Situación de aprendizaje 1.3: Un café en su punto

Matemáticas Generales

1º de Bachillerato

Situación de aprendizaje

Bloque 1: Números y operaciones

Situación de aprendizaje 3: "Un café en su punto"

Imagen de elaboración propia generada con leonardo.ai. *Taza de café humeante.* (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Typesetting math: 55%

1. La temperatura ideal para beber un café

1. Investigamos el modelo de enfriamiento

La matemática es una herramienta fundamental para modelizar y explicar tu mundo físico y material en diversas áreas de estudio, como la física, la química, la biología, la economía y muchas otras disciplinas científicas. Proporciona un lenguaje preciso y cuantitativo para describir y cuantificar fenómenos naturales y procesos en el mundo físico. Los números te permiten medir magnitudes, como longitudes, masas, velocidades, temperaturas y muchas otras, lo que te ayuda a caracterizar y entender el comportamiento de los objetos y sistemas en el mundo real.

Por ejemplo, el modelo de enfriamiento de Newton te permite simular el cambio de temperatura de un cuerpo a lo largo del tiempo y predecir su valor en un instante determinado. Esto lo puedes aplicar a situaciones de tu vida cotidiana. ¿Cuando pides un café en la cafetería, te lo sirven a la temperatura adecuada?

El reto que se te plantea es responder a la pregunta: ¿cuánto tiempo debes esperar a que se enfríe el café para beberlo a su temperatura óptima? También tendrás que investigar en qué medida afecta al tiempo de espera, los cambios en las condiciones de temperatura ambiente y la temperatura del café recién salido de la máquina.

El siguiente vídeo habla sobre la importancia de las matemáticas en tu vida diaria, especialmente en la ciencia y la tecnología, y cómo te ayuda a interpretar datos, diseñar algoritmos y entender la inteligencia artificial.

También explica que las matemáticas pueden ser útiles para aprender a gestionar la ansiedad, señalando la actitud que debes adoptar para superar las dificultades en su aprendizaje:

- "*Los problemas requieren calma para poder comprenderlos y resolverlos adecuadamente*".
- "*Si nuestro enfoque está continuamente en el resultado, podemos perdernos la oportunidad de aprender y pedir ayuda sin sentir vergüenza*".

<https://www.youtube.com/embed/RlUZv0MoVWk>
<https://www.youtube.com/embed/RlUZv0MoVWk>

https://www.youtube.com/embed/RlUZv0MoVWk <https://www.youtube.com/embed/RlUZv0MoVWk>

Video de Derivando <https://www.youtube.com/@Derivando> . *Pero...¿Para qué sirven las matemáticas?* <https://youtu.be/RlUZv0MoVWk> (Licencia estándar de YouTube <https://www.youtube.com/static?template=terms>)

2. ¿Qué herramientas matemáticas necesitarás?

Para lograr el reto planteado necesitarás recordar los diferentes tipos de números que existen (conjuntos numéricos) y cómo se realizan operaciones con ellos.

Verás que la relación existente entre el tiempo y la temperatura en el modelo de enfriamiento de un cuerpo, viene dada por una expresión matemática en la que aparece una potencia donde el exponente representa el tiempo. Para poder despejar el valor del exponente se introducirá el concepto de logaritmo y sus propiedades.

Dado que los valores tiempo y temperatura son números reales, aprenderás a expresarlos de manera aproximada <https://es.wikipedia.org/wiki/Aproximaci%C3%B3n> y a calcular el error <https://es.wikipedia.org/wiki/Error_de_redondeo> cometido.

Una forma adecuada de investigar la tendencia de la temperatura a lo largo del tiempo es haciendo uso de gráficas. También serán muy útiles para comprender en qué medida afecta la temperatura ambiental e inicial al modelo de enfriamiento. Esto dará lugar a introducir nuevos tipos de funciones: función exponencial y función logarítmica.

3. Estos serán tus logros

A lo largo de esta situación de aprendizaje vas a operar con los diferentes conjuntos numéricos desde los números naturales, que ya has utilizado anteriormente para calcular el cardinal de un conjunto, hasta los números reales, donde centrarás tu estudio.

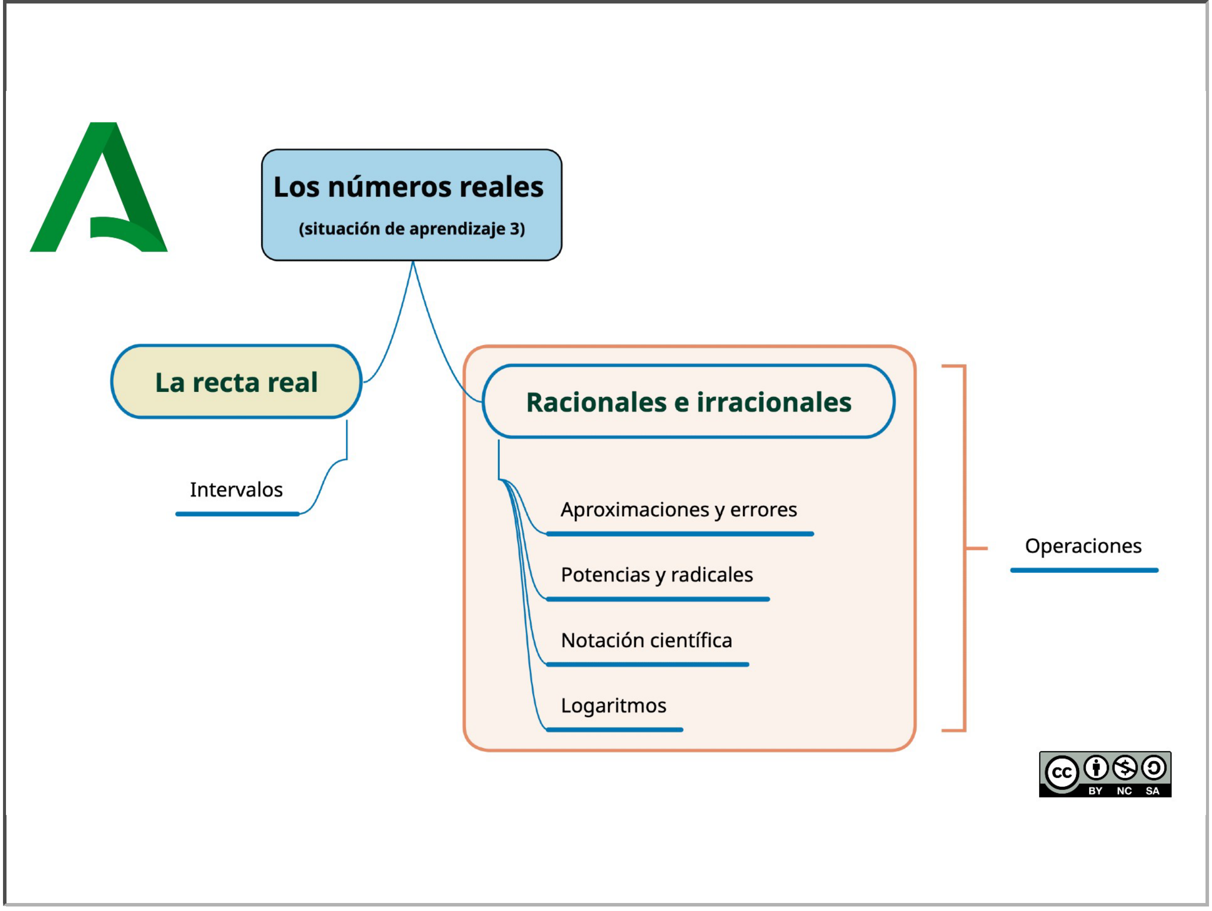
Empezarás haciendo un repaso de los números racionales y sus operaciones, y ampliarás este conjunto incorporando los números irracionales, lo que dará lugar al conjunto de los números reales. De esta forma, dispondrás de un nuevo marco numérico donde definir nuevos conceptos y modelizar, analizar e interpretar fenómenos de diferentes ámbitos del conocimiento, en particular el modelo de enfriamiento de un cuerpo.

A lo largo de esta situación de aprendizaje:

- Representarás números en la recta real y operarás con intervalos.
- Utilizarás la notación científica para expresar números muy grandes y muy pequeños.
- Obtendrás aproximaciones decimales de un número real y aprenderás cómo calcular el error absoluto y relativo.
- Operarás con potencias de exponente fraccionario y aplicarás las propiedades de la radicación.
- Aplicarás la definición de logaritmo y sus propiedades para resolver problemas en diferentes contextos.
- Descubrirás los vínculos de las matemáticas con otras áreas del conocimiento como la economía, la tecnología, etc.
- Tomarás conciencia de la utilidad de las matemáticas para resolver problemas de forma creativa e innovadora en situaciones diversas.
- Desarrollarás tus destrezas personales afrontando situaciones de incertidumbre para perseverar en la consecución del reto propuesto.
- Utilizarás el pensamiento científico para entender y explicar fenómenos que se producen en la vida cotidiana.
- Apreciarás la importancia de la precisión y mostrarás una actitud crítica acerca del alcance y limitaciones de los métodos empleados.
- Interpretarás y transmitirás los elementos más relevantes de investigación en diferentes formatos (gráficos, tablas, fórmulas)
- Utilizarás modelos predictivos generativos de imagen, haciendo un uso crítico, legal, seguro, saludable y sostenible de dicha tecnología.
- Utilizarás herramientas digitales adecuadas para representar e interpretar relaciones de magnitudes en problemas de la vida cotidiana.

4. Mapa Conceptual

<Mapa_SdA_3.pdf>
<Mapa_SdA_3.pdf>



Material de elaboración propia. *Mapa conceptual de la situación de aprendizaje 3.*

Typesetting math: 55%

2. ¿Cuántos tipos de números recuerdas?

1. Los números racionales

A lo largo de la historia, el ser humano ha sido consciente de la importancia de las matemáticas para entender el funcionamiento del mundo físico que nos rodea.

La ampliación de los diferentes conjuntos numéricos surgieron como una necesidad para resolver problemas de la vida cotidiana, la construcción, la física o la astronomía.

Las fracciones ya eran conocidas por los babilonios, griegos y egipcios. Pero el descubrimiento de los números irracionales tuvo que esperar mucho tiempo hasta que en el año 500 a. C. **Hipaso de Metaponto**, discípulo de Pitágoras, demostró que el número √2 no es un número racional.

Desde entonces, el conjunto de los números reales ha favorecido la creación de nuevas ramas de la matemática, lo que ha dado lugar al desarrollo de la física y de la tecnología.

Para comprender qué tipos de números forman el conjunto de los números reales, vamos a hacer un repaso de los diferentes conjuntos numéricos estudiados hasta ahora y la necesidad de las sucesivas ampliaciones.

Los números naturales

El conjunto numérico más simple es el de los **números naturales**, $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\ldots\}$. Lo utilizamos para contar y es el primero que se enseña en la escuela.

Pero hay situaciones que no pueden ser descritas correctamente utilizando solo los elementos de este conjunto. Por ejemplo, la temperatura por debajo de cero grados, las plantas de un edificio situadas por debajo de la planta baja, etc.

Los números enteros

Esto nos lleva a definir el conjunto de los **números enteros**, $\mathbb{Z}=\{\ldots\ldots,-4,-3,-2,-1,0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\}$, que incluye a los naturales con signo positivo y con signo negativo.

Sin embargo, cuando dividimos dos números enteros, la división no siempre es exacta, es decir, el cociente no es un número entero como, por ejemplo, $\frac{3}{2}$. Para dar cabida a este nuevo tipo de número definimos el conjunto de la números racionales.

Los números racionales

El conjunto de los **números racionales** se representa por $\mathbb{Q}$ y está formado por todos los cocientes o fracciones de dos números enteros $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b},\ tal\ que\ a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\}$

Ejemplos: $-\frac{3}{4},\frac{5}{9},\ 31.272727\ldots$

Este nuevo conjunto incluye a los enteros, pues cualquier número entero puede escribirse en forma de fracción, por ejemplo, $-3=\frac{-3}{1}$

Todos los números racionales admiten una expresión decimal que se obtiene extendiendo el algoritmo de la división del numerador entre el denominador de la fracción, dando lugar a la aparición de la coma decimal.

Los números racionales se caracterizan porque su expresión decimal es siempre exacta o periódica.

La fracción $\frac{5}{4}=1,25$ es un decimal **exacto**, pero $\frac{131}{99}=1,323232\ldots.$ es un número decimal **periódico puro** (se repite toda la parte decimal, en nuestro caso el grupo 32) y $\frac{5221}{990}=5,2737373\ldots$, es un número decimal **periódico mixto** (alguna cifra decimal no se repite, en nuestro caso la cifra 2, y el resto de la parte decimal si se repite, el grupo 73).

Sin embargo, nosotros podemos construir números decimales que no sean periódicos como, por ejemplo, 1,101001000100001....... Observa cómo la parte decimal no es periódica ya que hay un patrón de construcción que impide que se repita, pues vamos aumentando el número de ceros entre dos unos consecutivos.

A este nuevo tipo de número le llamamos **número irracional**.

2. Los números irracionales

Los números irracionales son aquellos que no son racionales, es decir, que no se pueden expresar en forma de fracción. Se caracterizan porque su expresión decimal tiene infinitas cifras y no presenta periodo.

Otros ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2} = 1.41421356...$, $\pi = 3.14159265...$, el número de oro $\varphi = 1.61803398.....$, el número $e = 2.71828182845...$

Las raíces no exactas de números naturales son fuente de números irracionales.

El conjunto de los números irracionales da lugar a la aparición de un nuevo conjunto que contiene a todos los anteriores. Se trata del conjunto de los **números reales.**

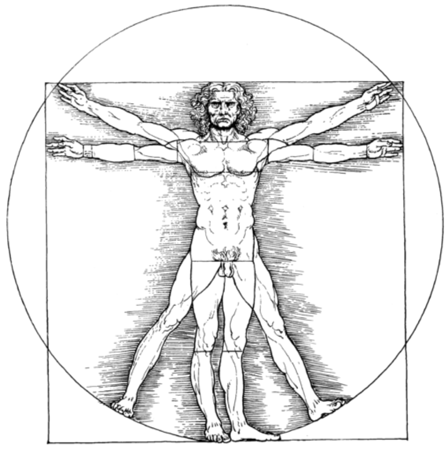


Imagen de Wikimedia <https://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page> . *El hombre de Vitruvio.* <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vitruvianischer_Mann.png>

3. Los números reales

El conjunto de los números reales está formado por los números racionales junto con los números irracionales . Es decir, si nombras con la letra I a los números irracionales, tienes que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$

Observa que se cumple que los números naturales están incluidos en los enteros, que a su vez están incluidos en los racionales, y estos se encuentran incluidos en el conjunto de los números reales, es decir, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

En el siguiente vídeo se explica la clasificación de los números reales con algunos ejemplos:

<https://www.youtube.com/embed/oOSEQgwXC5c>
<https://www.youtube.com/embed/oOSEQgwXC5c>

https://www.youtube.com/embed/oOSEQgwXC5c <https://www.youtube.com/embed/oOSEQgwXC5c>

Video de Tuto mate <https://www.youtube.com/@Tutomate> . *Clasificación de los números reales.* <https://youtu.be/oOSEQgwXC5c>

4. Orden de las operaciones

Vas a recordar cómo se realizan las operaciones de números racionales.

Cuando tienes un ejercicio en el que aparecen paréntesis con números que están sumando, multiplicando, restando o dividiendo de forma combinada, debes recordar el orden en que se deben realizar las operaciones.

Jerarquía de las operaciones:

1. En primer lugar debes calcular los paréntesis.
2. Después, los productos y cocientes.
3. Por último, las sumas y restas.

5. Recuerda

En los siguientes vídeos se explican, con ejemplos, las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fracciones.

