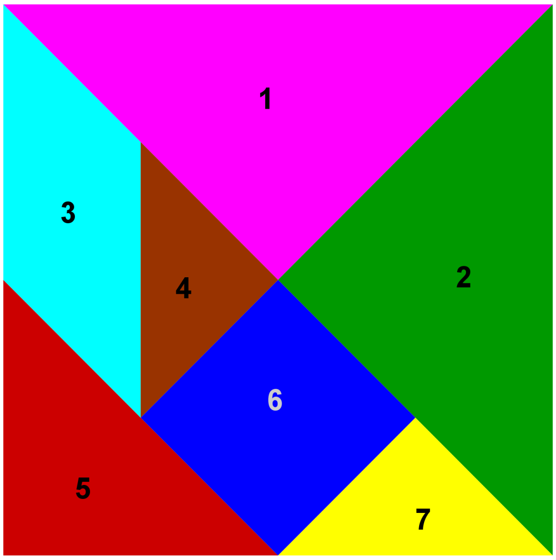
El viaje al completo duró 8 días. Luego la mitad del viaje que corresponde a la ida son 4 días, luego la fracción que representa la ida sería 4/8, o lo que es lo mismo, 1/2.

Una cuarta parte del resto del viaje es 1 día. Por tanto, a la estancia en la Luna le corresponde una cuarta parte de la mitad, es decir, 1/8 del total.

Finalmente en el regreso tardó 3 días, que son las 3/8 partes del total del viaje.

Comprueba lo aprendido

Tangram chino



El tangram chino es un juego basado en un rompecabezas llamado *Chiui Pan*, que significa "tablero de la sabiduría". Para construirlo a partir de un cuadrado hay que dividirlo en siete piezas que te indican estos versos:

De las siete partes, cinco son triángulos.

Hay un cuadrado que ocupa la octava parte,

y un paralelogramo que ocupa lo mismo.

Dos de ellas cuarta parte son,

tres la octava para no desmejorar

y dos la dieciseisava para fastidiar.

Escribe los números que identifican las piezas en los lugares que corresponden:

Figuras con área un cuarto del área total	Figuras con área un octavo del área total	Figuras con área un dieciseisavo del área total
☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐

Nota: Para la correcta corrección escribe los números de cada grupo en orden creciente.

Enviar

Para saber más

Como se ha comentado antes, una fracción se puede convertir en un número decimal, bastando con dividir el numerador entre el denominador. Puede ocurrir que el decimal resultante sea: exacto (por ejemplo, $\frac{3}{4}=0,25$), periódico puro (por ejemplo, $\frac{1}{3}=0,3333...=0,\widehat{3}$) o periódico mixto (por ejemplo, $\frac{7}{15}=0,4666...=0,4\widehat{6}$).

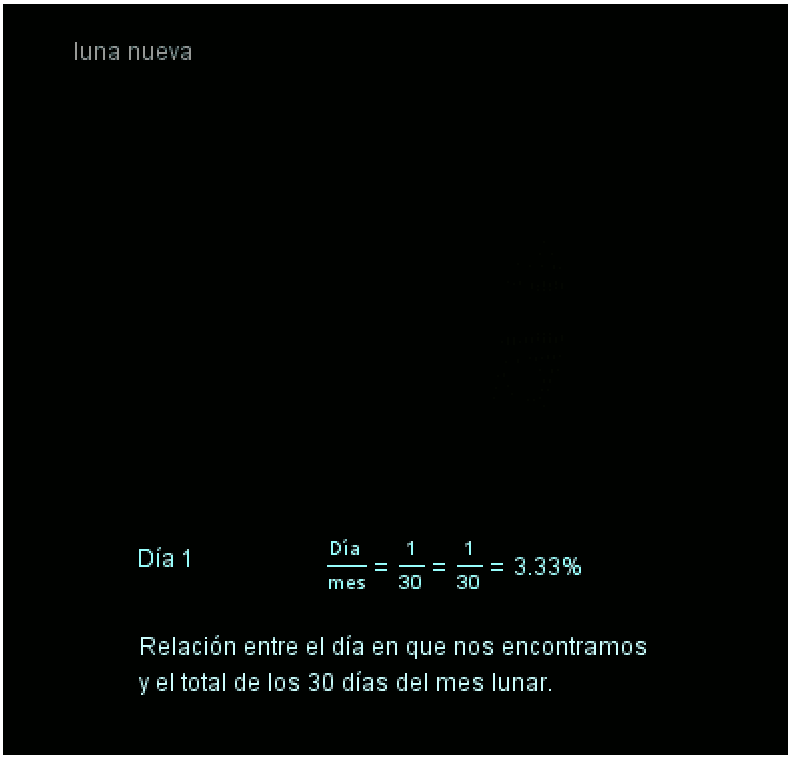
Pues bien, igualmente los números decimales exactos, los periódicos puros y los periódicos mixtos se pueden convertir en fracciones.

En el siguiente enlace tienes una actividad en la que puedes aprender a transformar estos decimales en fracciones, es decir, hallar la fracción generatriz.

3.1. Fracciones equivalentes

El ciclo de la Luna dura aproximadamente 30 días. Cada día, una pequeña parte del ciclo se va cumpliendo, pero también podemos decir que un pequeño porcentaje del ciclo se va completando.

La siguiente imagen animada representa la zona visible de la Luna según el porcentaje de ciclo transcurrido, de tal manera que recorre todas las fases intermedias (luna nueva, creciente, luna llena y menguante).



Si te fijas atentamente en la imagen animada anterior, puedes ver que en ocasiones aparecen dos fracciones igualadas pero que no tienen el mismo numerador ni denominador, son las llamadas **fracciones equivalentes**. Junto a ellas aparece un mismo porcentaje asociado a ambas, ya que tanto una como otra representan al mismo número **racional**.

Por ejemplo, si haces la división (prueba con la calculadora) puedes comprobar que las siguientes fracciones dan el mismo resultado:

$$\frac{12}{36}=\frac{6}{18}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

Fíjate que el numerador y el denominador se han dividido sucesivamente por el mismo factor, el dos, salvo en el último paso que se han dividido por tres. Por tanto, si en una fracción multiplicas o divides el numerador y denominador por el mismo número, estarás obteniendo el mismo resultado, determinan un mismo **número racional** y se dicen que son **fracciones equivalentes**.

Importante

Para comprobar si dos fracciones son **equivalentes**, se multiplican sus términos en cruz; cuando el producto de extremos es igual al producto de los medios, las fracciones son equivalentes y por tanto definen el mismo número racional.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

O lo que es lo mismo, si en una fracción se multiplica o se divide el numerador y el denominador por un mismo número distinto de cero, se obtiene una fracción equivalente a la original:

a la original.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k} \wedge \frac{a}{b}=\frac{a:k}{b:k} \text{ donde } k\neq 0$$

Simplificar una fracción es dividir el numerador y el denominador por un mismo número, de forma que se obtiene una fracción equivalente con números más pequeños. Una **fracción** es **irreducible** (no admite simplificación) cuando el numerador y el denominador son primos entre sí. Por ejemplo $\frac{3}{5}$ o $\frac{9}{4}$ son fracciones irreducibles.

Las fracciones en las que el numerador es un número menor que el denominador, se denominan fracciones propias.

Las fracciones equivalentes serán el concepto en el que nos basaremos para poder comparar, sumar y restar fracciones, ya que podremos buscar siempre fracciones equivalentes a las dadas que entre ellas tengan el mismo denominador y no nos pase como uno de los personajes de la película *Granujas de medio pelo* dirigida por Woody Allen, de la que a continuación se muestra un clip, que se lía un poco al sumar y comparar fracciones.

En efecto, para poder comparar dos fracciones y poder saber cuál es mayor o menor, conviene pasarlas a fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador, de forma que será mayor o menor la que tenga mayor o menor numerador respectivamente.

Por ejemplo, sin utilizar la calculadora, nos planteamos qué fracción es mayor, si 2/5 o 3/7. Para pasarlas a común denominador, dicho denominador tendrá que ser un múltiplo de 5 y de 7. Se puede optar por calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores, o bien vale multiplicarlos directamente, luego un denominador común sería el 35. La primera fracción habría que multiplicarla por siete y pasaría a ser 14/35; mientras que la segunda fracción habría que multiplicarla por 5 y pasaría a ser 15/35. Por tanto la segunda fracción es un poco mayor, y deducimos que 3/7 > 2/5.

Importante

Para reducir dos o más fracciones a **común denominador** basta multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por el número que resulta de dividir el mínimo común múltiplo de los denominadores entre cada denominador.

Otra forma.
Para reducir dos o más fracciones a **común denominador** basta multiplicar el numerador y el denominador por el producto de los denominadores de las otras fracciones.

De dos fracciones que tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.

Ejercicio resuelto

Reduce a común denominador y ordena de menor a mayor las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}$

Mostrar retroalimentación

Se tiene que m.c.m.(2, 6, 7) = 42, luego la primera fracción habrá que multiplicarla por 42/2=21, la segunda por 42/6=7 y la tercera por 42/7=6, y obtenemos las fracciones equivalentes:

$$\frac{21}{42}, \frac{35}{42}, \frac{24}{42} \Rightarrow \frac{21}{42} < \frac{24}{42} < \frac{35}{42} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{5}{6}$$

Importante

Para sumar o restar fracciones lo primero es expresarlas con un denominador común, de manera que la **suma o resta de dos fracciones que tienen igual denominador** es otra fracción que tiene:

- por numerador, la suma o resta de los numeradores.
- por denominador, el común a ambas fracciones.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Si no tienen igual denominador, también puede optarse por la siguiente fórmula, que implícitamente las transforma en fracciones equivalentes como has visto en el punto 3.1:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

Ejercicio resuelto

Opera y simplifica todo lo posible:

a. $\frac{2}{3}+\frac{5}{8}$

b. $4-\frac{7}{5}$

c. $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}$

Mostrar retroalimentación

a. $\frac{2}{3}+\frac{5}{8}=\frac{16}{24}+\frac{15}{24}=\frac{31}{24}$

Como 31 y 24 son primos entre sí, esta fracción es irreducible, y por tanto no se puede simplificar.

b. Pasamos 4 a fracción y se realiza la resta:

$$4-\frac{7}{5}=\frac{4\cdot 5}{5}-\frac{7}{5}=\frac{20}{5}-\frac{7}{5}=\frac{13}{5}$$

c. Tenemos que m.c.m.(6, 3, 7) = 42. Por tanto:

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}=\frac{35}{42}-\frac{14}{42}+\frac{12}{42}=\frac{35-14+12}{42}=\frac{33}{42}=\frac{11}{14}$$

En el último paso se ha simplificado la fracción entre tres.

En el último paso se ha simplificado la fracción entre tres.

Importante

El **producto de dos fracciones** es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

El cociente o división de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los extremos, y por denominador el producto de los medios:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$ ó equivalentemente $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Con los siguientes vídeos puedes las operaciones combinadas con números racionales. Recuerda la prioridad de las operaciones, que por supuesto siguen siendo válidas con las fracciones (primero los corchetes y paréntesis, luego las multiplicaciones y divisiones, y por último las sumas y restas, siempre de izquierda a derecha).

En el conjunto de los números racionales se verifican las siguientes propiedades:

Sean a, b y c números reales cualesquiera se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedades de la suma	**Propiedades de la multiplicación**

Conmutativa $a + b = b + a$	Conmutativa $a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa $(a+b)+c = a+(b+c)$	Asociativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Existencia de elemento neutro $a+0 = a$ 0 es el elemento neutro de la suma	Existencia de elemento neutro $a \cdot 1 = a$ 1 es el elemento neutro de la multiplicación
Existencia de elemento simétrico $a+(-a) = 0$ -a es el inverso o simétrico de a respecto de la multiplicación.	Existencia de elemento simétrico $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ $\frac{1}{a}$ es el inverso o simétrico de a respecto de l multiplicación.
Propiedad distributiva de la suma respecto a la multiplicación $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	

Fíjate que la nueva propiedad que añaden los números racionales, respecto a los números enteros, es la existencia de elemento simétrico para la multiplicación. Es decir, dada una fracción, siempre podemos encontrar otra de forma que al multiplicarlas se obtenga el valor 1. Por ejemplo, la fracción simétrica de 3/5 es 5/3 ya que:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$$

En definitiva, el simétrico de la fracción a/b, es la fracción b/a.

Para saber más

En el siguiente enlace a una página editada por el **Gobierno de Canarias**, tienes una amplia gama de actividades dedicadas a las operaciones con fracciones.

Operaciones con fracciones

Para finalizar el estudio de las fracciones, vamos a resolver algunos problemas utilizando los números racionales.

Ejercicio resuelto

El profesor de matemáticas suele desayunar en la cafetería del instituto: "Por favor, un café y media de tomate". Su amiga Paqui, que quiere que la invite a desayunar: "Para mi otra media". El camarero trae una tostada completa. Paqui sonríe, nunca entiende las bromas del camarero.

En una mesa, mientras se toma su bocadillo, Meki, una chica del instituto, llama a su profe: "Esto debe estar mal, me salen tres cuartos y no se puede dividir". Paqui, que es profe de francés pero suele hacer la compra de su casa, salta: "Pues claro que se puede, ayer compré tres cuartos de kilo de carne y me pusieron 750 gramos". Suena el timbre y todos a clase.

1. El profesor sabe que en su próxima clase encontrará más chicas que chicos. $\frac{5}{7}$ del grupo son chicas y en total son 28. ¿Cuántas chicas hay en esa clase?

Mostrar retroalimentación

Calcula $\frac{5}{7}$ de 28. Recuerda para hacer la fracción de un número se multiplica el número por el numerador y se divide, el producto, por el denominador.
$\frac{5}{7}\cdot 28=\frac{5\cdot 28}{7}=20$. Hay 20 chicas en la clase.

2. Paqui debe ir al cajero a sacar dinero. Piensa que si gasta $\frac{1}{5}$ de su dinero en la entrada para un coche, $\frac{1}{4}$ en comprarse los muebles que necesita, la décima parte de sus ahorros en un ordenador y $\frac{3}{8}$ de los mismos en liquidar lo que le falta para terminar de pagar su casa, aún le quedarán 375 €. "No está nada mal", piensa ella. Por cierto, ¿cuánto dinero tiene Paqui?

Mostrar retroalimentación

Suma las fracciones dadas, piensa en la fracción del dinero que le quedará y observa que dicha fracción del total daría los 375. ¡Ánimo!, seguro que puedes. Cuidado, que la fracción no se la haces a 375 sino al total desconocido.
¿Lo tienes? Veamos, la suma de las fracciones da

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{3}{8}=\frac{8}{40}+\frac{10}{40}+\frac{4}{40}+\frac{15}{40}=\frac{37}{40}$$

.
Por tanto, si gasta $\frac{37}{40}$ de su dinero (x), le queda: $1-\frac{37}{40}=\frac{40-37}{40}=\frac{3}{40}$
$\frac{3}{40}$ de x; y $\frac{3}{40}\, de\ x=375$
Por tanto, x tiene que ser: $x=\frac{375\cdot 40}{3}=5000$
Paqui tiene 5.000 €

3. Por su parte, Meki que tiene 250 € ahorrados, piensa gastarse $\frac{3}{5}$ de su dinero en ropa, $\frac{7}{10}$ de lo que aún le quede en música y 30 € en un libro. Lo que le sobre se lo regalará a su hermana. ¿Es muy generosa con su hermana?

Mostrar retroalimentación

Calcula cada uno de los gastos y réstalo del total restante. Verá como tras comprar el libro no le queda nada.

Veamos: $\frac{3}{5}\cdot 250=\frac{3\cdot 250}{5}=150$, luego en ropa se ha gastado 150 €, le queda por tanto, 100 €, la diferencia 250 - 150 = 100.

Ahora gasta siete décimos de los 100 en música, $\frac{7}{10}\cdot 100=\frac{7\cdot 100}{10}=70$, gasta 70 € en música y, por tanto, le quedan 30 € (100 - 70 =30). Como en el libro se va a gastar 30 €, no le queda nada para su hermana.