<https://www.youtube.com/embed/aSAsqyzk4_4>
<https://www.youtube.com/embed/aSAsqyzk4_4>

https://www.youtube.com/embed/aSAsqyzk4_4 <https://www.youtube.com/embed/aSAsqyzk4_4>

Video de Tuto mate <https://www.youtube.com/@Tutomate> . *Suma y resta de fracciones.* <https://youtu.be/aSAsqyzk4_4>

<https://www.youtube.com/embed/VclnqJAUYA0>
<https://www.youtube.com/embed/VclnqJAUYA0>

https://www.youtube.com/embed/VclnqJAUYA0 <https://www.youtube.com/embed/VclnqJAUYA0>

Video de Tuto mate <https://www.youtube.com/@Tutomate> . *Multiplicación y división de fracciones.* <https://youtu.be/VclnqJAUYA0>

6. Ejercicio resuelto

Una vez que has recordado cómo se realizan las operación elementales con fracciones, vas a ver un ejemplo donde aparecen operaciones combinadas.

Calcula y simplifica:

$$\frac{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}:\frac{3}{15}}{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right)}=$$

1° Calculas el numerador, teniendo en cuenta que debes realizar la división antes que la resta:

$$\frac{3}{2}-\frac{4}{5}:\frac{3}{15}=\frac{3}{2}-\frac{4\cdot 15}{5\cdot 3}=\frac{3}{2}-\frac{60}{15}=$$

$$\frac{3}{2}-4=\frac{3-4\cdot 2}{2}=\frac{3-8}{2}=\frac{-5}{2}$$

El valor del numerador es: $\frac{-5}{2}$

2° Calculas el denominador aplicando nuevamente la jerarquía de las operaciones. Es decir, efectuas el paréntesis, a continuación el producto y por último la suma:

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{20-6}{15}=$$

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{14}{15}=\frac{4}{5}+\frac{14}{45}=\frac{36}{45}+\frac{14}{45}=\frac{50}{45}=\frac{10}{9}$$

El valor del denominador simplificado es: $\frac{10}{9}$

3° Finalmente, efectuas la división de la fracción obtenida en el numerador entre la fracción obtenida en el denominador:

$$-\frac{5}{2}:\frac{10}{9}=\frac{-45}{20}=\frac{-9}{4}$$

Por consiguiente, el resultado simplificado es: $\frac{-9}{4}$

7. La fracción como operador. Ejemplo

Imagen de elaboración propia generada por IA.

Una de las aplicaciones más utilizada de las fracciones para la resolución de problemas es su uso como operador, es decir, hallar la fracción de un número.

Para entender cómo se calcula la fracción de un número, mira este ejemplo:

Cinco amigos habéis comprado una pizza de 18€. A uno de ellos no le apetecía y te comiste su trozo. ¿Cuánto te toca pagar de la pizza?

Solución:

A cada uno de los amigos os corresponde $\frac{1}{5}$ de pizza y debéis pagar por el trozo la quinta parte del precio, es decir, 18 : 5 = 3.6€.

Pero si tú te comiste el trozo de tu amigo, te habrás quedado con $\frac{2}{5}$ de pizza (2 trozos de pizza). Como cada trozo cuesta 3.6€, deberás pagar 2 · 3.6€ = 7.2€

Resumiendo, te corresponde pagar $\frac{2}{5}$ de 18€ = (18 : 5) · 2 = 7.2€. Esto es equivalente a efectuar la operación $\frac{2}{5}\cdot 18 = 7.2$

8. Fracción de un número

Para calcular la **fracción de un número**, se multiplica la fracción por dicho número.

$\frac{a}{b}$ de N = $\frac{a}{b}\cdot$ N

Ejemplo: $\frac{2}{5}$ de 18 = $\frac{2}{5}\cdot 18=\frac{36}{5}=7.2$

Análogamente, para calcular la **fracción de una fracción**, se multiplican ambas fracciones.

$\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$

Ejemplo: $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$

9. Resolución de problemas

Mira en el siguiente vídeo la resolución del problema planteado junto con otros ejemplos:

<https://www.youtube.com/embed/OX2dbmry-18>
<https://www.youtube.com/embed/OX2dbmry-18>

https://www.youtube.com/embed/OX2dbmry-18 <https://www.youtube.com/embed/OX2dbmry-18>

Video de Tuto mate <https://www.youtube.com/@Tutomate> . *Fracción de un número y de una fracción.* <https://youtu.be/OX2dbmry-18>

10. Ejemplo

En algunas ocasiones te puede interesar calcular de cierta cantidad conocida una fracción de la misma. Observa el siguiente ejemplo:

Un embalse que está a $\frac{5}{8}$ de su capacidad, contiene 235 hm^3 de agua, ¿Qué cantidad de agua puede embalsar cuando está lleno?

Solución:

Si llamas C a la cantidad de agua que puede embalsar, tenemos que $\frac{5}{8} \cdot C = 235$. Despejando C, obtenemos $C = \frac{8}{5} \cdot 235 = 376$ hm^3.

Imagen de elaboración propia generada por IA

11. Importante

Supón que conoces el valor *c* de la fracción $\frac{a}{b}$ de un número N, es decir, $\frac{a}{b}$ de N = *c*.

Para hallar el valor de N, multiplicas c por la fracción inversa, es decir, N = $\frac{b}{a} \cdot c$

12. Porcentajes

Un **porcentaje** es una razón entre un número n y 100, y representa las partes que tomas de un total de 100.

Se expresa escribiendo el número seguido del símbolo %, esto es: $n\% = \frac{n}{100}$

Para calcular el tanto por ciento de una cantidad dispones de varios métodos:

1. El porcentaje es una proporción y puedes usar una regla de tres simple directa.

2. El porcentaje como una fracción.

    Para hallar el porcentaje de un número N calcula la fracción $\frac{n}{100}$ del número N.

    Por ejemplo, para hallar el 7% de 150 calcula $\frac{7}{100}$ de $150 = \frac{7 \cdot 150}{100} = 10.5$

3. El porcentaje es un decimal.

    Expresa el porcentaje como decimal y multiplica por el número N. Con el ejemplo anterior, tienes que $\frac{7}{100} \cdot 150 = 0.07 \cdot 150 = 10.5$

13. Comprueba lo que sabes

¡Es genial que hayas repasado algunos conceptos sobre operaciones con fracciones! Las fracciones son una herramienta matemática fundamental, y tener un buen dominio de ellas te abrirá las puertas para resolver una gran variedad de problemas tanto en matemáticas, como en la vida cotidiana.

Ahora que tienes una base sólida en operaciones con fracciones, es el momento perfecto para practicar y afianzar tus conocimientos. A través de la práctica, podrás adquirir una mayor fluidez en la resolución de problemas y ganar confianza en tus habilidades matemáticas. Recuerda que la práctica constante es la clave para el éxito.

Así que, adelante, elige entre las diferentes opciones de actividades y sumérgete en la práctica de operaciones con fracciones.

Opción A. Expresión decimal de un porcentaje

Completa los huecos arrastrando las palabras y números.

https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/ejerciciosrea/resultado-recurso-h5p/?idshortcode=1994&titulo=Expresi%C3%B3n%20decimal%20de%20un%20porcentaje

Opción B. Problemas sobre porcentajes

Resuelve los siguientes problemas sobre porcentajes:

Autoría: Javier Cayetano Rodríguez <https://ggbm.at/11501090>

—

Opción C. Fracción de un número

1. Jesús y Marta son titulares de una cuenta bancaria conjunta. Jesús retira los $\frac{4}{15}$ y, después, Marta los $\frac{3}{11}$ de lo que quedaba. Si el saldo resultante es de 2560€, ¿cuál era el saldo al principio?

Sugerencia

- 5200€
- 4860€
- 4800€

Incorrecto.

Incorrecto.

Correcto.

Si Jesús retira $\frac{4}{15}$, entonces queda 1 - $\frac{4}{15} = \frac{11}{15}$.

Después, Marta retira los $\frac{3}{11}$ de los $\frac{11}{15}$ que quedaba. Pero $\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{15} = \frac{3}{15}$, es decir, Marta ha retirado $\frac{3}{15}$ del saldo inicial.

En total han sacado $\frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$ lo que implica que quedan 1 - $\frac{7}{15} = \frac{8}{15}$ del saldo que había al principio.

Como el saldo resultante es de 2560, quiere decir que $\frac{8}{15}$ de S = 2560€, siendo S el saldo inicial.

Por consiguiente, S = $\frac{15}{8} \cdot 2560$ = **4800€**

Solución

1. **Incorrecto**
2. **Incorrecto**
3. **Opción correcta**

2. Un pantano que se encontraba a $\frac{3}{8}$ de su capacidad contenía 180 hm^3 de agua, pero, en el último mes, ha perdido 80 hm^3. ¿A qué fracción de su capacidad se encuentra ahora?

Sugerencia

- $\frac{5}{24}$
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{80}{180}$

Correcto.

La capacidad del pantano es C = $\frac{8}{3} \cdot 180 = 480$ hm^3

Se ha perdido $\frac{80}{480} = \frac{1}{6}$ de su capacidad.

Por consiguiente, la fracción a la que se encuentra es $\frac{3}{8} - \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$

Incorrecto.

Incorrecto.

Solución

1. **Opción correcta**
2. **Incorrecto**
3. **Incorrecto**

Typesetting math: 55% ierde en cada bote 1 quinto de la altura desde la que cae. Si después del tercer bote su altura es de 1.28

m, ¿cuál era la altura inicial?

- 3 metros.
- 1.6 metros.
- 2.5 metros.

Incorrecto.

Incorrecto.

Correcto.

Dado que el problema indica que la pelota al botar pierde un quinto de su altura inicial del bote, podemos interpretar que sube a $\frac{4}{5}$ de su altura inicial y como dice que tras el tercer bote conocemos la altura, debemos hacer los tres botes:

Supongamos que parte de una altura desconocida x:

Tras el primer bote subirá a $\frac{4}{5}$ de x que como hemos visto anteriormente es multiplicar la fracción por x dando como resultado; $\frac{4}{5} \cdot x = \frac{4 \cdot x}{5}$

Tras el segundo bote, y como parte de la altura anterior, volvemos a multiplicar por la fracción:

$\frac{4}{5} \cdot \frac{4 \cdot x}{5} = \frac{16 \cdot x}{25}$

Finalmente, tras el tercer bote volvemos a multiplicar por la fracción la altura inicial del bote:

$\frac{4}{5} \cdot \frac{16 \cdot x}{25} = \frac{64 \cdot x}{125}$

Como en este punto conocemos tanto la fracción, como la altura podemos despejar:

$\frac{64 \cdot x}{125} = 1,28 \to x = \frac{1,28 \cdot 125}{64} = 2,5$ m

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

Opción D. Operaciones combinadas

Typesetting math: 55%

Practica las operaciones combinadas de fracciones y comprueba los resultados.

<https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_fracciones-JS-LOMCE/2q2_ejercicios_resueltos_3f.htm>
<https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_fracciones-JS-LOMCE/2q2_ejercicios_resueltos_3f.htm>

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_fracciones-JS-LOMCE/2q2_ejercicios_resueltos_3f.htm <https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_fracciones-JS-LOMCE/2q2_ejercicios_resueltos_3f.htm>

14. Recomendaciones para trabajar la asignatura

Typesetting math: 55%

Consejos para estudiar de forma eficiente

Establece un horario y un lugar de estudio fijo.

Elimina distracciones como el teléfono móvil o la televisión.

Haz pausas frecuentes para descansar y evitar la fatiga mental. Lo ideal es hacer pequeños descansos de 10 ó 15 minutos cada 45 minutos de trabajo o cuando te sientas muy cansado/a.

Cuando resolvemos problemas de matemáticas

Es importante tener calma y comprenderlos antes de intentar resolverlos. También es útil saber pedir ayuda a tu profesor/a sin sentir vergüenza.

Cómo mantener la motivación en el estudio

Establece objetivos claros con metas pequeñas y alcanzables, haz un plan de estudio, mantén un horario regular, recompénsate por el progreso y rodéate de un ambiente de estudio adecuado.

Errores comunes que debemos evitar al estudiar

No tener un plan de estudio.

Estudiar sin descanso o sin horarios establecidos.

No repasar ni hacer ejercicios prácticos.

Cómo hacer un plan de estudio efectivo

Puedes hacer un listado de tareas e ir tachando conforme vayas haciéndolas.

¡Suerte y éxito en tus estudios!

Lectura facilitada

Estudiar de forma eficiente: Consejos y trucos

- **¿Por qué es importante estudiar de forma eficiente?**

  Estudiar de manera eficiente te ayuda a maximizar tu tiempo y retener mejor la información. Divide las sesiones de estudio, utiliza técnicas de estudio activo y prioriza las tareas.

- **Consejos para estudiar de forma eficiente**

  Establece un horario y un lugar de estudio fijo.

  Elimina distracciones como el teléfono móvil o la televisión.

  Haz pausas frecuentes para descansar y evitar la fatiga mental. Lo ideal es hacer pequeños descansos de 10 ó 15 minutos cada 45 minutos de trabajo o cuando te sientas muy cansado/a.

- **Cuando resolvemos problemas de matemáticas**

  Es importante tener calma y comprenderlos antes de intentar resolverlos. También es útil saber pedir ayuda a tu profesor/a sin sentir vergüenza.

- **Cómo mantener la motivación en el estudio**

  Establece objetivos claros con metas pequeñas y alcanzables, haz un plan de estudio, mantén un horario regular, recompénsate por el progreso y rodéate de un ambiente de estudio adecuado.

- **Errores comunes que debemos evitar al estudiar**

  No tener un plan de estudio.

  Estudiar sin descanso o sin horarios establecidos.

  No repasar ni hacer ejercicios prácticos.

- **Cómo hacer un plan de estudio efectivo**

  Puedes hacer un listado de tareas e ir tachando conforme vayas haciéndolas.

---

15. Importante

Los números naturales

El conjunto numérico más simple es el de los números Naturales, N={1,2,3,4,...}

Los números enteros

El conjunto de los números Enteros, Z={.......,−4,−3,−2,−1,0, 1, 2, 3, 4,...}, incluye a los naturales con signo positivo y con signo negativo.

Los números racionales

Se representa por Q y está formado por todos los cocientes o fracciones de dos números enteros Q={a/b, tal que a,b∈Z,b≠0}

Los números irracionales

Typesetting math: 55%

Son aquellos que no son racionales, es decir, que no se pueden expresar en forma de fracción. Se caracterizan porque su expresión decimal tiene infinitas cifras y no presenta periodo.

Los números reales

Este conjunto está formado por los números racionales junto con los números irracionales . Es decir, si nombramos con la letra I a los números irracionales, tenemos que $R=Q\cup \mathrm{I}$

Fracción de un número

Se multiplica la fracción por dicho número: a/b de N = a/b · N

3. Tu primer desafío

1. Potencias con exponente entero

Las potencias aparecen en la vida real en situaciones en las que algunos valores crecen o decrecen muy rápidamente. Por ejemplo, en el crecimiento poblacional, propagación de un virus, desintegración radioactiva, etc.

Recuerda que una potencia consiste en multiplicar un número (base) por sí mismo, cierto número de veces (exponente).