4. El profesor de matemáticas debe corregir los exámenes de una clase. Ayer corrigió $\frac{2}{7}$ de todos los exámenes, hoy piensa corregir $\frac{3}{5}$ de los que le quedan, y así para mañana sólo le restarán 8. ¿Cuántos alumnos/as se presentaron al examen?

Mostrar retroalimentación

Mostrar retroalimentación

El primer día, ayer, corrige $\frac{2}{7}$ del total de exámenes (x) y le quedan $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$.
Hoy corrige $\frac{3}{5}$ de los que le quedan, es decir, $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3}{7}$ de x (para obtener la fracción de otra fracción multiplicamos).
Así, en los dos días ha corregido $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$, es decir, ya ha corregido $\frac{5}{7}$ de x, de modo que aún debe corregir, $1-\frac{5}{7}=\frac{7}{7}-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$ del total x.
Si $\frac{2}{7}\cdot x=8$, entonces: $x=8\cdot\frac{7}{2}=\frac{56}{2}=28$.

Comprueba lo aprendido

Haz los dos problemas que vienen a continuación.

1. Una madera tiene un quinto de su longitud pintada de rojo, siete décimos del resto de azul y los doce centímetros restantes son blancos. ¿Cuánto mide la madera?
Sugerencia

- 60 cm.
- 50 cm.
- 55 cm.
- Ninguna de las respuestas anteriores es la correcta.

No es correcto. Repasa el planteamiento y los cálculos.

Muy bien. Observa: si la madera mide x, $\frac{1}{5}$ de x está de rojo; el resto sería $1-\frac{1}{5}=\frac{5}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$, y siete décimos del resto daría, $\frac{7}{10}\cdot\frac{4}{5}=\frac{28}{50}=\frac{14}{25}$, $\frac{14}{25}$ de x de azul (hemos simplificado, dividiendo numerador y denominador por 2). Luego entre rojo y azul tenemos: $\frac{1}{5}+\frac{14}{25}=\frac{5}{25}+\frac{14}{25}=\frac{19}{25}$, $\frac{19}{25}$ de x entre el rojo y el azul. Para el blanco quedan $\frac{6}{25}$ de x. De donde, $\frac{6}{25}\cdot x=12$, y $x=\frac{25\cdot 12}{6}=50$.

No es correcto. Repasa los ejemplos de las explicaciones.

No es correcto. Repasa las explicaciones.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

2. Si de una bolsa de 200 bolas sacamos $\frac{7}{20}$ del total y de las que quedan quitamos $\frac{10}{13}$, ¿cuántas bolas quedan en la bolsa?
Sugerencia

- 20 bolas.
- No se puede hacer. Salen decimales y no puede ser, debería partir las bolas.
- 30 bolas.

30 bolas.

Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

No es correcto. Repasa los ejemplos de las explicaciones y los cálculos.

No es correcto. Repasa los ejemplos de las explicaciones y los cálculos.

Muy bien. Trabajas muy bien. $\frac{7}{20}\cdot 200=\frac{7\cdot 200}{20}=70$, 200 -70 = 130. Tras la primera extracción quedan 130 bolas. En el segundo paso, se extraen $\frac{10}{13}\cdot 130=\frac{10\cdot 130}{13}=100$ bolas. Quedan por tanto, 30 (130-100 = 30).

No es correcto. Repasa los ejemplos de las explicaciones y los cálculos.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Igual que el producto de números naturales es una manera abreviada de representar la suma repetida de un número, elevar un número a una potencia natural expresa el producto repetido de un número por sí mismo.

Fotografía en Flickr de Sifu Renka bajo CC

Por ejemplo, si un restaurante nos ofrece un menú compuesto por un primer plato, segundo plato y postre, disponiendo de cuatro posibilidades para cada uno de ellos, ¿cuántos menús distintos se podrían pedir?

Habría 4 posibilidades para el primero. Para cada una de esas posibilidades se dispondrían de otras cuatro para el segundo, o sea, 4 posibilidades para la opción 1, 4 para la opción 2, etc. Esto nos arroja que por el momento tenemos 4·4=16 posibilidades, y para cada una de ellas un postre distinto, o sea, 16 con el postre 1, 16 con el postre 2, etc. Así tenemos 16·4=64 posibilidades. O mejor dicho, 4·4·4 posibilidades. Esto lo podemos expresar así: 4^3

Importante

Dado un número a y un número natural n, llamamos **potencia de base a y exponente n**, al número

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a \ (\text{n veces})$

que se consigue multiplicando la base a, por sí misma tantas veces como indique el exponente n. Por ejemplo:

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \ ; \ 6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776 \ ; \ 4^8 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 65536$

La potencia x^2 se llama cuadrado, y la potencia x^3 cubo. Las siguientes se llaman potencia cuarta, quinta, sexta, ... y, en general, x^n se llama enésima potencia o n-ésima potencia.

Ejercicio resuelto

Ejercicio

Utilizando la definición anterior, y tu calculadora científica resuelve las siguiente potencias:

a. 4^5
b. $(-2)^4$
c. 5^3
d. $(-3)^5$
e. $(-4)^3$
f. $(-7)^6$

Una vez realizadas las potencias, pincha en *Ver solución* para comprobarlas.

Mostrar retroalimentación

a. $4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$
b. $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

c. $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
d. $(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -243$
e. $(-4)^3 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = -64$
f. $(-7)^6 = (-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7) = 117649$

Ahora te toca a ti:

a. 3^6
b. $(-3)^6$
c. 4^3
d. $(-2)^5$
e. $(-5)^3$
f. $(-4)^6$

Mostrar retroalimentación

a. 729
b. 729
c. 64
d. -32
e. -125
f. 4096

Intenta calcular las siguientes potencias que, aunque parecen iguales, hay algunas diferencias:

a. 2^2
b. $(2)^2$
c. $(-2)^2$
d. -2^2
e. $(-2)^3$
f. -2^3

Mostrar retroalimentación

a)4 b) 4 c) $(-2)\cdot(-2) = 4$ d) $-2 \cdot 2 = -4$ e) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$ f) $-2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

Importante

Si observas detenidamente el ejemplo anterior podemos sacar algunas conclusiones:

1. Si el signo está dentro del paréntesis, formará parte de la base y por consiguiente se repetirá tantas veces como nos indica el exponente.
2. Si el signo está fuera del paréntesis, no forma parte de la base y por consiguiente se añadirá al resultado de la potencia.
3. Si la base es positiva, el resultado será positivo.

3. Si la base es positiva, el resultado será positivo.
4. Si la base es negativa y el exponente es par, el resultado será positivo.
5. Si la base es negativa y el exponente es impar, el resultado será negativo.

Las raíces o radicales.

Asociado al concepto de potencia tenemos su operación contraria que es la extracción de raíces, es decir, dado un número, nos planteamos qué otro número elevado a cierta potencia da el número inicial. Por ejemplo, si tienes un cuadrado cuyo lado mide un metro, aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que la diagonal del cuadrado mide un número que al elevarlo al cuadrado de dos, que lo representamos como $\sqrt{2}$.

Las raíces también son necesarias, por ejemplo, para hallar la arista de un cubo cuyo volumen sea 7 cm^3. Para ello basta resolver la ecuación $x^3 = 7$, obteniéndose una raíz cúbica: $x = \sqrt[3]{7}$, es decir, se trata de un número que al elevarlo al cubo nos de siete.

Importante

La **radicación** u obtención de raíces es la operación contraria a elevar un número a una potencia. Se expresan con el símbolo **radical**:

$$\sqrt[n]{a}$$

El valor que aparece dentro del símbolo radical se llama **radicando**, y la cantidad que aparece encima del radical se llama **índice** de la ráiz. Esta expresión nos indica el número que al elevarlo a *n* nos de el número *a*, es decir: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Cuando en un radical no se expresa el índice, por convenio se establece que se está calculando una raíz cuadrada, es decir, por ejemplo, se escribe $\sqrt{4}$ en lugar de $\sqrt[2]{4}$.

Empezarás a trabajar con radicales a partir del punto 4.3, pero antes debes conocer unas propiedades o características básicas que poseen las raíces.

En primer lugar, debes observar que **las raíces de índice par de un número positivo no son únicas**; si quieres obtener la raíz cuadrada de 25, es decir, un número que multiplicado por sí mismo sea igual a 25, es claro que +5 resuelve el problema, pero también -5.

Ejemplo: $\sqrt{16} = \pm 4$

Y en segundo lugar, observa que **si el radicando es negativo, sólo se pueden calcular raíces que sean de índice impar**.

Ejemplo: $\sqrt[3]{-125} = -5$ ya que (-5)·(-5)·(-5) = -125. Y sin embargo no se puede obtener $\sqrt[4]{-125}$ o la $\sqrt{-125}$.

En efecto, está claro que $\sqrt{4} = \pm 2$ ya que 2·2 = +4 y (-2)·(-2) = +4, pero piensa en $\sqrt{-4}$, ¿puede haber algún número que al multiplicarlo por sí mismo de -4? No, no es posible, ya que por la regla de los signos, un número positivo por otro positivo da positivo, e igualmente un número negativo por otro negativo da un resultado positivo, luego al multiplicar un número un número par de veces, siempre saldrá una cantidad positiva, nunca negativa.

Vamos a repasar las propiedades de las potencias con exponente natural, realizando los ejercicios que siguen a continuación.

Ejercicio resuelto

Calcula las siguientes potencias, utilizando la definición de potencias vista en el punto 4, y con ayuda de tu calculadora:

a.1) 2^3 ; a.2) 2^4 ; a.3) $2^3 . 2^4$; a.4) 2^7 ;

b.1) 3^3 ; b.2) 3^2 ; b.3) $3^3 . 3^2$; b.4) 3^5 ;

¿Eres capaz de llegar a alguna conclusión? Después de pensarlo, haz click en *Ver solución.*

Mostrar retroalimentación

La conclusión a la que llegamos es que:

$a^n . a^m = a^{n+m}$;
que es la primera de las propiedades de las potencias de exponente natural: *producto de potencias de la misma base.*

c.1) 2^5 ; c.2) 2^3 ; c.3) $\frac{2^5}{2^3}$; c.4) 2^2 ;

d.1) 5^6 ; d.2) 5^2 ; d.3) $\frac{5^6}{5^2}$; d.4) 5^4 ;

y ahora, ¿llegas a alguna conclusión? Haz click como antes.

Mostrar retroalimentación

Efectivamente,

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

la segunda de las propiedades de las potencias; *cociente de potencias de la misma base.*

e.1) $(4^3)^2$ (en este ejercicio debes hacer primero 4^3, y lo que obtengas lo debes elevar a 2); e.2) 4^6 ;

f.1) $(2^5)^3$; f.2) 2^{15} ;

En esta ocasión, ¿cuál es la conclusión adecuada? Pincha y la ves.

Mostrar retroalimentación

La propiedad sería:

$a^{n^m} = a^{n \cdot m}$

a la que llamaremos *potencia de una potencia.*

g.1) $2^3 . 4^3$; g.2) 8^3 ; g.3) 8^6

h.1) $5^2 . 4^2$; h.2) 20^2 ; h.3) 20^4

es el momento de intentar llegar a una conclusión que verás al darle a *Ver solución.*

Mostrar retroalimentación

Eso es,

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

que es el *producto de potencias con el mismo exponente.*

i.1) $\frac{6^2}{2^2}$; i.2) $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2$

j.1) $\frac{6^3}{3^3}$; j.2) $\left(\frac{6}{3}\right)^3 = 2^3$

te toca de nuevo, llegar a una conclusión. Después pincha en *Ver solución.*

Mostrar retroalimentación

La última de las propiedades es la siguiente:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

es el *cociente de potencias con el mismo exponente.*

Importante

Propiedades de las potencias de exponente natural

En la siguiente tabla están resumidas las propiedades de las potencias vistas anteriormente:

Producto de potencias de la misma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Cocientes de potencias de la misma base	$a^m / a^n = a^{m-n}$
Potencia de potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Producto de potencias del mismo exponente	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
Cociente de potencias del mismo exponente	$a^m / b^m = (a / b)^m$

Comprueba lo aprendido

Elige las respuestas correctas de entre las siguientes afirmaciones; ten cuidado que pueden ser varias las respuestas correctas:

1.- $4^3.4^5$

- [ ] a) 4^{15}

- [ ] b) 4^8

- [ ] c) 65536

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Correcto

2.- $\frac{3^7}{3^4}$

- [ ] a) 3^3

- [ ] b) 27

- [ ] c) 9

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Correcto
2. Correcto
3. Incorrecto

3.- 3^{5^2}

- [ ] a) 3^{25}

- [ ] b) 3^7

- [ ] c) 3^{10}

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Correcto

4.- $3^7.4^7$

- [ ] a) 12^7

- [ ] b) 12^{14}

b) 12^{11}

c) $6^7 \cdot 2^7$

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto

5.- $\frac{8^6}{4^6}$

a) 2^6

b) $\left(\frac{8}{4}\right)^6$

c) 64

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Correcto
2. Correcto
3. Correcto

Con las mismas propiedades anteriores, puedes ver un ejemplo de cálculo de potencias de fracciones en el siguiente vídeo:

4.2. Potencias de exponente entero

En el punto anterior hemos visto las potencias de exponente natural. En este vamos a dar un paso más, aumentando el campo de los exponentes a los números enteros. Evidentemente, el paso que tenemos que hacer es el del exponente negativo, puesto que los enteros son los números enteros positivos (los naturales) y los enteros negativos. Para comprender mejor como se hace la potencia de un número entero negativo, vamos a hacer algunos ejercicios de potencia.

Ejercicio resuelto

Calcula, utilizando las propiedades del apartado anterior, la siguiente potencia: $\frac{5^2}{5^6}$

Calcula, utilizando esta vez, la definición de potencia, la misma potencia: $\frac{5^2}{5^6}$

Cuando hayas contestado a las dos, pincha en "Mostrar retroalimentación".

Mostrar retroalimentación

Por un lado tenemos que : $\frac{5^2}{5^6} = 5^{2-6} = 5^{-4}$;

y por otro lado tenemos $\frac{5^2}{5^6} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^4}$;

evidentemente estos resultados deben ser iguales, esto es: $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$

Seguro que ahora eres capaz de enunciar la última igualdad con letras, de la misma manera que lo hicimos en el punto anterior.

Para comprobarlo haz clic en el botón.

Mostrar retroalimentación

Eso es:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; que es la mundialmente conocida como *potencia de exponente negativo.*

Ejercicio resuelto

Del mismo modo podemos resolver la siguiente operación con potencias:

Calcula, utilizando las propiedades del apartado anterior, la siguiente potencia: $\frac{5^2}{5^2}$

Calcula, utilizando esta vez, la definición de potencia, la misma potencia: $\frac{5^2}{5^2}$

Mostrar retroalimentación

Por un lado tenemos que: $\frac{5^2}{5^2}=5^{2-2}=5^0$;

y por otro lado tenemos que: $\frac{5^2}{5^2}=\frac{5\cdot5}{5\cdot5}=1$;

evidentemente estos resultados deben ser iguales, esto es: $5^0=1$

Importante

Propiedades de las potencias de exponente entero

Las potencias de exponente entero verifican las mismas propiedades que las potencias de exponente natural. Además de éstas, también verifican la propiedad vista más arriba, que resumimos en la siguiente tabla, en la que aparece también la importante propiedad de una potencia con exponente cero:

Potencia con exponente cero	$a^0=1$
Potencia de exponente negativo	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Otra propiedad de las potencias, aunque puede parecer obvia, hay que tenerla clara y es que:

$a^1 = a$

Ejercicio resuelto

Resuelve las siguiente potencias, utilizando la propiedad anterior:

a. 3^{-4}

b. $(-2)^{-3}$

c. $(-2)^3$

d. $(-4)^{-6}$

Mostrar retroalimentación

a. $3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{84}$

b. $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{-8}=-\frac{1}{8}$

c. $(-2)^3=-8$

d. $(-4)^{-6}=\frac{1}{(-4)^6}=\frac{1}{4096}$

Para saber más

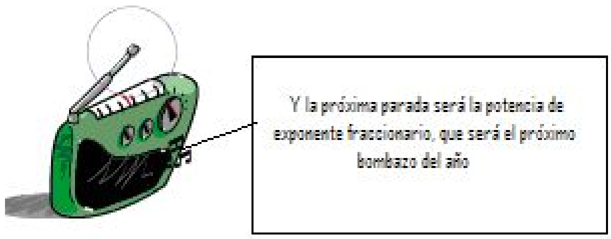
La intención de esta propiedad es quitar las potencias que tengan un exponente negativo, no se trata de tener las potencias en el numerador o denominador, sino de quitar ese número negativo del exponente.