Por ejemplo, 2^5 representa una potencia de base 2 y exponente 5 (que es un número natural), y se calcula multiplicando $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Estas son las propiedades de las potencias:

Propiedad 1	$2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2^{3+2} = 2^5$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Propiedad 2	$2^5 / 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)/(2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{5-3} = 2^2$	$a^n / a^m = a^{n-m}$
Propiedad 3	$2^0 = 2^{1-1} = 2^1 / 2^1 = 1$	$a^0 = 1$
Propiedad 4	$(5^3)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
Propiedad 5	$(2 \cdot 5)^3 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 5^3$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
Propiedad 6	$(2/5)^3 = (2/5) \cdot (2/5) \cdot (2/5) = 2^3/5^3$	$(a/b)^n = a^n/b^n$

En los siguientes vídeos se explican las propiedades de las potencias con ejemplos:

<https://www.youtube.com/embed/rtUq3lb6sN4>
<https://www.youtube.com/embed/rtUq3lb6sN4>

https://www.youtube.com/embed/rtUq3lb6sN4 <https://www.youtube.com/embed/rtUq3lb6sN4>

Video de Archimedes Tube <https://www.youtube.com/@ArchimedesTube> . *Propiedades de las potencias.* <https://youtu.be/rtUq3lb6sN4> (Licencia estándar de YouTube <https://www.youtube.com/static?template=terms>)

<https://www.youtube.com/embed/Gh0jcNkas2g>
<https://www.youtube.com/embed/Gh0jcNkas2g>

https://www.youtube.com/embed/Gh0jcNkas2g <https://www.youtube.com/embed/Gh0jcNkas2g>

Video de Tuto mate <https://www.youtube.com/@Tutomate> . *Propiedades de las potencias de números naturales.* <https://youtu.be/Gh0jcNkas2g> (Licencia estándar de YouTube <https://www.youtube.com/static?template=terms>)

El concepto de potencia se puede extender al caso de exponentes negativos (enteros) y fraccionarios. Fíjate en la Propiedad 2. ¿Qué ocurriría si m > n?. Por ejemplo, $2^2/2^5 = (2 \cdot 2)/(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{2-5} = 2^{-3}$, pero $2^2/2^5 = 1/2^3$.

Por consiguiente, $2^{-3} = 1/2^3$.

2. Recuerda

Las potencias con exponente negativo se calculan hallando la inversa de la potencia con exponente positivo, es decir, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

3. Un caso especial

Sabes que "2 elevado a 3" es un número natural cuyo valor es $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, o que 4 es el número al que debes elevar 2 para obtener 16, $2^x = 16 \Rightarrow x = 4$.

Pero, ¿a qué número debes de elevar 2 para obtener el valor 3? Es decir, cuál ha de ser el valor de "x" en la igualdad $2^x = 3$.? ¿Tiene sentido la pregunta? ¿Existe algún número que cumpla la condición? Y, en caso afirmativo, ¿De qué tipo de número se trata, natural, racional o irracional? La respuesta a esta pregunta dará lugar al concepto de logaritmo que estudiarás más adelante.

4. Calculadora y potencias

Cuando en una potencia la base es negativa, esta debe ir entre paréntesis, porque calcular $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$ es distinto a $-5^2 = -5 \cdot 5 = -25$. Esto debes tenerlo en cuenta cuando efectúas operaciones con la calculadora.

En la imagen de abajo se destacan las teclas de signo negativo (no se debe confundir con la tecla de la operación restar), elevar al cuadrado y paréntesis.

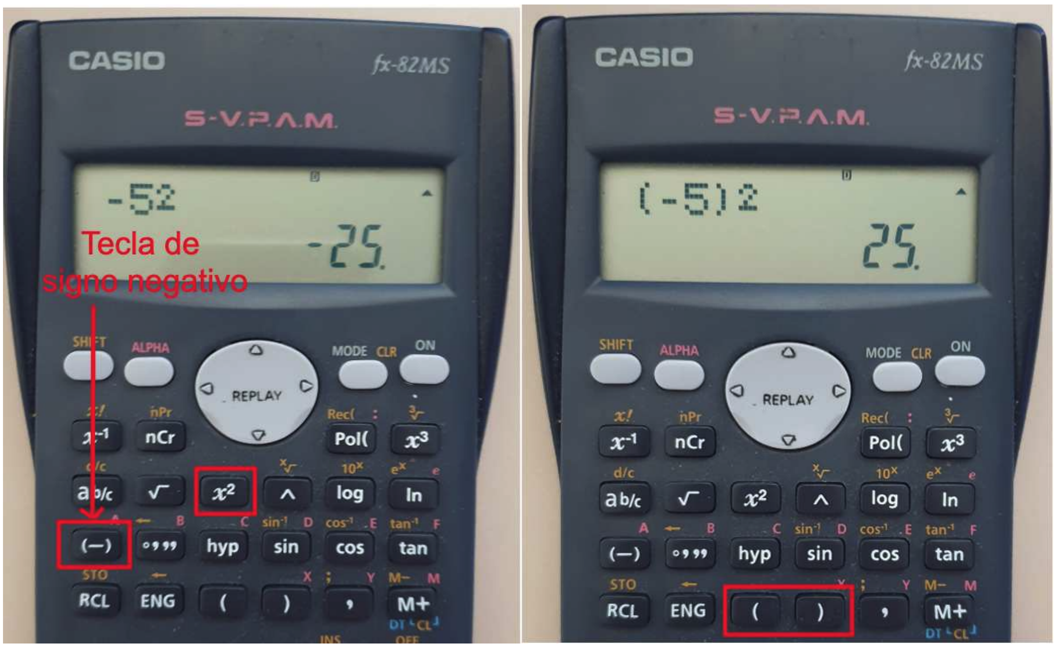


Imagen de elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

5. El desafío. Piensa y resuelve

Imagen de elaboración propia con Dall-e-2 (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Una de las situaciones de la vida cotidiana en las que aparece el cálculo de potencias es la forma en que se difunde la información en las redes sociales.

Cuando una persona comparte una noticia o contenido en una red social, puede llegar a un cierto número de personas en su red. A su vez, esas personas pueden compartir el contenido con sus propias redes, lo que amplía aún más su alcance. Este proceso puede repetirse varias veces, lo que lleva a un aumento exponencial <https://es.wikipedia.org/wiki/Crecimiento_exponencial> en el número de personas que ven el contenido a medida que se propaga por la red.

Un ejemplo de una noticia viral fue la del vestido que apareció en una fotografía en Facebook en 2015, y que se volvió viral debido a la forma en que se percibía su color. Algunas personas veían el vestido como blanco y dorado, mientras que otras lo veían como azul y negro. La discusión en línea sobre el vestido se convirtió en un fenómeno viral que se extendió rápidamente en las redes sociales.

El desafío que se te plantea es resolver el siguiente problema:

Cierta información llega a una persona usuaria de una red social, al minuto la comparte con 2 contactos suyos. Al cabo de un minuto, cada uno de ellos comparte dicha información con otras dos personas que, al minuto, la vuelven a compartir con otras dos, y así sucesivamente.

Responde de forma razonada a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas personas en total conocerán la información al cabo de 30 minutos?
2. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que al menos 10000 personas conozcan la información?

Observación: para simplificar el problema, suponemos que las personas que van recibiendo la noticia son todas diferentes, es decir, cada persona recibe la información sólo una vez.

Audio

Supongamos que cierta información llega a una persona usuaria de una red social y que al minuto la comparte con 2 contactos suyos. Al cabo de un minuto, cada uno de ellos comparte dicha información con otras dos personas, que, al minuto, la vuelven a compartir con otras dos, y así sucesivamente.

¿Cuántas personas conocerán la información al cabo de 30 minutos?

¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que al menos 10000 personas conozcan la información?

<1682423057995qwbrzsh719n.webm>
<1682423057995qwbrzsh719n.webm>

En este escenario, la propagación de la información sigue un patrón exponencial, donde cada persona que recibe la información la comparte con otras dos personas. Inicialmente, la información es conocida por 1 persona. Después de 1 minuto, habrá 2 personas más que conocen la información (las dos personas con las que se compartió inicialmente). Después de 2 minutos, habrá 4 personas más que conocen la información (las dos personas que cada uno de los contactos originales compartió la información). Después de 3 minutos, habrá 8 personas más que conocen la información (las dos personas que cada uno de los contactos de las personas que se enteraron en el segundo minuto compartieron la información).

Por lo tanto, al cabo de 3 minutos, el total de personas que conocen la información sería la suma de las personas que se enteraron en cada minuto: 1+2 + 4 + 8 = 15 personas.

Una buena estrategia o truco para abordar el problema consiste en colocar esta información en una tabla de valores, lo que te facilitará encontrar el patrón que sigue la secuencia numérica que vas obteniendo.

Tiempo transcurrido en minutos	Número de personas nuevas que se enteran de la noticia	Total de personas que se han enterado de la noticia en el tiempo transcurrido	Total de personas expresado en forma de potencia
0	1	1	$1=2^1-1$
1	2	1+2=3	$3=2^2-1$
2	2·2=4	1+2+4=7	$7=2^3-1$
[illegible]	2·2·2=8	1+2+4+8=15	$15=2^4-1$

. .	. .	. .	
n	2·2·2·....·2 (n veces) $=2^n$	1+2+4+8+....+2^n	Total=2^{n+1}-1

La secuencia de números correspondiente al número total de personas que se ha enterado de la noticia en el tiempo (minutos) transcurrido es: **1 , 3 , 7 , 15 , ...**

Estos valores se pueden expresar como una potencia de base 2 a la que le restas 1. El exponente de dichas potencias es igual al tiempo transcurrido (valor de la primera columna) al que le sumamos 1.

Así obtienes un patrón (fórmula) que te permite calcular el número total de personas en función de n (tiempo transcurrido en minutos): **Total=2^{n+1}-1**

- **Respuesta a la primera pregunta:**
  Basta con hacer n=30 en la fórmula obtenida anteriormente: Total(30) = 2^{30+1} - 1 = 2^{31} - 1 = 2 147 483 647 personas.

- **Respuesta a la segunda pregunta:**
  Basta con con hallar el menor valor de n (el exponente) que cumpla que: $2^n > 10000$. Probando con diferentes valores de n observarás que para n=14 obtenemos 2^{14}=16384 > 10000 (Fíjate que para n=13 obtendríamos 2^{13}=8192 < 10000, es decir, no cumple la condición)

---

6. Otra forma de razonar

En el desafío planteado, has visto que el número total de personas que conocían la información al cabo de n minutos es $T = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$

En la ayuda ofrecida para resolver el desafío se ha recurrido a la observación de la secuencia de números obtenidos para llegar a la conclusión de que T = 2^{n+1} - 1.

Pero fíjate ahora en otra forma o estrategia diferente de llegar a la misma conclusión.

Sabes que $T = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$

Si multiplicas por 2 ambos miembros de la igualdad obtendrías : $2T = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n+1}$

Si multiplicas por (-1) ambos lados de la primera igualdad, y sumas miembro a miembro ambas igualdades, obtendrías:

$2T = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n + 2^{n+1}$

$-T = -1 - 2^1 - 2^2 - 2^3 - \ldots - 2^n$

____

$T = -1 + 2^{n+1}$, pues $2^1 - 2^1 = 0, 2^2 - 2^2 = 0,$ y así, sucesivamente, $2^n - 2^n = 0$. Fíjate que $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

Es decir, $T = 2^{n+1} - 1$

Este tipo de sumas donde se cancelan todos los sumandos excepto el primero y el último, reciben el nombre de sumas telescópicas <https://es.wikipedia.org/wiki/Serie_telesc%C3%B3pica>

---

7. Piensa y resuelve

Aplicando la misma técnica del apartado anterior (sumas telescópicas), ¿cuál es el valor de $S = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n$?

En este caso, multiplicas por 3 ambos lados de igualdad y restas miembro a miembro.

Despejando S obtienes: $S = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)$

8. Ejercicios de autoevaluación

Practica las operaciones con potencias aplicando sus propiedades y comprueba el resultado.

<https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_3b.htm>
<https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_3b.htm>

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_3b.htm
<https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_3b.htm>

9. Hazlo aquí

En la resolución del desafío has comprobado que, inicialmente, en el minuto 0, sólo una persona conocía la noticia. Al cabo de un minuto la conocían 3 personas, al cabo de 2 minutos la conocían 7, y así sucesivamente.

Viste que esta información la podías colocar en una tabla:

Tiempo transcurrido (minutos)	Total de personas que se han enterado de la noticia en el tiempo transcurrido
0	1
1	3
2	7

3	15
...	...
n	Total= 2^{n+1}-1

Ahora vas a representar estos valores en unos ejes de coordenadas, de tal manera que en el eje de OX colocamos el tiempo transcurrido y en el eje OY el número total de personas que se ha enterado de la noticia.

Observa el gráfico de abajo.

1. Haz clic en la casilla "Unir puntos". Verás que aparece una gráfica que contiene a todos los puntos.

2. Haz clic en la casilla "Mostrar gráfica completa". Aparece la gráfica completa de la función $f(x)=2^{x+1}-1$ que se corresponde con la expresión Total= 2^{n+1}-1.

Puedes poner el gráfico en pantalla completa pulsando el botón cuadrado que aparece abajo a la derecha, se verá mucho mejor.

Autoría: Antonio Ruiz Murcia <https://ggbm.at/47504591>

Puedes observar que la función es creciente y que dicho crecimiento[2] <https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/funcion-creciente/> es muy rápido (pequeños incrementos en la "x" dan lugar a grandes incrementos en la "y"). A este tipo de funciones se les denomina **exponenciales** porque la variable independiente "x" está situada en el exponente.

En el siguiente apartado podrás saber más acerca de estas funciones.

—

10. La función exponencial

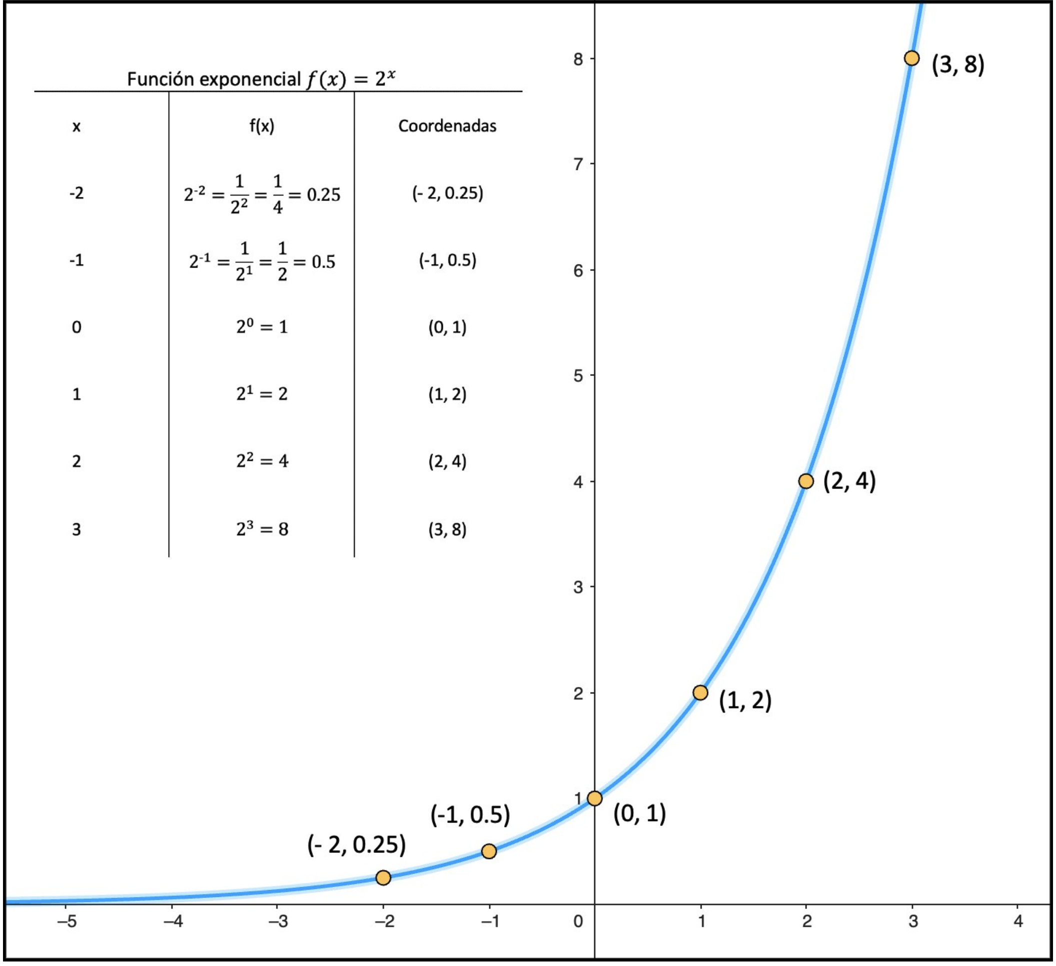
La función exponencial

La función exponencial es de la forma $f(x)=a^x$, con *a* un número real positivo.