Hemos visto que cuando la potencia de exponente negativo está en el numerador, pasa al denominador con exponente positivo; nos preguntamos ahora, ¿qué pasará cuando la potencia de exponente negativo está en el denominador? Veámoslo.

$\frac{1}{2^{-3}}=$ {utilizando la propiedad de potencia de un número negativo} $=\frac{1}{\frac{1}{2^3}}=$ {poniendo el 1 del numerador como fracción} $=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2^3}}=$ {haciendo la división del doble cociente, o sea, "multiplicando en cruz"} $=\frac{1\cdot 2^3}{1\cdot 1}=2^3$

Podemos concluir que: $\frac{1}{2^{-3}}=2^3$; o en general: $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$

Tras estudiar las potencias de exponente natural y exponente entero, vamos a analizar las potencias de exponente fraccionario. Para entender mejor cómo es una potencia de exponente fraccionario, vamos a hacer algunos ejercicios.



fuente propia

Vas a necesitar la calculadora científica no solo para calcular potencias, en las cuales deberás poner entre paréntesis las potencias fraccionarias, sino también para calcular raíces de índice distinto de 2.

En tu calculadora debes localizar la tecla INV O SHIFT,que sirve para utilizar las funciones matemáticas que vienen encima de cada tecla de la calculadora. Pues bien, la manera de poder utilizar esas funciones es dar a esa tecla que está arriba a la izquierda, y que según la calculadora se llama "INV" o "SHIFT".

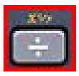

fuente propia bajo CC

Para escribir raíces y potencias, tenemos varias teclas que son las siguientes:


fuente propia bajo CC

La primera como se ve es para la raíz cuadrada: pulsamos esta tecla, después la cantidad y la calculadora nos da la solución. La segunda es para elevar al cuadrado un número y la tercera es para elevar un número al exponente que deseemos (también puede ser una tecla **x^y**), y al darle a "SHIFT" o "INV" podemos hacer la raíz del índice que queramos. Como ejemplo calcularemos la raíz de índice 5 de 24:

Tecleamos "SHIFT"; tecleamos  ; tecleamos "5"; y por último, tecleamos "24"; la solución es: 1,888175023. Hay calculadoras que también incluyen la tecla  , que nos da el cubo de un número y su función inversa, esto es, al teclear "SHIFT" podemos utilizar la raíz cúbica.

Por último, otras calculadoras tienen la tecla  que nos sirve, tras teclear "SHIFT", para lo mismo que la tecla vista dos líneas más arriba. Por tanto, para calcular raíces tendrás que utilizar las teclas $\sqrt[x]{a}$ ó $x^{1/y}$ donde y sería el índice de la raíz.

Ejercicio resuelto

Resuelve con la calculadora:

a.1) $9^{\frac{1}{2}}$; a.2) $\sqrt{9}$

b.1) $25^{\frac{1}{2}}$; b.2) $\sqrt{25}$

c.1) $5^{\frac{1}{2}}$; c.2) $\sqrt{5}$

d.1) $5^{\frac{3}{2}}$; d.2) $\sqrt{5^3}$

Puedes intuir de qué estamos hablando. Concrétalo en un expresión, y pincha en "Mostrar retroalimentación"

Mostrar retroalimentación".

Mostrar retroalimentación

Eso es, tenemos que: $a^{\frac{n}{2}} = \sqrt{a^n}$

Veamos si sigue ocurriendo cuando el índice no es 2. Calcula ahora:

a.1) $7^{\frac{5}{3}}$; a.2) $\sqrt[3]{7^5}$;

b.1) $2^{\frac{2}{5}}$; b.2) $\sqrt[5]{2^2}$

sigues obteniendo los mismos resultados ¿verdad?, de manera que intenta concluir con la generalización en letras de la potencia de un número fraccionario, y pincha después en *Ver solución*.

Mostrar retroalimentación

Tenemos que:

$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, que es la *potencia de exponente fraccionario.*

Importante

Propiedades de las potencias de exponente fraccionario

Las potencias de exponente fraccionario heredan las mismas propiedades que las vistas en los apartados anteriores. Además añaden la que acabamos de deducir:

Potencia de exponente fraccionario	$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

Comprueba lo aprendido

Elige la respuesta correcta en cada uno de los siguiente apartados:

1.- $3^{\frac{6}{5}}$

- $\sqrt[6]{3^5}$
- $\sqrt[5]{3^6}$

Fíjate bien antes de contestar. Prueba con la otra opción.

Muy bien.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

2.- $(-3)^{\frac{2}{5}}$

- $\sqrt[5]{(-3)^2}$
- $\sqrt{(-3)^5}$

Parece que empiezas a controlarlo.

Esta vez te he logrado engañar. Prueba con la otra opción.

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto

3.- $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{4}{7}}$

- $\sqrt[7]{5^4}$
- $\sqrt[7]{\left(\frac{5}{3}\right)^4}$

Otra vez te has despistado.

Muy bien. Esto empieza a tomar forma.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

4.- $\sqrt[5]{3^4}$

- $3^{\frac{5}{4}}$
- $3^{\frac{4}{5}}$

Mira bien la potencia que te has vuelto a despistar.

Eso es. Esto está casi dominado.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

5.- $\sqrt[3]{(-5)^8}$

- $(-5)^{\frac{8}{3}}$
- $(5)^{\frac{-8}{3}}$

Fantástico, como si llevásemos toda la vida haciendo esto.

Ups..., otro pequeño error. Fíjate bien y piensa.

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto

6.- $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

- $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$

Muy bien. Ahora haz tú los ejercicios de más abajo.

Esta vez he logrado despistarte. Piénsalo mejor.

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto

Ejercicio resuelto

Ejercicios de repaso de las potencias:

1. Pasa a raíz las siguientes potencias de exponente fraccionario:
   a. $4^{\frac{3}{5}}$
   b. $7^{\frac{2}{3}}$
   c. $(-2)^{\frac{2}{7}}$
   d. $\pi^{\frac{5}{3}}$
   e. $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$
2. Pasa a potencia de exponente fraccionario las siguientes raíces:
   a. $\sqrt[4]{2^3}$
   b. $\sqrt{4^3}$
   c. $\sqrt[5]{(-2)^6}$
   d. $\sqrt[3]{e^5}$
   e. $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

3. Expresa estas potencias como potencia única, siempre con exponente positivo:

a. $4^{-3} \cdot 4^{-3}$

b. $3^{2} \cdot 3^{-6}$

c. $\frac{5^3}{5^5}$

4. Expresa en forma de potencia única las siguientes potencias, y calcula el resultado:

a. $4^{-3} \cdot 2^{-3} \cdot 5^{-3}$

b. $15^{4} : 5^{4} \cdot 3^{-4}$

c. $3^{5} \cdot 4^{5} : 12^{8}$

d. $9^{2} : 3^{2} : 3^{-4}$

Mostrar retroalimentación

1.
   a. a) $\sqrt[5]{4^3}$
   b. $\sqrt[3]{7^2}$
   c. $\sqrt[7]{(-2)^2}$
   d. $\sqrt[3]{\pi^5}$
   e. $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$
2.
   a. $2^{\frac{3}{4}}$
   b. $4^{\frac{3}{2}}$
   c. $(-2)^{\frac{6}{5}}$
   d. $e^{\frac{5}{3}}$
   e. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$
3.
   a. $\left(\frac{1}{4}\right)^{6}$
   b. $\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$
   c. $\left(\frac{1}{5}\right)^{2}$

4.

a. $40^{-3}=\frac{1}{64000}$

b. $3^0=1$

c. $\left(\frac{1}{12}\right)^3=\frac{1}{1728}$

d. 3^6

La propiedad principal de las raíces es $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$. Por tanto, una raíz se puede transformar en una potencia, luego las propiedades que verifican las raíces son básicamente equivalentes a las de las potencias.