Por ejemplo, $f(x) = 2^x$ se denomina función exponencial de base 2, y la has encontrado al resolver el problema planteado en el desafío.

En la imagen de abajo se muestra su gráfica obtenida a partir de la tabla de valores que aparece al lado.

Typesetting math: 55%



Elaboración propia. *Función exponencial* (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

11. Vocabulario: Conceptos básicos sobre funciones

Dominio de una función

El **dominio** o **campo de existencia** de una función está formado por aquellos números a los que les puedes hallar su transformado o imagen. Es de decir, "a" está en el dominio de f si puedes calcular f(a).

Por ejemplo, el dominio de la función $f\left(x\right) = \frac{1}{x}$ está formado por todos los números reales excepto 0, pues no está permitido dividir por 0. Observa lo que le ocurre a su gráfica en las proximidades de x=0. El dominio de la función f(x) se expresa así: D(f) = (-∞, 0) U (0, ∞)

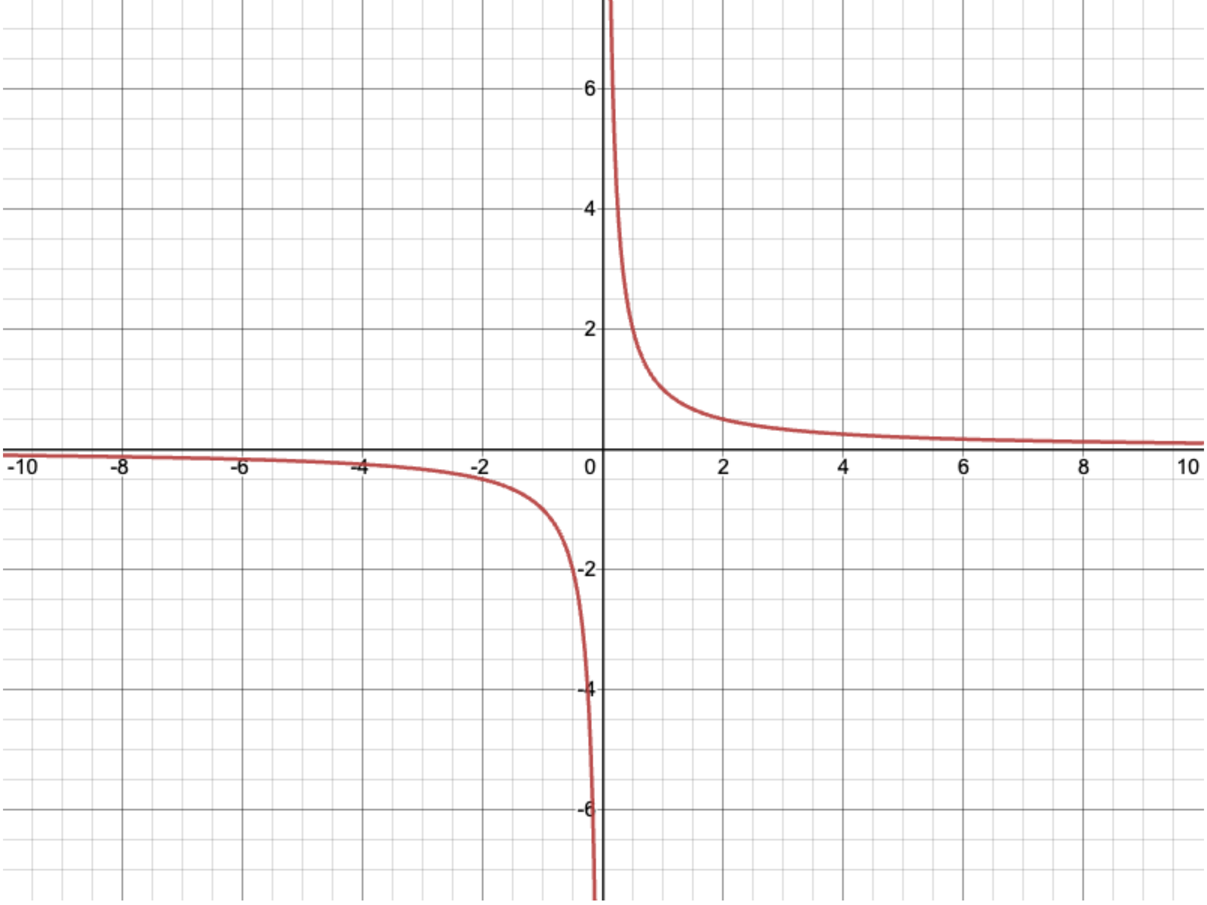


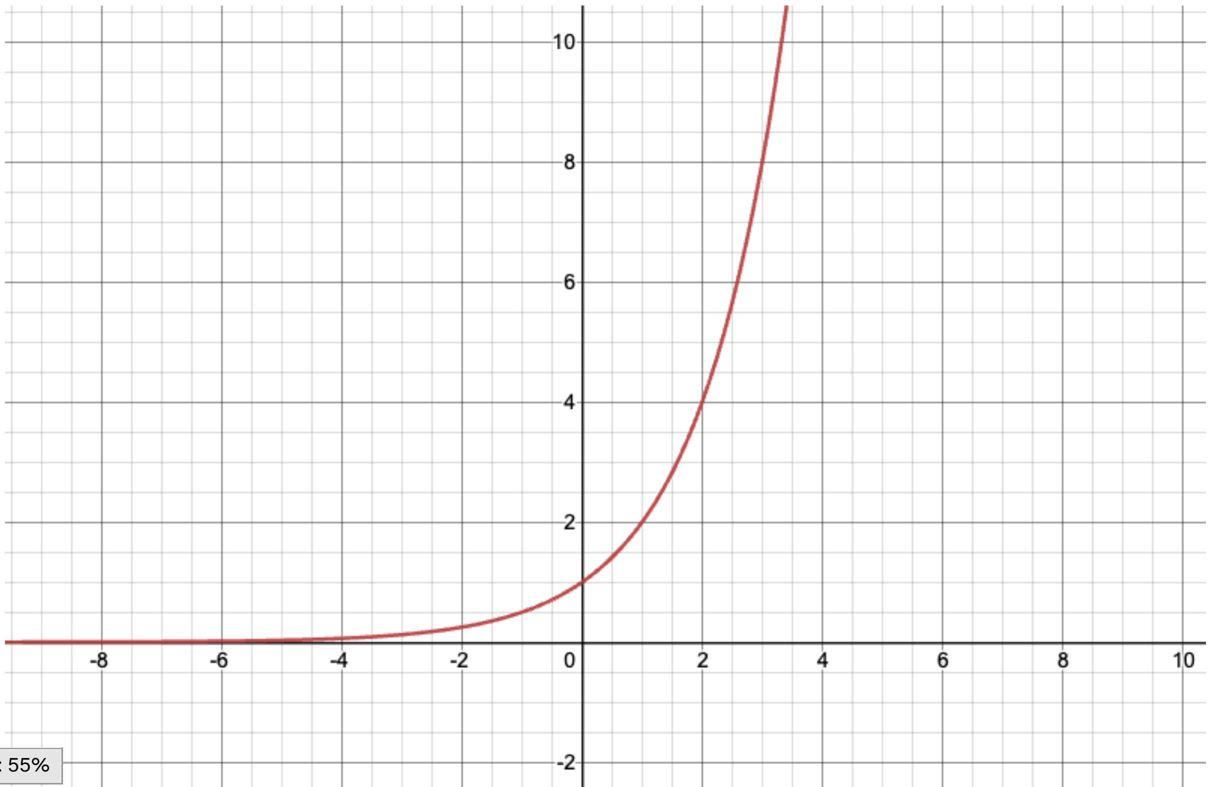
Imagen de elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Recorrido de una función

El **recorrido** o **rango** de una función está formado por aquellos valores que alcanza la función.

Por ejemplo, la función $f(x)=2^x$ solo puede tomar valores positivos, pues si $x > 0$ entonces $2^x > 0$, pero si $x < 0$ entonces $2^x = \frac{1}{2^{-x}}$ con $-x > 0$ por lo que $2^{-x}>0$ y, por tanto $2^x = \frac{1}{2^{-x}} > 0$. Concretamente, $2^3=8>0$ y $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} > 0$. Por tanto, se considera que el **recorrido de la función** está formado por todos los números reales positivos. Se expresa así: $R(f) = (0, \infty)$

Observa como la gráfica de $f(x)=2^x$ permanece siempre por encima de eje de abscisas (OX). Es decir $f(x)>0$ para cualquier valor de "x".



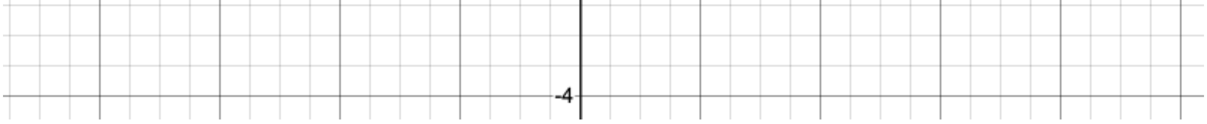


Imagen de elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Función creciente - Función decreciente

Se considera que una **función es creciente** si al aumentar el valor de x entonces también aumenta el valor de f(x). Es decir, si $x < y$ entonces $f(x) < f(y)$.

Por ejemplo, $f(x)=x^2$ es creciente para valores de $x > 0$. Concretamente, $1 < 2$ y se cumple que $f(1) = 1^2 = 1 < f(2) = 2^2 = 4$.

Por el contrario, se dice que una función es decreciente, si al aumentar el valor de x entonces disminuye el valor de f(x). Es decir, si $x < y$ entonces $f(x) > f(y)$.

Por ejemplo, $f(x)=x^2$ es decreciente para valores de $x < 0$. Concretamente, $-2 < -1$ y se cumple que $f(-2) = (-2)^2 = 4 > f(-1) = (-1)^2 = 1$.

En la gráfica de abajo puedes observar esta característica de la función $f(x)=x^2$.

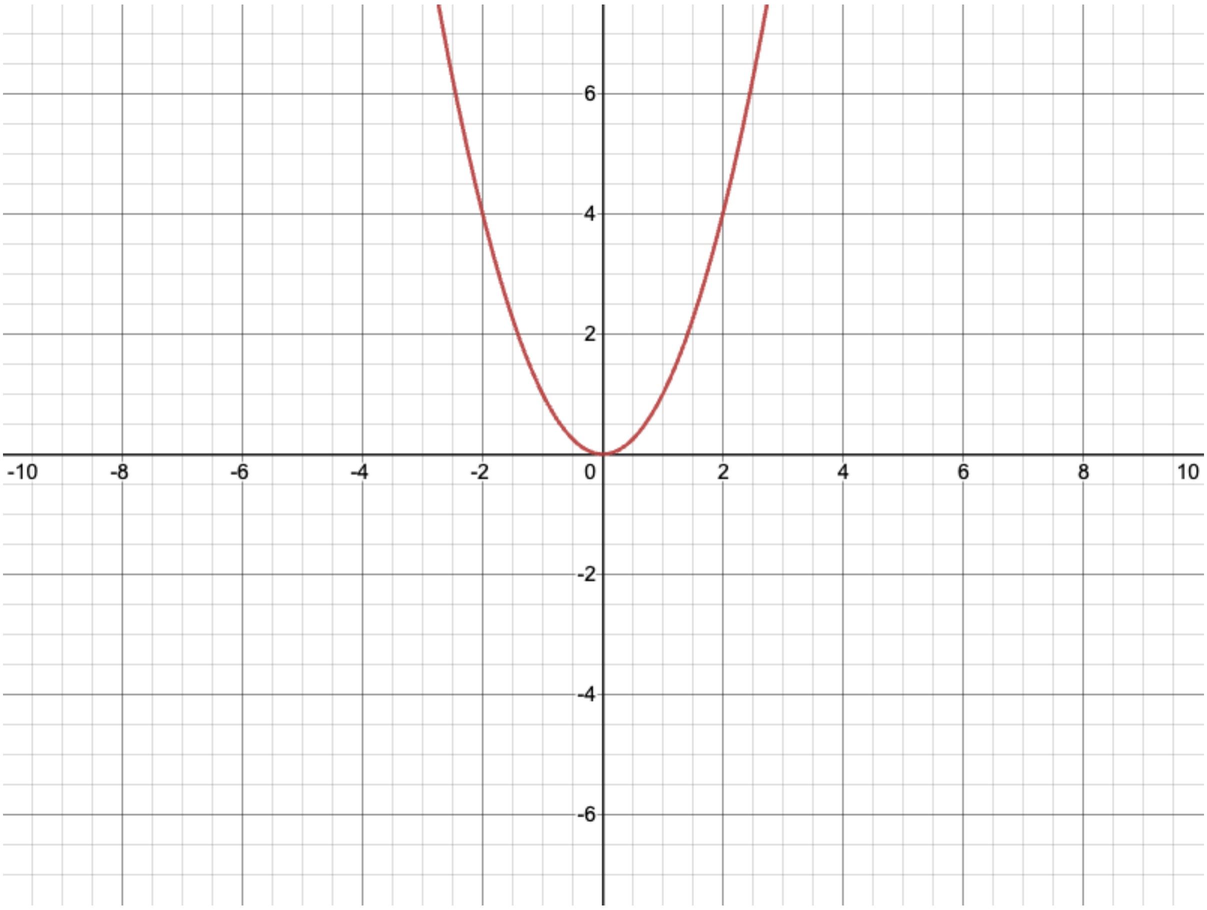


Imagen de elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Asíntota de una función

Se denomina asíntota de una función a la recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función. La recta puede ser horizontal, vertical u oblicua, por lo que se hablaría de asíntota horizontal, vertical u oblicua, respectivamente.

Por ejemplo, la función $f(x)=2^x$ presenta una asíntota horizontal en la recta $y=0$ (eje OX), como puedes observar en su gráfica.

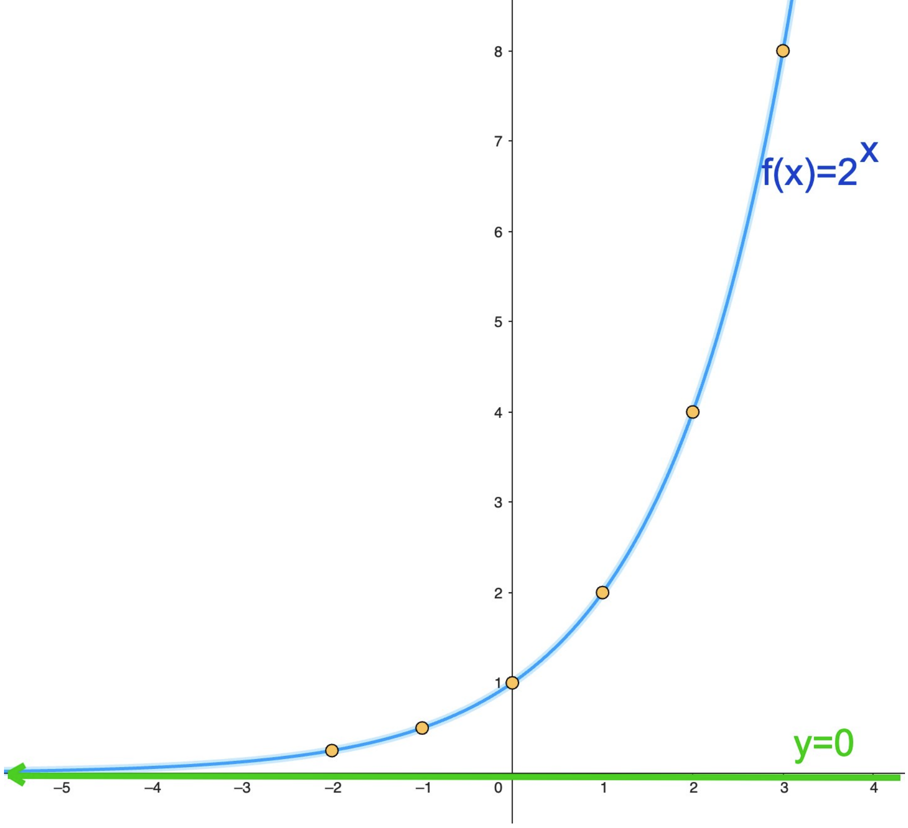


Imagen de elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

12. Explora y practica

En la siguiente actividad, modifica los valores de los parámetros haciendo clic sobre las flechas de color. Observa que la función es creciente cuando a>1, y decreciente cuando 0<a<1.