Importante

Las principales propiedades que verifican las raíces son las que se indican en la siguiente tabla, y se deducen al aplicar las propiedades de las potencias:

Producto de raíces del mismo índice	$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$
Cociente de raíces del mismo índice	$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
Raíz de otra raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
Raíz de una potencia	$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$
Simplificación	$\sqrt[m \cdot h]{a^{n \cdot h}} = \sqrt[m]{a^n}$

De la propiedad de simplificación se deduce otra propiedad que aplicamos continuamente: $\sqrt[m]{a^m} = a$

<u>Extracción e introducción de factores en radicales.</u>

Para sacar factores de una raíz, se debe descomponer el radicando en factores primos, de manera que las potencias de la descomposición cuyo exponente sea el índice o un múltiplo del índice de la raíz podrán salir fuera de la raíz, que quedará simplificada.

<u>Ejemplos:</u> $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{875} = \sqrt{5^3 \cdot 7} = \sqrt{5^2 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5 \cdot 7} = 5 \cdot \sqrt{35}$

En ocasiones puede resultar útil introducir factores de la raíz, haciendo un proceso inverso:

$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$

<u>Suma y resta de radicales.</u>

Para poder sumar o restar raíces <u>tienen que tener el mismo radicando</u>, de forma que la sumas y restas se realizan sacando factor común de la raíz que se repite.

Ejemplo: $10\sqrt{6}+5\sqrt{6}-7\sqrt{6}=(10+5-7)\cdot\sqrt{6}=8\sqrt{6}$

Tienes que tener muy claro que $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$. Cuando haya suma o resta de raíces con distinto radicando, NO se puede realizar la operación y se deja expresada la suma tal cual.

Ejercicio resuelto

Opera y simplifica:

I. $\sqrt{3}+3\sqrt{27}-\sqrt{75}$

Mostrar retroalimentación

Habrá que descomponer los radicandos en producto de factores primos, e intentar extraer factores de las raíces, para ver si se consiguen radicandos iguales y se puedan realizar las sumas y restas.

$$\sqrt{3}+3\sqrt{27}-\sqrt{75}=\sqrt{3}+3\sqrt{3^3}-\sqrt{3\cdot5^2}=\sqrt{3}+3\sqrt{3^2\cdot3}-5\sqrt{3}=\sqrt{3}+3\cdot3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(1+9-5)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

En este caso al tener $\sqrt{3}$ en todos los sumandos, se pueden realizar las sumas y restas.

II. $2\sqrt{12}+5\sqrt{3}-10\sqrt{7}$

Mostrar retroalimentación

$$2\sqrt{12}+5\sqrt{3}-10\sqrt{7}=2\sqrt{2^2\cdot3}+5\sqrt{3}-10\sqrt{7}=2\cdot2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-10\sqrt{7}=4\sqrt{3}+5\sqrt{3}-10\sqrt{7}=9\sqrt{3}-10\sqrt{7}$$

En este caso, al ser distintos radicandos, no se puede realizar la resta.

III. $\sqrt[4]{\sqrt[9]{\frac{6^{11}}{3^{11}}}}$

Mostrar retroalimentación

En primer lugar habrá que intentar simplificar la fracción, utilizando propiedades de las potencias de exponente natural, y luego aplicar la propiedad de la raíz de una raíz.

$$\sqrt[4]{\sqrt[9]{\frac{6^{11}}{3^{11}}}}=\sqrt[4]{\sqrt[9]{\left(\frac{6}{3}\right)^{11}}}=\sqrt[4]{\sqrt[9]{2^{11}}}=\sqrt[36]{2^{11}}$$

Producto y cociente de radicales.

Para poder multiplicar o dividir raíces tienen que tener el mismo índice. Un paso previo será por tanto pasar las raíces a un índice común, calculando el mínimo común múltiplo de los índices y utilizando la propiedad de simplificación.

Cuando dos raíces tienen el mismo índice, es menor la que tiene menor radicando. Por ejemplo, $\sqrt{3}<\sqrt{5}$.

Ejercicio resuelto

I. Pasa a radicales con índice común las raíces $\sqrt{5}, \sqrt[4]{2^3}, \sqrt[10]{7}$.

Mostrar retroalimentación

I. Calculamos el mínimo común múltiplo de los índices: m.c.m.(2, 4, 10) = 20, luego las raíces $\sqrt{5}, \sqrt[4]{2^3}, \sqrt[10]{7}$ se transforman respectivamente en $\sqrt[20]{5^{10}}$, $\sqrt[20]{2^{15}}$ y $\sqrt[20]{7^2}$.

II. Pasa a radicales con índice común, y ordena de menor a mayor, las raíces $\sqrt{3^3}, \sqrt[6]{3^4}, \sqrt[12]{3^7}$

Mostrar retroalimentación

II. Como m.c.m.(2, 6, 12) = 12, las raíces $\sqrt{3^3}, \sqrt[6]{3^4}, \sqrt[12]{3^7}$ se convierten respectivamente en $\sqrt[12]{3^{18}}$, $\sqrt[12]{3^8}$ y $\sqrt[12]{3^7}$, luego $\sqrt[12]{3^7} < \sqrt[12]{3^8} < \sqrt[12]{3^{18}}$ y por tanto:

$$\sqrt[12]{3^7} < \sqrt[6]{3^4} < \sqrt{3^3}$$

III. Calcula $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{15}$

Mostrar retroalimentación

III. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{15} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3\cdot5} = \sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2\cdot5^2} = \sqrt[6]{2^3\cdot3^2\cdot5^2} = \sqrt[6]{8\cdot9\cdot25} = \sqrt[6]{1800}$

IV. Calcula $\sqrt{6} : \sqrt[4]{3}$

Mostrar retroalimentación

IV. $\sqrt{6} : \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{6^2} : \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{36:3} = \sqrt[4]{12}$

En los siguientes vídeos puedes practicar y ver más ejercicios relacionados con la extracción de factores de los radicales, así como sumas y restas de raíces.

Para saber más

En este enlace proporcionado por la web 3con14 dispones de un muy buen resumen con las propiedades de las raíces que debes manejar.

Igualmente en la web del IES Mar de Alborán puedes repasar estos conceptos y realizar más ejercicios.

5.1. Racionalizar fracciones

Como verás en el próximo tema, cuando una raíz no da un número exacto, son números con infinitas cifras decimales que NO se repiten, luego no son números racionales, y se les llama **números irracionales** ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ son números irracionales).

No es conveniente realizar divisiones por números irracionales ya que al tener infinitas cifras decimales producen inexactitudes en las divisiones. Por ello, cuando en una fracción aparecen raíces en el denominador, se debe transformar la fracción en otra equivalente que no tenga raíces en el denominador.

Importante

Se llama **racionalizar** una fracción con radicales en el denominador, al proceso de convertirla en otra fracción equivalente sin radicales en el denominador.

Al racionalizar fracciones se pueden presentar tres casos más habituales:

CASO I: El denominador de la fracción es una raíz cuadrada.

Es el caso más sencillo. Para eliminar la raíz cuadrada se multiplica el numerador y el denominador por dicha raíz cuadrada.

Ejemplo: Racionalizar la fracción $\frac{9}{\sqrt{13}}$. En este caso habrá que multiplicar numerador y denominador por la raíz de 13:

$$\frac{9}{\sqrt{13}}=\frac{9\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=\frac{9\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{13\cdot 13}}=\frac{9\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{13^2}}=\frac{9\sqrt{13}}{13}$$

CASO II: El denominador de la fracción es una raíz de índice mayor que dos.

En este caso para eliminar la raíz, se descompone el radicando en producto de factores primos, y se multiplica el numerador y el denominador de la fracción por una raíz del mismo índice que la del denominador y con un radicando formado por los mismos factores que la raíz inicial cuyos exponentes hagan que al sumarlos con los de la raíz original, se pueda simplificar la raíz.

Veamos un ejemplo para aclarar cómo es el procedimiento.

Ejemplo: Racionalizar la fracción $\frac{23}{\sqrt[5]{7^2}}$.

Observamos que en el denominador hay una raíz quinta y su radicando ya está descompuesto en factores y está formado por un cuadrado. Para que el siete pudiera extraerse de la raíz debería tener exponente 5. Como le faltaría sumarle 3 a su exponente, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[5]{7^3}$, resultando:

$$\frac{23}{\sqrt[5]{7^2}}=\frac{23\cdot\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}}=\frac{23\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2\cdot 7^3}}=\frac{23\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}}=\frac{23\sqrt[5]{7^3}}{7}$$

CASO III: El denominador de la fracción es una suma o diferencia con raíces cuadradas.

Cuando se presenta esta situación, para eliminar las raíces se multiplica el numerador y el denominador de la fracción por lo que se llama el *conjugado* del denominador, que es la misma suma o diferencia, pero con el signo contrario.

Veamos un ejemplo. Se plantea racionalizar la fracción $\frac{5+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$. En el denominador se observa que hay una suma de un número con una raíz cuadrada (también puede darse una suma de dos raíces cuadradas). Para poder solventar esta situación se utiliza la siguiente importante propiedad, y que utilizarás varias veces durante el curso, llamada **suma por diferencia**:

$$\mathbf{(a + b) \cdot (a - b)} = a^2 - a \cdot b + b \cdot a - b^2 \mathbf{= a^2 - b^2}$$

En efecto, cuando se multiplica una suma por una diferencia, aplicando la propiedad distributiva, se simplifica el resultado y se obtiene que es el primer término al cuadrado menos el segundo al cuadrado.

Esto es muy útil con las raíces cuadradas, ya que: $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$, luego una raíz cuadrada al cuadrado es el radicando, como ya has hecho en casos anteriores.

Es decir, si queremos racionalizar $\frac{5+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ habrá que multiplicar numerador y denominador por el conjugado de $1-\sqrt{2}$, que es $1+\sqrt{2}$, obteniéndose:

$$\frac{5+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(5+\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})} = \frac{5+5\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5+5\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2^2}}{1-2} = \frac{5+6\sqrt{2}+2}{-1} = \frac{7+6\sqrt{2}}{-1} = -7-6\sqrt{2}$$

Con los siguientes vídeos puedes practicar la racionalización de fracciones. En el primero de ellos se realizan varios ejemplos de los casos I y II, mientras que en el segundo vídeo tienes ejemplos de racionalización del caso III.

Ejercicio resuelto

Racionaliza las siguientes expresiones:

I. $\frac{5}{\sqrt{5}}$

Mostrar retroalimentación

I. $\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{5\cdot\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$

II. $\frac{8}{\sqrt[7]{3^4}}$

Mostrar retroalimentación

II. En este caso, hay que conseguir que el tres del radicando esté elevado a siete:

$$\frac{8}{\sqrt[7]{3^4}}=\frac{8\cdot\sqrt[7]{3^3}}{\sqrt[7]{3^4}\cdot\sqrt[7]{3^3}}=\frac{8\cdot\sqrt[7]{3^3}}{\sqrt[7]{3^4\cdot 3^3}}=\frac{8\cdot\sqrt[7]{3^3}}{\sqrt[7]{3^7}}=\frac{8\cdot\sqrt[7]{3^3}}{3}$$

III. $\frac{7+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$

Mostrar retroalimentación

III. Como queremos racionalizar $\frac{7+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ habrá que multiplicar numerador y denominador por el conjugado de $1+\sqrt{3}$, que es $1-\sqrt{3}$, obteniéndose:

$$\frac{7+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(7+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})}=\frac{7-7\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{1^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{7-7\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1-3}=\frac{7-7\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-2}$$

Fíjate que ya no se puede simplificar más el numerador, ya que tenemos raíces con radicandos distintos.

Para finalizar este primer tema, vamos a resolver los ejercicios que se han preguntado sobre este tema en exámenes de la PAU en cursos anteriores, donde normalmente intervienen las operaciones con raíces.

Es recomendable que antes de mirar la solución, los intentes previamente, por si no hubieran salido del todo correctos, aprender del error y coger práctica.

Ejercicio resuelto

Prueba de Acceso a Grados para Mayores de 25 años - Año 2011

Siendo x un número real positivo, exprese como un único radical la siguiente expresión:

$$4x\sqrt{3x}-\sqrt{108x^3}+4\sqrt{3x}+\sqrt{12x^3}+\sqrt{243x}$$

y calcule el valor de dicha expresión para x=3.

Nota: En este ejercicio se utilizarán conocimientos básicos relacionados con polinomios y ecuaciones, y que repasarás en próximos temas.

Mostrar retroalimentación

Como ves, se trata de sumas y restas de radicales, debiendo expresarse como un único radical. Los pasos a realizar serán:

1. Descomponer cada número en factores primos.
2. Extraer factores fuera de cada raíz (para ello los exponentes deberán ser múltiplos de dos, por estar dentro de una raíz cuadrada).
3. Si se espera como resultado un único radical, los radicandos que queden dentro de cada raíz deberán ser iguales, de forma que se puedan realizar sumas y restas con ellos, obteniendo un único radical como resultado final. Además, por lógica, este radicando común debería ser 3x, ya que 3 ya está descompuesto en factores primos, y tanto el 3 como la x están elevados a uno, luego ninguno de ellos podría salir fuera del radicando.

Si descompones en factores primos los números que están dentro de las raíces (sin olvidarnos de x, que es un número real positivo), debes obtener:

- 3 = 3
- 108 = $2^2 \cdot 3^3$ (ve dividiendo el número por dos mientras sea posible, luego por tres, 5, etc. hasta llegar al 1 como resultado de la división)
- 12 = $2^2 \cdot 3$
- 243 = 3^5

Una vez realizadas estas descomposiciones, ya podemos hacer el ejercicio con los siguientes pasos (lo puedes hacer en menos o más pasos, en función de tu práctica realizando estos ejercicios)

$$4x\sqrt{3x}-\sqrt{108x^3}+4\sqrt{3x}+\sqrt{12x^3}+\sqrt{243x}=$$

Descomponemos cada número de cada radicando en producto de factores primos

$$=4x\sqrt{3x}-\sqrt{2^2\cdot 3^3\cdot x^3}+4\sqrt{3x}+\sqrt{2^2\cdot 3\cdot x^3}+\sqrt{3^5\cdot x}=$$

Descomponemos cada potencia en exponentes múltiplos de dos, por estar dentro de una raíz cuadrada, y poder extraer factores fuera de la raíz.

$$= 4x\sqrt{3x} - \sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot x^2\cdot x} + 4\sqrt{3x} + \sqrt{2^2\cdot 3\cdot x^2\cdot x} + \sqrt{3^4\cdot 3\cdot x} =$$

Cada factor con exponente múltiplo de dos, se extraen de la raíz. Los factores con exponente 1, permanecerán dentro de la raíz.

$$= 4x\sqrt{3x} - 2\cdot 3\cdot x\sqrt{3x} + 4\sqrt{3x} + 2\cdot x\sqrt{3x} + 3^2\sqrt{3x} =$$

Ahora operamos y sacamos factor común de la raíz que se repite en todos los términos ($\sqrt{3x}$)

$$= 4x\sqrt{3x} - 6x\sqrt{3x} + 4\sqrt{3x} + 2x\sqrt{3x} + 9\sqrt{3x} = (4x - 6x + 4 + 2x + 9)\cdot\sqrt{3x} =$$

Si se suman los términos dentro del paréntesis donde aparece una x, queda 6x−6x, es decir, cero, luego el resultado final es:

$$= 13\cdot\sqrt{3x}$$

Por último, te piden el valor de esa expresión para x=3. Sustituyendo en el radical obtenido la x por el valor tres, saldría:

$$13\cdot\sqrt{3\cdot 3} = 13\cdot\sqrt{9} = 13\cdot 3 = 39$$

Fíjate que al calcular la raíz cuadrada de 9 utilizamos el valor +3 y no el -3. Por convenio, al calcular una raíz cuadrada se utiliza el valor positivo, y el signo de la operación será el que haya delante de la raíz cuadrada.