Fíjate que si 0<a<1, por ejemplo a=1/2, entonces puedes expresar la función con exponente negativo: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_funciones3-JS-LOMCE/q10_resueltos_2a.htm

A continuación, completa la tabla de valores y comprueba tu respuesta.

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_funciones3-JS-LOMCE/q10_resueltos_2b.htm

13. Aplica y resuelve

En esta actividad encontrarás problemas de la vida cotidiana en los que aparece la función exponencial. Aplica lo aprendido y resuelve.

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_funciones3-JS-LOMCE/q10_resueltos_2c.htm

Typesetting math: 55%

4. Los números reales

1. Exactitud y aproximación de los números reales

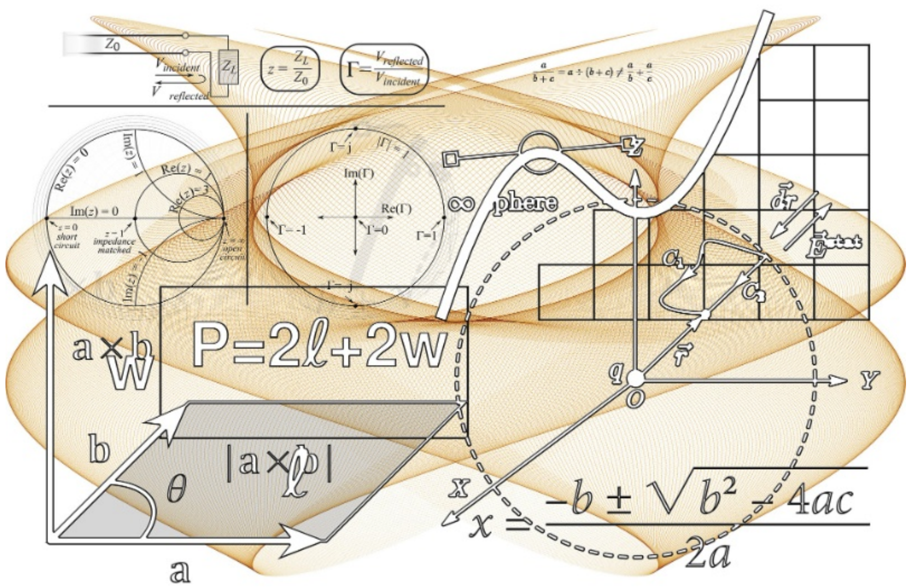
Una de las ventajas que ofrece el conjunto de los números reales frente al de los racionales radica en que estos no dejan huecos en la recta numérica.

Esta propiedad te asegura, por ejemplo, la existencia de solución al problema de encontrar un número que elevado al cuadrado sea igual a 2. A este número se le denota con $\sqrt{2}$ y representa el valor exacto de la solución. Cuando deseas trasladarlo al mundo físico o material recurres a su aproximación.

Sin embargo, cuando en un problema aparecen valores exactos de números reales, es conveniente operar directamente con ellos, y solo recurrir a una aproximación decimal para expresar el resultado final.

De esta manera evitarás la acumulación de errores que se producirían al trabajar, desde el principio, con valores aproximados.

En los siguientes apartados vas a estudiar algunas propiedades que te permitirán operar con valores exactos.



Geralt en Pixabay <https://pixabay.com/es/users/geralt-9301/> . *Matemáticas, Fórmula y Física.* <https://pixabay.com/es/illustrations/matem%c3%a1ticas-f%c3%b3rmula-f%c3%adsica-escuela-1233876/>

4.1. Ordenación e intervalos

1. Recta real

Si te dan dos números distintos cualesquiera, ya sean racionales o irracionales, siempre hay uno que es menor que el otro. Por otro lado, entre dos números reales diferentes existen una cantidad infinita de números reales. Esta propiedad te permite ordenarlos y representarlos sobre una recta que se llamará **recta real**.

Además, esta recta está llena de números, no contiene huecos, de tal manera que a cada número real le corresponde un punto de la recta y viceversa, a cada punto de la recta le corresponde un número real.

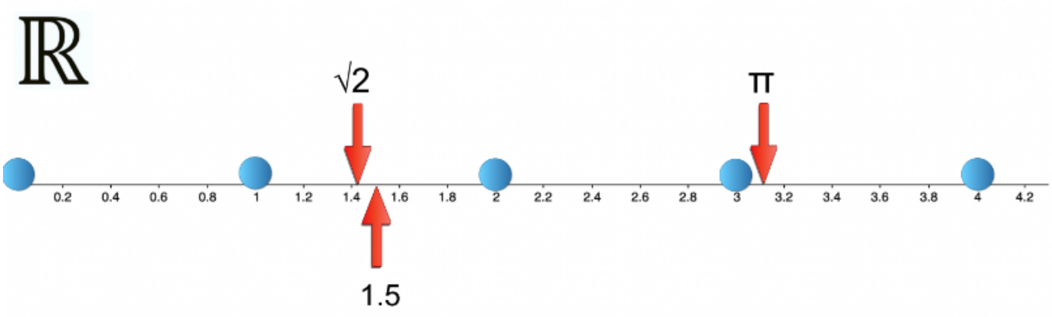


Imagen de elaboración propia.

2. Recordamos

Se dice que el número ***a* es menor que** *b*, y se representa ***a*** **<** ***b***, si y solamente **si** ***b*** **-** ***a*** **es un número positivo**. Es decir, $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$.

También se puede decir que *a* es menor que *b*, si al representarlos en la recta real, *a* está a la izquierda de *b*.

Ejemplos, $3.1 < \pi$, $\sqrt{2} < 2$. Decir que *a* es menor que *b* es equivalente a afirmar que *b* es mayor que *a*. Por ejemplo, $2 < 3$ es equivalente a $3 > 2$.

3. Intervalos

Coloquialmente hablando, un **intervalo** es un trozo de la recta real. Formalmente se define como el **subconjunto formado por los números reales que se encuentran comprendidos entre dos valores *a* y *b*, llamados extremos del intervalo.**

Por ejemplo, el intervalo I = (2 , 3) está formado por todos los números reales comprendidos entre 2 y 3, excluyendo estos valores. El uso de paréntesis indica que los extremos no están incluidos.

Para incluir alguno de los extremos, se sustituye el paréntesis por corchete. De esta manera, en el intervalo I = (2 , 3] el corchete al lado del 3 indica que este valor está incluido. Si deseamos incluir ambos extremos se escribe I = [2 , 3].

Se pueden definir **cuatro tipos diferentes de intervalos.**

4. Tipos de intervalos

Intervalo abierto

$I = (a , b) = \{ x \in R$ que cumplen $a < x < b \}$. No incluye ninguno de los extremos. Ejemplo: $I = (2 , 3) = \{ x \in R$ que cumplen $2 < x < 3 \}$

Imagen de Dnu72 en commons.wikimedia <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dnu72> . *Intervalo abierto.* <https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Intervalo_real_01.svg> (CC BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Intervalo cerrado

$I = [a , b] = \{ x \in R$ que cumplen $a \leq x \leq b \}$. Incluye ambos extremos. Ejemplo: $I = [2 , 3] = \{ x \in R$ que cumplen $2 \leq x \leq 3 \}$

Elaboración propia a partir de imagen en commons.wikimedia (CC BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Intervalo semiabierto

$I = (a , b] = \{ x \in R$ que cumplen $a < x \leq b \}$. Incluye uno solo de los extremos. Ejemplo: $I = (2 , 3] = \{ x \in R$ que cumplen $2 < x \leq 3 \}$

Imagen de Dnu72 en commons.wikimedia <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dnu72> . *Intervalo semiabierto.* <https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Intervalo_real_03.svg> (CC BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Intervalo infinito o semirrecta

I = [a , ∞) = { x ∈ R que cumplen a ≤ x }. Uno de los extremos es ∞. Ejemplo: I = [2 , ∞) = { x ∈ R que cumplen 2 ≤ x }

Imagen de Dnu72 en commons.wikimedia <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dnu72> . *Intervalo infinito.* <https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Intervalo_real_06.svg> (CC BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

5. Recuerda

En el siguiente vídeo se explican los diferentes tipos de intervalos con algunos ejemplos.

<https://www.youtube.com/embed/f8byoi_6NG4>
<https://www.youtube.com/embed/f8byoi_6NG4>

https://www.youtube.com/embed/f8byoi_6NG4 <https://www.youtube.com/embed/f8byoi_6NG4>

Video de Tuto mate <https://www.youtube.com/@Tutomate> . *Intervalos. Tipos. Representación.* <https://youtu.be/f8byoi_6NG4> (Licencia estándar de YouTube <https://www.youtube.com/static?template=terms>)

6. Ejercicio de autoevaluación

1. Selecciona el intervalo o desigualdad correspondiente al subconjunto de la recta real de la imagen:

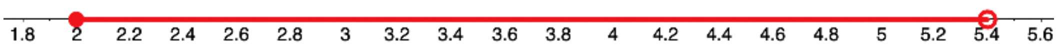


Imagen de elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

- ○ (2, 5.4]
- ○ (2, 5.4)
- ○ 2 ≤ x < 5.4

Incorrecto.

Incorrecto.

Correcto. El extremo superior del intervalo no está incluido.

Solución

1. **Incorrecto**
2. **Incorrecto**
3. **Opción correcta**

2. Sea el intervalo I = (1.5 , 2.8]. Selecciona la desigualdad correspondiente:

- $1.5 < x < 2.8$
- $1.5 < x \leq 2.8$
- $1.5 \leq x \leq 2.8$

Incorrecto.

Correcto.

Incorrecto.

Solución

1. **Incorrecto**
2. **Opción correcta**
3. **Incorrecto**

3. Sea la desigualdad $x \geq -2$. Selecciona el intervalo o semirrecta correspondiente:

- $(-\infty , -2]$
- $(-2 , \infty)$
- $[-2 , \infty)$

Incorrecto.

Incorrecto.

Correcto.

Solución

1. **Incorrecto**
2. **Incorrecto**
3. **Opción correcta**

Typesetting math: 55%

Importante

Intervalo

Es un subconjunto formado por los números reales que se encuentran comprendidos entre dos valores a y b, llamados extremos del intervalo.

Typesetting math: 55%

4.2. Aproximación y error

1. Los números en la vida cotidiana

En la vida cotidiana es habitual utilizar valores aproximados en lugar de exactos. Esto queda justificado porque las herramientas y dispositivos que utilizas para medir tienen un límite de precisión o sensibilidad, pero, también, porque sería poco útil por irrelevante.

Por ejemplo, si te preguntan por el precio del coche que has comprado y por el que has pagado 14.290€, normalmente dices que te ha costado 14.000€. La diferencia de 290 € parece poco importante respecto al precio real.

Vas a recordar cómo se leen los números decimales.

2. Números decimales

Los números decimales constan de una parte entera y otra decimal separadas por un punto o una coma.

En el número 12.34, 12 es la **parte entera** y 34 la **parte decimal**.

El número 12.3 se lee **12 con 3 décimas** porque se puede escribir como $12 + \frac{3}{10}$. Se dice que la cifra 3 ocupa el lugar de las décimas.

El número 12.04 se lee **12 con 4 centésimas** porque se puede escribir como $12 + \frac{4}{100}$. Se dice que la cifra 4 ocupa el lugar de las centésimas.

El número 12.34 se lee **12 con 34 centésimas** porque se puede escribir como $12 + \frac{34}{100}$

El siguiente número se lee 12 con trescientos cuarenta y cinco mil seiscientos setenta y ocho millonésimas.

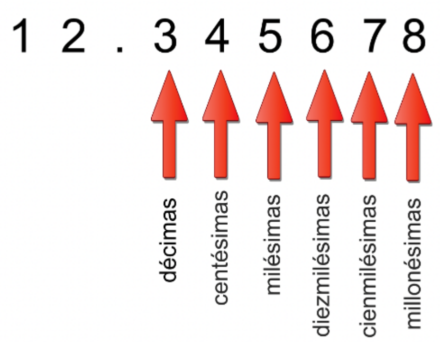


Imagen de elaboración propia. ( )

3. Aproximación de un número decimal

Aproximar un número decimal consiste en cambiarlo por otro próximo a él pero con menos cifras decimales.

Por ejemplo, aproximar el número 34.5678 a las centésimas consiste en escribir otro número próximo a él pero con solo dos cifras decimales.

Existen dos formas de aproximar un número:

Typesetting math: 55% iento.

- Por redondeo.

4. Truncamiento

Aproximación por truncamiento

Consiste en eliminar las cifras que están a la derecha de la unidad a la que debemos truncar.

Por ejemplo:

- La aproximación a las centésimas por truncamiento del número 3.45678 es: 3.45 (te quedas con las cifras hasta el lugar de la centésimas y eliminas todas las que están a la derecha).
- La aproximación a las milésimas por truncamiento del número 3.45678 es: 3.456.

5. Redondeo

Aproximación por redondeo

Para aproximar por redondeo un número hasta una unidad posicional determinada, tienes que aplicar la siguiente regla:

- Si la cifra que hay a la derecha de la unidad a la que deseas aproximar es mayor o igual que 5, entonces sumas 1 a dicha unidad y eliminas todas las cifras situadas a la derecha de esa unidad posicional.
- Si la cifra que hay a la derecha de la unidad a la que deseas aproximar es menor que 5, entonces eliminas todas las cifras situadas a la derecha de esa unidad posicional.

Ejemplos:

- La aproximación por redondeo de 7.346 a las décimas es 7.3, pues la cifra situada a la derecha de las décimas (unidad a la que deseas aproximar) es 4 que es un valor menor que 5.
- La aproximación por redondeo de 8.236 a las centésimas es 8.24, pues la cifra situada a la derecha de las centésimas (unidad a la que deseas aproximar) es 6 que es un valor mayor que 5.

6. Ejemplos de aproximación

En el siguiente vídeo se explican las dos técnicas de aproximación de números decimales utilizando varios ejemplos.

<https://www.youtube.com/embed/Om9NP_TJKEU>
<https://www.youtube.com/embed/Om9NP_TJKEU>

https://www.youtube.com/embed/Om9NP_TJKEU <https://www.youtube.com/embed/Om9NP_TJKEU>

Video de Tuto mate <https://www.youtube.com/@Tutomate> . *Aproximación de números decimales.* <https://youtu.be/Om9NP_TJKEU>

7. Ejercicio de autoevaluación

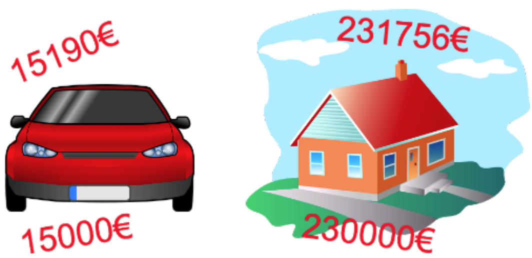
Completa la tabla adjunta, aproximando por truncamiento y redondeo los números que se indican.