Ejercicio resuelto

Prueba de Acceso a Grados para Mayores de 25 años - Año 2010

Simplifica la expresión:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{16} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{32} - \sqrt{50} - \sqrt{98}$$

Mostrar retroalimentación

Para simplificar esta expresión deberás descomponer en factores primos los números 16, 32, 50 y 98, que son:

- 16 = 2^4
- 32 = 2^5
- 50 = $2\cdot 5^2$
- 98 = $2\cdot 7^2$

Además, para ir simplificando el primer término, que es el que parece más complicado, puedes aplicar dos de las propiedades de los radicales:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$ o bien $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$

Veámoslo utilizando la primera propiedad.

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{16} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{32} - \sqrt{50} - \sqrt{98} =$$

$$= \sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{2^4} + \frac{1}{\;}\cdot\sqrt{2^5} - \sqrt{2\cdot 5^2} - \sqrt{2\cdot 7^2} =$$

En el primer término tenemos una raíz sexta y una raíz cúbica. Para poder realizar la multiplicación se debe convertir la raíz cúbica en una raíz sexta, para lo que habrá que multiplicar por dos el índice de la raíz y el exponente que hay en el radicando.

En el resto de términos se va operando y extrayendo factores fuera de las raíces.

$$=\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{2^8}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^4\cdot 2}-5\sqrt{2}-7\sqrt{2}=\sqrt[6]{2\cdot 2^8}+\frac{1}{2}\cdot 2^2\sqrt{2}-12\sqrt{2}=$$

$$=\sqrt[6]{2^9}+\frac{4}{2}\cdot\sqrt{2}-12\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 2^6}+2\sqrt{2}-12\sqrt{2}=$$

Fíjate que para poder extraer un factor de una raíz sexta, el exponente debe ser múltiplo de seis.

$$=2\cdot\sqrt[6]{2^3}-10\sqrt{2}=$$

Como $6=3\cdot 2$ y $3=3\cdot 1$, en la primera raíz se aplica la propiedad: $\sqrt[m\cdot k]{a^{m\cdot n}}=\sqrt[k]{a^n}$ y que nos permite simplificarla de forma que resulta:

$$=2\cdot\sqrt[3\cdot 2]{2^{3\cdot 1}}-10\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{2}-10\sqrt{2}=-8\sqrt{2}$$

Por tanto, la solución del ejercicio es $-8\sqrt{2}$

Ejercicio resuelto

Prueba de Acceso a Grados para Mayores de 25 años - Año 2009

Expresa como un único radical

$$2\sqrt{8a^3}-\sqrt{288a^3}+3\sqrt{128a^3}-\sqrt{72a^3}-2\sqrt{32a^3}$$

siendo a un número real positivo.

Mostrar retroalimentación

Este ejercicio es muy parecido al del año 2011. Ya sabes, para poder expresarlo como un único radical los pasos serán:

1. Descomponer cada número en factores primos.
2. Extraer factores fuera de cada raíz (para ello los exponentes deberán ser múltiplos de dos, por estar dentro de una raíz cuadrada)
3. Si se espera como resultado un único radical, los radicandos que queden dentro de cada raíz deberán ser iguales, de forma que se puedan realizar sumas y restas con ellos, obteniendo un único radical como resultado final.

Si descompones en factores primos los números que están dentro de las raíces (sin olvidarnos de a, que es un número real positivo), debes obtener:

- $8 = 2^3$
- $288 = 2^5\cdot 3^2$ (ve dividiendo el número por dos mientras sea posible, luego por tres, 5, etc. hasta llegar al 1 como resultado de la división)
- $128 = 2^7$
- $72 = 2^3\cdot 3^2$
- $32 = 2^5$

Una vez realizadas estas descomposiciones, ya podemos hacer el ejercicio con los siguientes pasos (lo puedes hacer en menos o más pasos, en función de tu práctica realizando estos ejercicios)

$$2\sqrt{8a^3}-\sqrt{288a^3}+3\sqrt{128a^3}-\sqrt{72a^3}-2\sqrt{32a^3}=$$

$$=2\sqrt{2^3a^3}-\sqrt{2^5\cdot3^2\cdot a^3}+3\sqrt{2^7a^3}-\sqrt{2^3\cdot3^2\cdot a^3}-2\sqrt{2^5a^3}=$$

Descomponemos cada potencia en exponentes múltiplos de dos, por estar dentro de una raíz cuadrada, y poder extraer factores fuera de la raíz.

$$=2\sqrt{2^2\cdot2\cdot a^2\cdot a}-\sqrt{2^4\cdot2\cdot3^2\cdot a^2\cdot a}+3\sqrt{2^6\cdot2\cdot a^2\cdot a}-\sqrt{2^2\cdot2\cdot3^2\cdot a^2\cdot a}-2\sqrt{2^4\cdot2\cdot a^2\cdot a}=$$

Cada factor con exponente múltiplo de dos, se extraen de la raíz. Los factores con exponente 1, permanecerán dentro de la raíz.

$$=2\cdot2\cdot a\sqrt{2a}-2^2\cdot3\cdot a\sqrt{2a}+3\cdot2^3\cdot a\sqrt{2a}-2\cdot3\cdot a\sqrt{2a}-2\cdot2^2\cdot a\sqrt{2a}=$$

Ahora operamos y sacamos factor común de la raíz que se repite en todos los términos ($\sqrt{2a}$)

$$=4a\sqrt{2a}-12a\sqrt{2a}+24a\sqrt{2a}-6a\sqrt{2a}-8a\sqrt{2a}=$$

$$=2a\sqrt{2a}$$

Por tano, la solución es: $2a\sqrt{2a}$

Ejercicio resuelto

Prueba de Acceso a Grados para Mayores de 25 años - Año 2007

Efectúa la siguiente operación simplificando al máximo el resultado:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}}$$

Mostrar retroalimentación

Fíjate que hay raíces en los denominadores de las fracciones, y por tanto habrá que racionalizarlas, para que no queden raíces dividiendo. En ningún caso se puede realizar la suma de fracciones directamente, ya que no tienen el mismo denominador y no es adecuado intentar pasarlas a común denominador, por tener raíces en sus expresiones. Por consiguiente lo primero debe ser racionalizar cada fracción.

Para racionalizar la primera expresión, hay que multiplicar el numerador y el denominador por la expresión conjugada del denominador. Como el denominador es $2+\sqrt{2}$, deberás multiplicar "arriba y abajo" por su conjugado que es $2-\sqrt{2}$ y aplicar la fórmula del producto por un conjugado $(a+b)\cdot(a-b)=a^2 - b^2$.

Por otra parte, para racionalizar la segunda fración, habrá que multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{2}$.

Los pasos para resolver el ejercicio serán:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})}+\frac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-(\sqrt{2})^2}+\frac{4\sqrt{2}}{2}$$

Ahora seguimos operando y se aplica la fórmula del cuadrado de un binomio en el numerador de la primera fracción:

$$=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-(\sqrt{2})^2}+\frac{4\sqrt{2}}{2}=\frac{2^2-2\cdot2\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{4-2}+\frac{4\sqrt{2}}{2}=\frac{4-4\cdot\sqrt{2}+2}{2}+\frac{4\sqrt{2}}{2}$$

Como tenemos fracciones con el mismo denominador, no hay que calcular el m.c.d. y directamente sumamos:

$$=\frac{4-4\cdot\sqrt{2}+2}{2}+\frac{4\sqrt{2}}{2}=\frac{6-4\cdot\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Se observa que los términos con raíz cuadrada se simplifican, dando como resultado tres.

Para saber más

Si quieres hacer más ejercicios y repasar los conceptos vistos en este tema, puedes utilizar los siguientes enlaces y presentaciones:

Operaciones combinadas con números enteros

Problemas que se resuelven con fracciones

Presentación en Slideshare de aitana30

Operaciones combinadas con fracciones 1

Operaciones combinadas con fracciones 2

Cálculo de las funciones generatrices

Varios fracciones 1

Varios fracciones 2

Fracciones y decimales

Propiedades de las potencias 1

Propiedades de las potencias 2