Ten en cuenta que para escribir el número aproximado **debes emplear el punto decimal** y no la coma.

Número	Aproximación	Truncamiento	Redondeo
34.543	A las décimas		
21.45679	A las diezmilésimas		
7.236	A las centésimas		
3.1415926535	A las milésimas		

8. Error absoluto

Pablo se ha comprado un coche por el que ha pagado 15190€, pero cuando le preguntan cuánto le ha costado él dice que 15000€. Por otro lado, Marta ha pagado 231756€ por su nueva casa, pero ella dice que le ha costado 230000€. En ambos casos están dando un valor aproximado del precio real.



Elaboración propia a partir de imágenes de publicdomainvectors <https://publicdomainvectors.org/photos/liakad_car_front.png> (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Pablo está cometiendo un error de 190€, pues es la diferencia entre el valor real y el valor aproximado que él da.

Por su parte, Mata está diciendo el precio con un error de 1756€.

Estos errores se denominan errores absolutos y nos indican cuánto se desvía una aproximación del valor real.

El error absoluto es la diferencia, en valor absoluto, entre el valor real y el valor aproximado.

Error absoluto =| Valor real - Valor aproximado |

Recuerda que el valor absoluto de un número es el valor sin signo del número: |-5.12| = 5.12 y |6.3| = 6.3

9. Error relativo

Observa que el error absoluto cometido por Marta es mayor que el de Pablo (1756 > 190).

Sin embargo, si comparamos dichos errores con los valores reales respectivos apreciamos que:

- en el caso de Pablo obtenemos $\frac{190}{15190} \approx 0.0125 = \frac{1.25}{100} \approx 1\,\%$
- en el caso de Marta $\frac{1756}{231756} \approx 0.00758 = \frac{0.758}{100} \approx 0.8\,\%$

Es decir, el error cometido por Marta representa una fracción más pequeña de la unidad que el de Pablo (0.00758 < 0.0125).

 el error cometido por Pablo representa el 1 % del valor real, mientras que en el caso de Marta es del 0.8 %.

Por consiguiente, se puede decir que, en términos relativos, la aproximación de Marta es mejor que la de Pablo.

El error relativo es igual al error absoluto dividido entre el valor real.

Error relativo = Valor absoluto / Valor real

Este error relativo también se puede expresar como un porcentaje. Para ello, solo debes multiplicar por 100 el resultado del cociente: Error relativo (porcentaje) = (Valor absoluto / Valor real) *100 %

---

10. Caso práctico

El error relativo permite comparar errores al realizar mediciones de magnitudes que no son comparables, como por ejemplo la longitud y el peso.

Al medir la estatura de una persona sabes que has cometido un error de 10 cm, y al medir el peso de un elefante el error ha sido de 10 kg.

¿Qué medición es mejor?

Supón que la estatura real de la persona es de 190 cm y que el elefante pesa 3000 kg.

Error relativo en la medición de la estatura = $\frac{10}{190}$ ≈ 0.052 = 5.2 %

Error relativo en la medición del peso = $\frac{10}{3000}$ ≈ 0.003 = 0.3 %

Por consiguiente, la medición del peso del elefante es mejor.

---

11. Ejercicio de autoevaluación

Natalia mide 1.72 m pero en su ficha del equipo de natación aparece 1.7 m. ¿Cuál es el error relativo de esa aproximación?

Sugerencia

- 0. 116
- 0.0116
- 0.02

Incorrecto.

Correcto. Error absoluto = |1.72 -1.7| = 0.02   Error relativo = $\frac{0.02}{1.72}$ ≈ 0.0116

Incorrecto. 0.02 es el error absoluto de la aproximación.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

3. Incorrecto

12. Importante

Aproximación de un número

Consiste en cambiarlo por otro próximo a él pero con menos cifras decimales. Existen dos formas de aproximar un número:

- Por truncamiento.
- Por redondeo.

El error absoluto

Es la diferencia, en valor absoluto, entre el valor real y el valor aproximado.

El error relativo

Es igual al error absoluto dividido entre el valor real.

4.3. Radicales y propiedades

1. Radicación

En ocasiones es posible operar con valores exactos de números reales. Esto se consigue utilizando la representación simbólica de estos números. Es el caso de los radicales, que los puedes manipular fácilmente mediante sus propiedades, lo que permite simplificar expresiones de forma sencilla.

Podemos entender la **radicación** como la operación inversa a la potenciación. Para reforzar esta idea vas a ver un ejemplo. Supón que deseas hallar el volumen de un cubo de lado 2 m. Sabes que el volumen viene dado por la expresión $V = l^3$ donde l representa la longitud del lado. Por consiguiente, tienes que $V = 2^3 = 8\ m^3$.

Pero imagina que te interesa calcular la longitud del lado del cubo para que el volumen sea 8. En este caso te encuentras con esta expresión: $V = l^3$, $8 = l^3$. Es decir, tienes que calcular un número l que al elevarlo al cubo obtengas 8. Este número es, por definición, la raíz cúbica de 3.

Volviendo al primer ejemplo, 2 (longitud del lado del cubo) es por definición la raíz cúbica de 8, ya que $2^3 = 8$.

En general, si cualquier número *a* es elevado a 3 y al resultados le hallamos la raíz cúbica obtendremos el número de partida *a*.

2. Raíz enésima

La raíz enésima de un número *a* es *b*, si y solo si $b^n = a$. La raíz enésima se representa como se muestra en la imagen de la derecha.

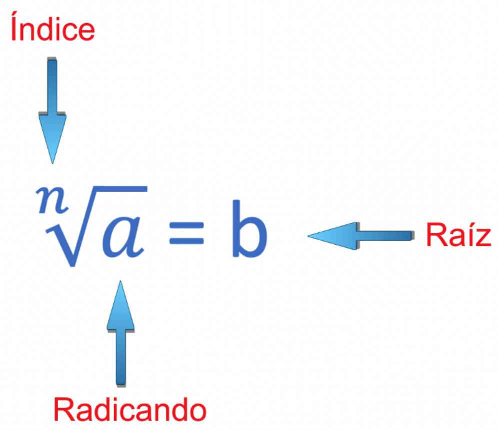


Imagen de elaboración propia.

Es decir, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

Ejemplos: $\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$, $\sqrt[4]{81} = 3 \Leftrightarrow 3^4 = 81$, $\sqrt{2} = 1.4142\ldots \Leftrightarrow (1.4142\ldots)^2 = 2$,

Los radicales se pueden expresar como potencias de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ya que se cumple la definición de raíz enésima $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

Ejemplos: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{5}{5}} = 2^1 = 2$, \sqrt[4]{27}=27^{\frac{1}{4}}=\left(3^{3}\right) ^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}

En general, \sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}. Por ejemplo, \sqrt[8]{3^{5}}=3^{\frac{5}{8}}, \sqrt[5]{\left(a\cdot b\right) ^{3}}=\left(a\cdot b\right) ^{\frac{3}{5}}

Poder expresar los radicales como potencias conlleva grandes ventajas, ya que las propiedades de la radicación se heredan de las propiedades de las potencias.

Algunas de estas propiedades son:

Propiedad 1	\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot \sqrt[n]{b}	\sqrt[3]{18\cdot 12}=\sqrt[3]{2\cdot 3^{2}\cdot 2^{2}\cdot 3}=\sqrt[3]{2^{3}\cdot 3^{3}} =\sqrt[3]{2^{3}}\cdot \sqrt[3]{3^{3}}=2\cdot 3=6
Propiedad 2	\sqrt[n]{\sqrt[m] {a}}=\sqrt[n.m]{a}	\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[2·3]{5}=\sqrt[6]{5}

Propiedad 3	$\sqrt[pr]{a^{q\cdot r}}=\sqrt[p]{a^{q}}$	$\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^{2}}=\sqrt[3]{2}$
Propiedad 4	$\sqrt[n]{a^{n}}=a$	$\sqrt[5]{2^{5}}=2$

3. Ejemplos de radicación

En el siguiente vídeo se explica el concepto de raíz de un número con ejemplos.

<https://www.youtube.com/embed/01c_83EBAKc>
<https://www.youtube.com/embed/01c_83EBAKc>

https://www.youtube.com/embed/01c_83EBAKc <https://www.youtube.com/embed/01c_83EBAKc>

Video de Tuto mate <https://www.youtube.com/@Tutomate> . *Cálculo de la raíz n-ésima de un número.* <https://youtu.be/01c_83EBAKc> (Licencia estándar de YouTube <https://www.youtube.com/static?template=terms>)

4 Radicación y potencias

En los siguientes vídeos se explica cómo pasar de radical a exponente fraccionario y viceversa, y cómo usar la calculadora para calcular raíces.

<https://www.youtube.com/embed/T0_BalTsvI0>
<https://www.youtube.com/embed/T0_BalTsvI0>

https://www.youtube.com/embed/T0_BalTsvI0 <https://www.youtube.com/embed/T0_BalTsvI0>

Vídeo de Tuto mate <https://www.youtube.com/@Tutomate> . *Raíz como potencia de exponente fraccionario.* <https://youtu.be/T0_BalTsvI0> (Licencia estándar de YouTube <https://www.youtube.com/static?template=terms>)

<https://www.youtube.com/embed/STpxVf2I-10>
<https://www.youtube.com/embed/STpxVf2I-10>

https://www.youtube.com/embed/STpxVf2I-10 <https://www.youtube.com/embed/STpxVf2I-10>

Vídeo de Matemáticas de instituto <https://www.youtube.com/@matematicasdeinstituto1508> . *¿Cómo usar la calculadora para calcular raíces?* <https://youtu.be/STpxVf2I-10> (Licencia estándar de YouTube <https://www.youtube.com/static?template=terms>)

5. La calculadora

También puedes calcular raíces en la calculadora usando la tecla de potencia. En ese caso debes expresar el radical como una potencia de exponente fraccionario.

$3\cdot \sqrt[4]{5}=3\cdot 5^{\frac{1}{4}}$ ≈ 4.486	$\sqrt[5]{3\sqrt[4]{5}}=\left(3\cdot 5^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}$ ≈ 1.3501

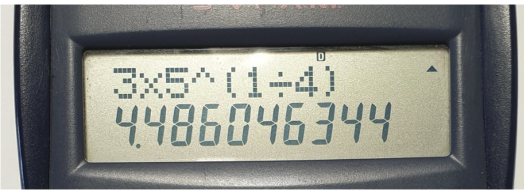


Imagen de elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

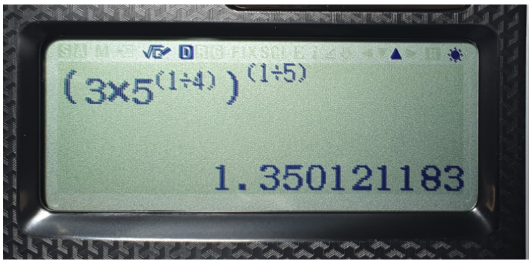


Imagen de elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

6. Ejercicio resuelto

1. Calcula el área de un rectángulo cuyos lados miden a= $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ cm y b= $\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ cm.

2. Expresa con un sólo radical: $\sqrt[4]{3}\sqrt[5]{27}\sqrt{3\sqrt{3}}$

3. ¿Qué longitud debe tener el lado de un cubo para que encierre un volumen igual a $5\sqrt{7}$ cm^3 ? Aproxima el resultado por redondeo a las centésimas.

4. Expresa en forma de potencia: $\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^{2}}}{\sqrt{3^{3}}}$

5. Calcula el perímetro, el área y la diagonal de un rectángulo de lados a = 2√5 cm y b = √15 cm. Expresa los resultados con dos cifras decimales de aproximación.

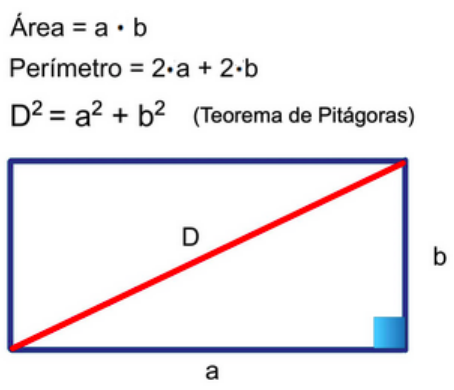
1. El área de un rectángulo se calcula aplicando A = a·b. En este caso tenemos que el área A= $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}+3\sqrt{2}) =\sqrt{2}\sqrt{3}+3\sqrt{2}\sqrt{2}+2\sqrt{3}\sqrt{3}+2\cdot 3\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}+3\sqrt{2^{2}}+2\sqrt{3^{2}}+6\sqrt{6}=7\sqrt{6}+3\cdot 2+2\cdot 3=7\sqrt{6}+6+6=12+7\sqrt{6}$ cm^2 ≈ 29.1464 cm^2 .

2. $\sqrt[5]{3}\sqrt[4]{27}\sqrt{3\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{4}}\cdot \left(3^{3}\right) ^{\frac{1}{5}}\cdot \left(3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) ^{\frac{1}{2}} = 3^{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) } = 3^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{3^{8}}$.

3. El volumen del cubo se calcula aplicando V = l^3 . Si V = $5\sqrt{7}$, entonces l^3 = $5\sqrt{7}$. Aplicando la definición de raíz cúbica, se deduce que l = $\sqrt[3]{5\sqrt{7}}$ ≈ 2.37 cm.

4. $\dfrac{3^{\frac{1}{3}}3^{\frac{2}{4}}}{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{3}{2}\right) } = 3^{-\frac{2}{3}}$.

5. El perímetro de un polígono es igual a la suma de las longitudes de sus lados. Al trazar la diagonal del rectángulo se forman dos triángulos rectángulos a los que podemos aplicar el Teorema de Pitágoras.



Elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Perímetro = 2 · 2√5 + 2 · √15 ≈ 16.69 cm.

Área = 2√5 · √15 = 2√30 ≈ 10.95 cm2 .

$D=\sqrt{a^{2}+b^{2}}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right) ^{2}+\left(\sqrt{15}\right) ^{2}}=\sqrt{20+15}=\sqrt{35}$ ≈ 5.92 cm.

7. Ejercicios de autoevaluación

1. Calcula el área de un rectángulo cuyos lados miden a= $\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ cm y b= $\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ cm.

- $87+10\sqrt{10}$ cm^2
- $21+10\sqrt{10}$ cm^2
- $87+9\sqrt{10}$ cm^2

Incorrecto.

Correcto.

Incorrecto.

Solución

1. **Incorrecto**
2. **Opción correcta**
3. **Incorrecto**

2. Expresa con un solo radical: $\sqrt[5]{2}\sqrt[3]{4}\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$

- $\sqrt[30]{2^{45}}$
- $\sqrt[15]{2^{23}}$
- $\sqrt[15]{2^{24}}$

Incorrecto.

Correcto.

Incorrecto.

Solución

1. **Incorrecto**
2. **Opción correcta**
3. **Incorrecto**

3. ¿Qué longitud debe tener el lado de un cubo para que encierre un volumen igual a $3\sqrt{11}$ cm^3 ?. Aproxima el resultado por redondeo a las centésimas.

- 2.15 cm.
- 1.79 cm.
- 3.16 cm.

Opción correcta

Incorrecto

Incorrecto

Solución

1. **Opción correcta**

 to

3. **Incorrecto**

4. Expresa en forma de potencia: $\dfrac{\sqrt{5}\sqrt[3]{25}}{\sqrt[4]{\sqrt{5^{3}}}}$

- $5^{\frac{19}{12}}$
- $5^{\frac{7}{12}}$
- $5^{\frac{19}{24}}$

Incorrecto.

Incorrecto.

Correcto.

Solución

1. **Incorrecto**
2. **Incorrecto**
3. **Opción correcta**

8. Importante

Radicación

La raíz enésima de un número a es b, si y solo si $b^n = a$. Es decir, $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n = a$.

5. Notación científica

Las matemáticas del universo: lo inmenso y lo infinitesimal

El 25 de Diciembre de 2021 se llevó a cabo el lanzamiento del telescopio espacial **James Webb**, desarrollado por la NASA, la Agencia Espacial Europea y la Agencia Espacial de Canadá, con destino a una zona del espacio denominada punto de Lagrange L2.

Esta región del espacio, situada a 1 500 000 km de la Tierra en dirección opuesta al Sol, tiene la propiedad de que los satélites situados en ella se encuentran en equilibrio gravitacional por lo que necesitan un mínimo consumo de energía para acompañar a la Tierra en su órbita alrededor del Sol.

El espejo primario del James Webb está compuesto por 18 segmentos hexagonales que deben ser calibrados con una precisión inferior a 0.000 000 01 m para que las imágenes captadas por cada uno de ellos coincidan en una sola imagen.

Esta maravilla de la tecnología ha permitido el descubrimiento de Eärendel, la estrella más lejana jamás detectada, a 12 900 000 000 años luz de distancia.

Como puedes observar, en esta breve descripción, aparecen valores que son muy grandes frente a otros muy pequeños. La notación científica permite escribir estos números de forma abreviada sin sacrificar exactitud y además es muy útil para comparar magnitudes.

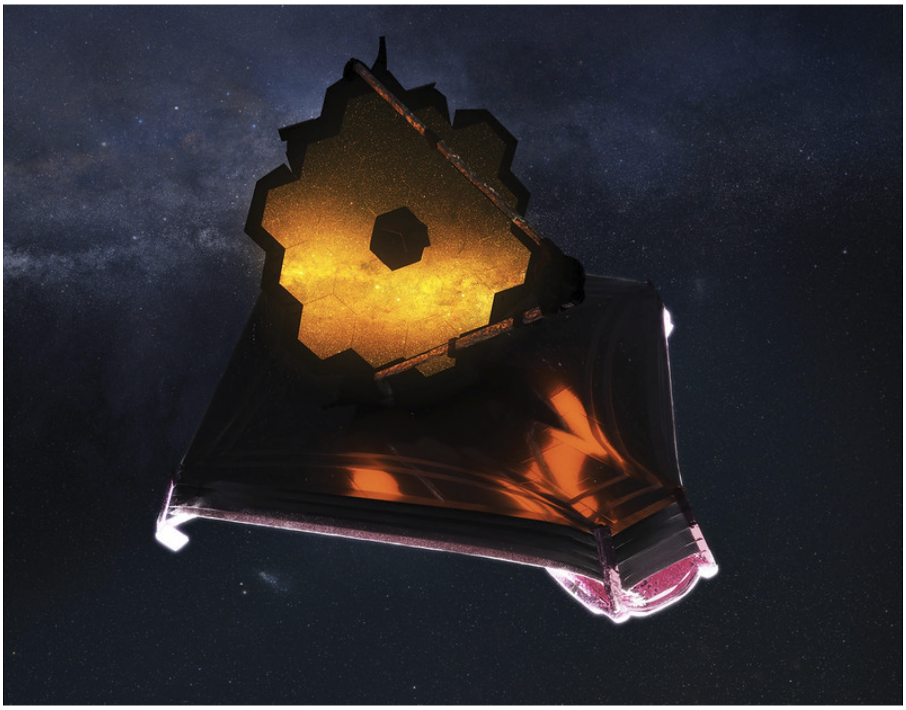


Imagen de Adriana Manrique para la NASA, en Flickr <https://www.flickr.com/photos/nasawebbtelescope/> . *Telescopio James Webb.* <https://www.flickr.com/photos/nasawebbtelescope/50489833002>

Typesetting math: 55%

5.1. Expresiones y operaciones

1. Notación científica

Para expresar valores muy grandes o muy pequeños se utiliza una forma abreviada de notación. Por ejemplo, la masa de la Tierra es 5 972 000 000 000 000 000 000 000 kg, o lo que es lo mismo, $5.972 \cdot 10^{24}$, mientras que la masa de un protón es 0. 000 000 000 000 000 000 000 000 001 672 kg o, también, $1.672 \cdot 10^{-27}$ kg.

Estas formas abreviadas de escribir estos números reciben el nombre de **notación científica**.

Un número expresado en **notación científica es de la forma m · 10^n** donde n es un número entero y m un número decimal cuya parte entera tiene una sola cifra distinta de 0.

Ejemplos: $102.4 = 1.024 \cdot 10^2$; $12\ 000\ 000 = 1.2 \cdot 10^7$; $0.024 = 2.4 \cdot 10^{-2}$; $0.\ 000\ 000\ 125 = 1.25 \cdot 10^{-7}$

2. Operaciones en notación científica

Sumar y restar en notación científica

Para sumar y restar con expresiones en notación científica, debes transformar las expresiones por otras equivalentes de forman que se igualen los exponentes de las potencias de 10.

Por ejemplo, para efectuar $1.25 \cdot 10^5 - 6.2 \cdot 10^4$ se transforma el primer término $1.25 \cdot 10^5$ en $12.5 \cdot 10^4$ (son el mismo valor) de tal manera que puedas sacar factor común 10^4 : $1.25 \cdot 10^5 - 6.2 \cdot 10^4 = 12.5 \cdot 10^4 - 6.2 \cdot 10^4 = (12.5 - 6.2) \cdot 10^4 = 6.3 \cdot 10^4$

Multiplicar y dividir en notación científica

Para multiplicar y dividir expresiones en notación científica, se multiplican o dividen las partes decimales y las potencias de 10, respectivamente. El resultado obtenido se expresa en notación científica.

Un ejemplo de cada tipo, un producto y una división, observa como al final ambos resultados no quedan bien expresados en notación científica porque el número decimal no tiene una sola cifra diferente de cero delante de la coma y hay que expresarlo correctamente:

$$\left(2.832\cdot10^{7} \right) \cdot \left(4.2\cdot10^{-3} \right)= \left(2.832 \cdot 4.2 \right)\cdot \left(10^{7} \cdot10^{-3} \right)=11.89\cdot10^{7+\left(-3 \right)}=11.89\cdot10^{4}=1.189\cdot10^{5}$$

$$\left(2.832\cdot10^{7} \right) \div \left(4.2\cdot10^{-3} \right)= \left(2.832 \div 4.2 \right)\cdot \left({10^{7} \div 10^{-3}} \right)=0.674\cdot10^{7-\left(-3 \right)}=0.674\cdot10^{10}=6.74\cdot10^{9}$$

3. La notación científica en la calculadora

Es recomendable que realices un visionado de los siguientes vídeos explicativos.

En el de la izquierda, se muestra cómo introducir e interpretar números expresados en notación científica en la calculadora. En el de la derecha, se explica cómo operar con expresiones en esta notación con algunos ejercicios.

<https://www.youtube.com/embed/c6iauy_4OZw>
<https://www.youtube.com/embed/c6iauy_4OZw>

https://www.youtube.com/embed/c6iauy_4OZw <https://www.youtube.com/embed/c6iauy_4OZw>

<https://www.youtube.com/embed/abzJYvGQaR0>
<https://www.youtube.com/embed/abzJYvGQaR0>

https://www.youtube.com/embed/abzJYvGQaR0 <https://www.youtube.com/embed/abzJYvGQaR0>

Video de Matemáticas profe Álex <https://www.youtube.com/@MatematicasprofeAlex> . *Notación científica uso correcto de la calculadora Fx 82, 95, 570 MS y similares.* <https://youtu.be/c6iauy_4OZw> (Licencia estándar de YouTube <https://www.youtube.com/static?template=terms>)

Vídeo de Tuto mate <https://www.youtube.com/@Tutomate> . *Producto y división en notación científica.* <https://youtu.be/abzJYvGQaR0> (Licencia estándar de YouTube <https://www.youtube.com/static?template=terms>)

4. Ejercicios de autoevaluación

Practica cómo pasar expresiones en notación científica a decimal. Comprueba los resultados.

<https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_4a.htm>
<https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_4a.htm>

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_4a.htm <https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_4a.htm>

5. Ejercicios de autoevaluación

Opera con números en notación científica y comprueba los resultados.

<https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_4c.htm>
<https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_4c.htm>

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_4c.htm <https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales-JS-LOMCE/3q1_ejercicios_resueltos_4c.htm>

6. Importante

Notación científica

Un número expresado en notación científica es de la forma $m \cdot 10^n$ donde n es un número entero y m un número decimal cuya parte entera tiene una sola cifra distinta de 0.

6. Logaritmos

1. Buscamos un exponente

Si en la radicación te preguntabas que un número elevado a 3 da como resultado 8, ahora vas a plantearte a qué número debemos elevar 2 para obtener 8. Es decir, en la radicación resolviste la ecuación $x^3=8$, mientras que ahora deseas hallar la incógnita *x* en esta igualdad $2^x=8$. A la solución *x* de esta ecuación, le llamarás logaritmo en base 2 de 8 y se expresa así: $x=\log _{2}8=3$. Efectivamente, $2^3=8$. Mira la definición general de logaritmo.

2. Logaritmo

Se dice que el **logaritmo en base *a* de N es igual a *x***, y se escribe $\log _{a}N=x$, si al calcular *a* elevado a *x* obtienes N. Es decir, $\log _{a}N=x \Leftrightarrow a^{x}=N$. Al número *a* se le llama base del logaritmo y N es el argumento. Supón siempre que *a*>0.

Ejemplos: $\log _{3}9=2$ ya que $3^2=9$; $\log _{5}\frac{1}{5}=-1$ pues $5^{-1}=\frac{1}{5}$; $\log _{3}\sqrt{3}=\frac{1}{2}$ pues $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$. Sin embargo $\log _{2}\left(-4\right)$ no existe, ya que la igualdad $2^{x}=-4$ no se cumple para ningún número real *x.*

3. Ejercicios resueltos

En el siguiente vídeo se explica el concepto de logaritmo y se plantean, para que practiques, algunos ejercicios con la solución.

<https://www.youtube.com/embed/iMpcEmopfNw>
<https://www.youtube.com/embed/iMpcEmopfNw>

https://www.youtube.com/embed/iMpcEmopfNw <https://www.youtube.com/embed/iMpcEmopfNw>

Vídeo de elaboración propia. *Logaritmos: definición.* <https://youtu.be/iMpcEmopfNw> (CC0 <http://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.es>)

4. Propiedades de los logaritmos

Cuando la base del logaritmo es 10 recibe el nombre de **logaritmo decimal** y, en este caso, no se escribe la base. Por ejemplo, el logaritmo en base 10 de 5 se expresaría: $\log 5$.

Existe una base de logaritmos especialmente interesante que viene dada por el número *e = 2.718281....* Este número es de gran importancia en matemáticas pues aparece de forma natural en procesos donde se produce un crecimiento continuo. El logaritmo cuya base es el número *e* recibe el nombre de **logaritmo neperiano** en honor al matemático escocés John Napier que fue quien lo definió. El logaritmo en base *e* de 5 se expresaría: $\ln 5$.

Conoce algunas propiedades que cumplen los logaritmos.

Propiedad 1	Solo se puede calcular el logaritmo de N si N > 0	$\log _{8}\left(-5\right)$ no existe

Propiedad 2	$\log _{a}\left(xy\right) =\log _{a}x+\log _{a}y$	$\log _{3}\left(2\cdot 10\right) =\log _{3}2+\log _{3}10$
Propiedad 3	$\log _{a}\left(\frac{x}{y}\right) =\log _{a}x-\log _{a}y$	$\log _{10}\left(\frac{20}{100}\right) =\log _{10}20-\log _{10}100$
Propiedad 4	$\log _{a}x^{n}=n\log _{a}x$	$\log _{2}2^{5}=5\log _{2}2=5\cdot 1=5$
Propiedad 5: Cambio de base	$\log _{a}N=\dfrac{\log _{b}N}{\log _{b}a}$	$\log _{2}5=\dfrac{\log _{10}5}{\log _{10}2}$ ≈ 2.3219...

5. Calculadora y logaritmos

Las calculadoras científicas tienen incorporadas las funciones logaritmo decimal (tecla *log*) y logaritmo neperiano (tecla *ln*). Si deseas calcular logaritmos en otras bases debes usar la Propiedad 5 "Cambio de base".

Para obtener logaritmo neperiano de 5, pulsa la tecla ln, a continuación 5, y la tecla igual. Para hallar $\log _{2}5$ puedes pasar a logaritmo decimal (base 10) que está disponible en la calculadora $\log _{2}5=\dfrac{\log _{10}5}{\log _{10}2}$ ≈ 2.3219...

En las siguientes imágenes se muestra cómo hallar estos valores con la calculadora.

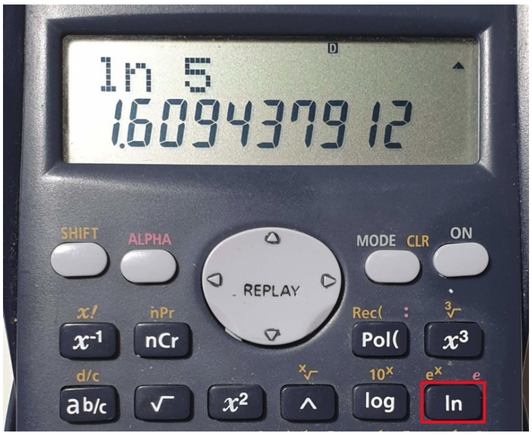


Imagen de elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

ln(5) ≈ 1.6094...

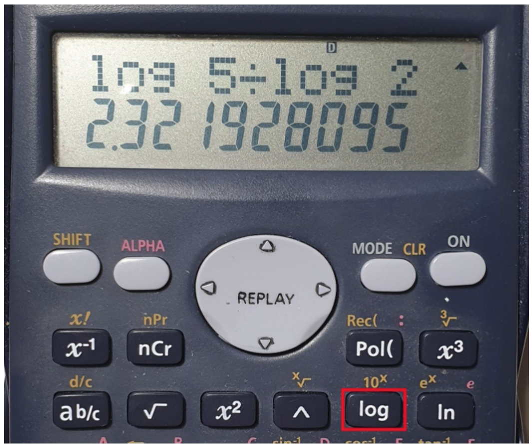
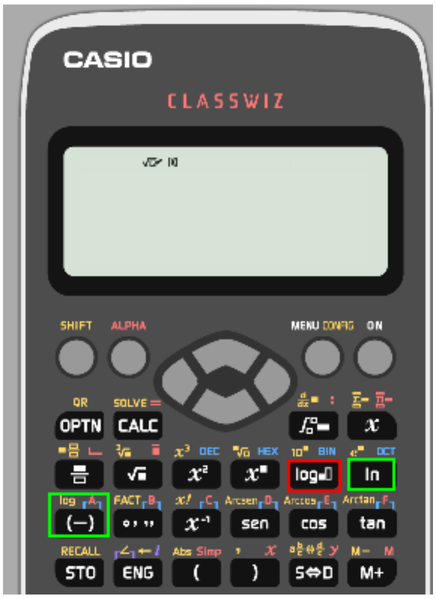


Imagen de elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

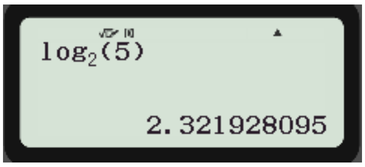
$\log _{2}5=\dfrac{\log _{10}5}{\log _{10}2}$ ≈ 2.3219...

Typesetting math: 55%



Elaboración propia. *Logaritmos 1* (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Elaboración propia. *Logaritmos* (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)



Elaboración propia. *Logaritmos* (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

En calculadoras más recientes se ha incorporado también la función logarítmica de cualquier base, como puede verse en la imagen de la izquierda con un recuadro en rojo, mientras que en verde verás los botones tradicionales, con la salvedad de que para el logaritmo decimal (log) hay que pulsar previamente la tecla shift porque esté en amarillo.

Al pulsar la tecla de logaritmo de cualquier base nos permite poner en la calculadora tanto el valor de la base, como del argumento del logaritmo, como puede verse en las dos capturas inferiores, en el ejemplo se puede calcular directamente el $\log_{2}(5)$

6. Función logaritmo

La función logaritmo

La función logaritmo es de la forma $f(x)=\log_a(x)$, con "a" un número real positivo.

Por ejemplo, $f(x) = \log_2(x)$ se denomina función logaritmo en base 2 de "x".

En la imagen de abajo se muestra su gráfica obtenida a partir de la tabla de valores que aparece al lado.

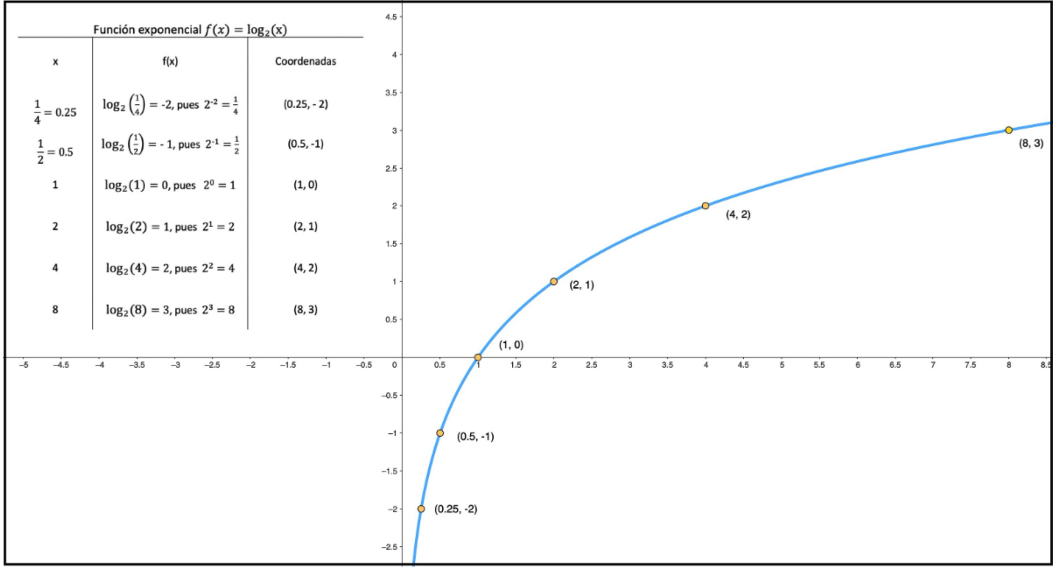


Imagen de elaboración propia. (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Sus propiedades son:

Dominio o campo de existencia: la función sólo está definida para valores de x > 0.

Recorrido: la función puede tomar cualquier valor real, es decir, toda la recta real (- ∞, ∞).

Asíntota: la función presenta una asíntota vertical en el eje OY, es decir, en la recta de ecuación x = 0.

7. Practica lo aprendido

En esta actividad tendrás que aplicar la definición de logaritmo, sus propiedades y usar la calculadora.

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_funciones3-JS-LOMCE/q10_resueltos_3c.htm

8. Caso práctico

Cuando se produce un terremoto se libera una gran cantidad de energía debida a la deformación de los materiales que conforman el terreno. Parte de la energía se irradia en forma de onda sísmica, cuya magnitud superficial se mide a través de una escala conocida como **Escala sismológica de Richter**.

La relación entre la magnitud de un terremoto M en la escala Richter y la energía liberada E (en *ergios*) viene dada por la expresión:

log E = 11.8 +1.5 · M (log indica logaritmo decimal).

Imagen de César Muñoz en Wikimedia.org <https://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page> . *Terremoto de Portoviejo.* <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TERREMOTO_PORTOVIEJO_(26450016241).jpg> (CC BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Teniendo en cuenta la expresión anterior, puedes plantearte las siguientes cuestiones:

Cuestión 1.

¿Qué energía se libera en un terremoto de magnitud 5.5 en la escala Richter?

Aplicando la definición de logaritmo en la expresión dada, obtienes que $E=10^{11.8+1.5\cdot M}$, con lo cual tenemos la variable E (energía) despejada.

Ahora tan solo debes sustituir M por 5.5.

Por consiguiente, el resultado es $E=10^{11,8+1.5\cdot 5,5}=10^{20,05}=1,12\cdot 10^{20}$ ergios.

Cuestión 2.

Si mides la fuerza de un terremoto a partir de la energía liberada, ¿cuántas veces es más fuerte un terremoto de magnitud 7.5 que otro de 5.5?

Sea $E_{5,5}=10^{11,8+1.5\cdot 5,5}$ la energía liberada para M=5.5

Nombrando $E_{7,5}$ a la energía liberada para M=7.5, obtienes que $E_{7,5}=10^{11,8+1.5\cdot 7,5}=10^{11,8+1.5\cdot (5,5+2)}=10^{11,8+1.5\cdot 5,5+3}=10^{11,8+1.5\cdot 5,5}\cdot 10^{3}=E_{5,5}\cdot 10^{3}=E_{5,5}\cdot 1000$.

Luego un terremoto de grado 7.5 es 1000 veces más fuerte que uno de grado 5.5.

Observa que un aumento de una unidad en M da lugar a un terremoto 32 veces más fuerte aproximadamente, pues la energía liberada se multiplica por $10^{1,5}=31,62$.

Cuestión 3.

Si trasladas la energía liberada por la bomba atómica lanzada sobre Hiroshima en 1945 que fue de $8.9 * 10^{20}$ ergios, a la liberada por un terremoto, ¿qué magnitud le correspondería en la escala Richter?

Para resolver esta cuestión, es preferible utilizar la expresión original log E = 11.8 +1.5 · M (log indica logaritmo decimal).

Haciendo $E = 8.9 \cdot 10^{20}$, solo debes despejar el valor de M.

Es decir, $\log (8.9 \cdot 10^{20}) = 11.8 + 1.5 \cdot M \Rightarrow 20.948 = 11.8 + 1.5 \cdot M \Rightarrow 1.5 \cdot M = 20.948 - 11.8 \Rightarrow M=\dfrac{9.149}{1.5}=6.099$

Redondeando a las décimas, tienes que la energía liberada equivaldría a un terremoto de magnitud 6.1 en la escala de Richter.

9. Ejercicios de autoevaluación

1. ¿Cuál es el valor de $\log _{2}64$?

- 7
- 6

Incorrecto

Opción correcta

1. **Incorrecto**
2. **Opción correcta**

2. ¿Cuál es el valor de \log \left(\dfrac{1}{10000}\right)?

- -4
- 4

Opción correcta

Incorrecto

Solución

1. **Opción correcta**
2. **Incorrecto**

3. ¿Cuál es el valor de \log _{2}7?

- 2.9104...
- 2.807....

Incorrecto

Opción correcta

Solución

1. **Incorrecto**
2. **Opción correcta**

4. ¿Cuál es el valor de E en esta expresión \log E=0.5\cdot 7?

- 275854.735....
- 3162.27....

Incorrecto

Correcto. Aplicando la definición de logaritmo obtenemos E = $10^{0.5*7} = 10^{3.5} \approx 3162.27...$

Solución

1. **Incorrecto**
2. **Opción correcta**

Typesetting math: 55%

10. Terremotos en Andalucía

Como sabes, los terremotos son movimientos bruscos y violentos de la corteza terrestre causados por la actividad tectónica de placas que dan lugar a la liberación de energía acumulada en la corteza o en el manto superior de la Tierra. Estos movimientos generan vibraciones que se propagan en forma de ondas sísmicas a través del suelo y pueden causar daños significativos a estructuras y seres humanos.

En Andalucía son debidos al choque entre la placa tectónica africana y la ibérica.

En promedio, se registran varios miles de pequeños terremotos en Andalucía cada año. Sin embargo, la mayoría de estos terremotos son de baja magnitud y pasan desapercibidos para la población.

El Instituto Andaluz de Geofísica y Prevención de Desastres Sísmicos (IAG) es un centro de investigación de la Universidad de Granada dedicado a sismología.

En su web de Red sísmica de Andalucía puedes consultar los terremotos registrados en los últimos 7 días, 15 días o un mes, así como la ubicación y magnitud de los mismos.

1. ¿Cuántos terremotos se registran de media en un día?
2. ¿Cuál es el promedio de magnitud de los mismos?

http://wpd.ugr.es/~iag/mapa/mapa1mes.php

11. Importante

Logaritmo

El logaritmo en base a de N es igual a x, si al calcular a elevado a x obtenemos N, es decir, $\log_{a}N=x \Leftrightarrow a^{x}=N$.

7. Resumen

Los números naturales

El conjunto numérico más simple es el de los números Naturales, $N=\{1,2,3,4,\ldots\}$

Los números enteros

El conjunto de los números Enteros, $Z=\{\ldots\ldots,-4,-3,-2,-1,0, 1, 2, 3, 4,\ldots\}$, incluye a los naturales con signo positivo y con signo negativo.

Los números racionales

Se representa por Q y está formado por todos los cocientes o fracciones de dos números enteros $Q=\{a/b, \text{ tal que } a,b\in Z, b\neq 0\}$

Los números irracionales

Son aquellos que no son racionales, es decir, que no se pueden expresar en forma de fracción. Se caracterizan porque su expresión decimal tiene infinitas cifras y no presenta periodo.

Los números reales

Este conjunto está formado por los números racionales junto con los números irracionales. Es decir, si nombramos con la letra I a los números irracionales, tenemos que $R=Q\cup I$

Fracción de un número

Se multiplica la fracción por dicho número: a/b de N = $\frac{a}{b} \cdot N=\frac{a\cdot N}{b}$

Aproximación de un número

Consiste en cambiarlo por otro próximo a él pero con menos cifras decimales. Existen dos formas de aproximar un número:

- Por truncamiento.
- Por redondeo.

El error absoluto

Es la diferencia, en valor absoluto, entre el valor real y el valor aproximado.

El error relativo

Es igual al error absoluto dividido entre el valor real.

Intervalo

Es un subconjunto formado por los números reales que se encuentran comprendidos entre dos valores a y b, llamados extremos del intervalo.

Radicación

La raíz enésima de un número a es b, si y solo si $b^n = a$. Es decir, $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n = a$.

Logaritmo

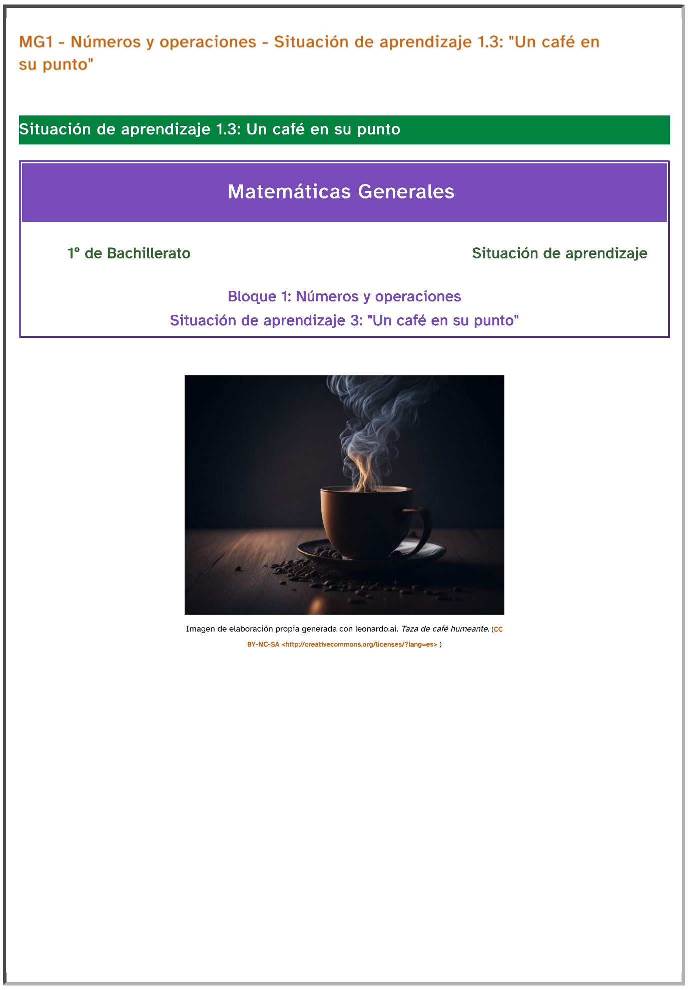
El logaritmo en base a de N es igual a x, si al calcular a elevado a x obtenemos N, es decir, $\log _{a}N=x \Leftrightarrow a^{x}=N$.

Notación científica

Un número expresado en notación científica es de la forma $m \cdot 10^n$ donde n es un número entero y m un número decimal cuya parte entera tiene una sola cifra distinta de 0.

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible del tema.


MG1 - Números y operaciones - Situación de aprendizaje 1.3: "Un café en su punto"

Situación de aprendizaje 1.3: Un café en su punto

Matemáticas Generales

1º de Bachillerato

Situación de aprendizaje

Bloque 1: Números y operaciones

Situación de aprendizaje 3: "Un café en su punto"

Imagen de elaboración propia generada con leonardo.ai. *Taza de café humeante.* (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Material de elaboración propia. *Imprimible de la situación de aprendizaje 1.3* (CC BY-NC-SA <http://creativecommons.org/licenses/?lang=es>)

Créditos

Detalle y autoría

Título	Situación de aprendizaje 1.3: "Un café en su punto"
Enseñanza y nivel	1º Bachillerato
Descripción	REA de la asignatura de Matemáticas Generales para 1º de BACHILLERATO
Persona elaboradora de contenido	F. Damián Aranda Ballesteros, Antonio Ruiz Murcia
Persona coordinadora de la materia	Antonio Ruiz Murcia
Persona editora de contenido	Antonio Luis Luque Ruiz
Persona coordinadora del ciclo	Ernesto J. Abad Fernández
Organización	Dirección General de Ordenación, Inclusión, Participación y Evaluación Educativa. Consejería de Desarrollo Educativo y Formación Profesional. Junta de Andalucía.
Licencia	Licencia Creative Commons Reconocimiento No comercial Compartir igual 4.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Este contenido fue creado con eXeLearning <http://exelearning.net/> , el editor libre y de fuente abierta diseñado para crear recursos educativos.

Historial de versiones

Elaborado por:	Servicio de Educación Permanente. Dirección General de Ordenación, Inclusión, Participación y Evaluación Educativa. Consejería de Desarrollo Educativo y Formación Profesional. Junta de Andalucía.			
Versión:	01	**Fecha de publicación:**	Septiembre 2023	Primera versión

Archivo fuente para editar este REA

- Este REA se ha publicado bajo Licencia Creative Commons Reconocimiento No comercial Compartir igual 4.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>
- Esto significa que es posible usarlo, descargarlo, redistribuirlo y modificarlo para adaptarlo a otras necesidades.
- Para usar/redistribuir/modificar este REA:
  1. Descarga el archivo fuente en el siguiente apartado. Con esto tienes el recurso original en formato editable.
  2. Modifícalo usando eXeLearning <http://exelearning.net/> .

3. Si aun no lo tienes, descarga e instala el estilo EducaAnd <https://exelearning.net/category/descargas/descargar-plantillas/page/2/> .

4. Si lo modificas, has de reconocer la autoría y publicarlo con la misma licencia (CC BY-SA-NC).

Puedes usar esta cita para referenciarlo:

Descargar el fichero .elp

Typesetting math: 55%

Aviso legal

https://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space

Typesetting math: 55%