

Imagen de [FreeCat](#) bajo licencia Creative Commons

¿Qué tal el primer tema del curso? ¿Bien? Esperamos que así haya sido. Como has visto, las matrices sirven para ordenar información y hacerla más cómoda y manejable. Pues bien, este tema lo vamos a dedicar en exclusiva a ellas, y vas a ver además cómo se pueden aplicar cuando el número de datos que tenemos que manejar es demasiado grande.

1. Cada ventana es un mundo y cada casa, más



Antes que nada, vamos a recordar qué es una matriz, pues aunque ya lo hemos visto en el primer tema, no está de más volverlo a recordar para que nos quede bien clara la idea.

Como dijimos en el tema anterior, una matriz es un conjunto de **números reales** ordenados en **filas** y en **columnas**. Cada número o elemento de ese conjunto queda referenciado por la posición que ocupa, escribiéndose con subíndices el número de fila y de columna que ocupa.

Si en la imagen quisiéramos llamar la atención sobre el balcón que tiene la toalla rosa, diríamos por ejemplo, que está en la segunda planta y en el segundo balcón de la derecha, ¿verdad? Pues con las matrices ocurre lo mismo, cada elemento es como si fuera un balcón de ese edificio y para llamarlo, se hace indicando la fila que ocupa y la columna, empezando la numeración de arriba abajo en las filas y de izquierda a derecha en las columnas:



Imagen de TwOse bajo licencia Creative Comm

| | | | | |
|--------|----|----|---|-----|
| Fila 1 | 2 | 0 | 1 | -10 |
| Fila 2 | -6 | 1 | 0 | 7 |
| Fila 3 | 4 | -1 | 1 | -3 |

| | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Columna 1 | Columna 2 | Columna 3 | Columna 4 |
| 2 | 0 | 1 | -10 |
| -6 | 1 | 0 | 7 |
| 4 | -1 | 1 | -3 |

Así por ejemplo, el elemento a_{21} es -6, pues es el valor del número que está en la fila 2 - columna 1, o el elemento a_{31} es 4.

Está claro, ¿no?

Ejercicio resuelto



Imagen de papersome bajo licencia Creative Commons.

Ya en el tema anterior vimos como la información recogida en tablas se podía expresar mediante matrices. Vamos a ver que la información verbal también se puede adecuar a una matriz. ¿Recuerdas a nuestros amigos de TRANS VELOX? Pues, durante la primera quincena del mes, han seguido el número de portes que han hecho en una de las rutas y lo han clasificado en cuatro grupos, según el peso de los artículos transportados.

En la primera semana, transportaron 20 sobres o documentos, 48 paquetes de menos de 2 kg, 25 de entre 2 y 5 kg y 31 paquetes de más de 5 kilos. En la segunda semana los portes han sido 14 sobres, 50 paquetes de menos de 1 kg, 20 portes de entre 2 y 5 kg y 38 paquetes de más de 5 kg.

¿Podemos expresar esto como una matriz?

La respuesta parece evidente. Claro que podemos. Por ejemplo, en las filas podemos disponer la información de cada semana y en columnas la de los tipos de paquetes. Así, la matriz que recoge la información de los portes de TRANS-VELOX en la primera quincena es:

$$\begin{bmatrix} 20 & 48 & 25 & 31 \\ 14 & 50 & 20 & 38 \end{bmatrix}$$

Importante

Una medida importante que hace referencia a matrices es la que se llama **dimensión** de la matriz.

La dimensión de una matriz indica el tamaño de la misma, es decir, el número de filas y columnas, y se expresa como **m x n**, siendo m el número de filas y n el de columnas.

En general, si la matriz es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

la dimensión es $m \times n$.

Por ejemplo, en esta matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

la dimensión es 3×4 .

Reflexiona

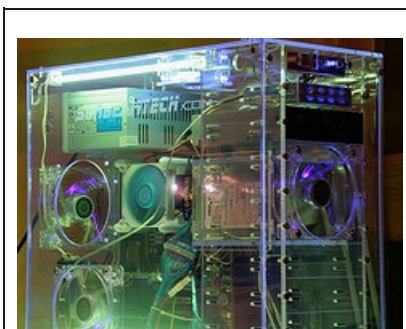


Imagen de [Sielarts informàtica](#) bajo licencia Creative Commons.

Antes de seguir, vamos a practicar un poco con lo que llevamos hasta ahora. Fíjate en la siguiente situación:

La empresa Infomax, monta ordenadores de mesa y portátiles. Para cada clase de ordenador la empresa dispone de tres tipos según la calidad y cantidad de sus componentes: alta media y baja.

En el mes de julio, montaron en ordenadores de mesa 20 de calidad alta, 40 de media y 40 de baja, mientras que en portátiles, montaron 32 de calidad alta, 28 de calidad media y 43 de calidad baja.

Por otro lado, en cada ordenador de mesa, se necesitan 4 horas de trabajo en el montaje y 6 en la instalación del *software* necesario, mientras portátiles, son necesarias 7 y 8 horas respectivamente. Pues bien, has de averiguar las matrices A y B que determinan el número de ordenadores según el tipo y la calidad y el número de horas de montaje e instalación con el tipo de ordenador respectivamente. Además, indica la dimensión de ambas matrices.

En la primera matriz, si indicamos en filas el tipo y en columnas la calidad tendríamos la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 40 \\ 32 & 28 & 43 \end{bmatrix} \text{ y la dimensión sería } 2 \times 3.$$

En la segunda, colocando en filas el tipo de ordenador y en columnas la clase de trabajo, tendríamos la matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ y la dimensión sería } 2 \times 2.$$

No, no vamos a hablar de la Liga de fútbol ni del Mundial del verano.

Las matrices también se clasifican, pero no por importancia o porque una sea mejor que otra, sino atendiendo a la forma que tienen (dimensión) o a los elementos que la forman.

Los principales tipos de matrices te los mostramos en la siguiente presentación. En cada diapositiva se muestra un tipo de matriz, y para cada tipo, verás que aparece la definición y un ejemplo concreto de ese tipo de matriz. Así que, debes ir viendo los distintos tipos y comprenderlos con los ejemplos que aparecen.



Matriz fila:

Es una matriz de dimensión **1 x n**, es decir, la que tiene **una fila y n columnas**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

En la siguiente escena tienes dos actividades para hacer con matrices. En la primera debes asociar cada matriz con su dimensión y en la segunda debes unir cada matriz con uno de los tipos que te proponemos.

Please [install Java 1.4](#) (or later) to use this page.

Comprueba lo aprendido

En esta actividad te mostramos ahora varias cuestiones sobre matrices. Contesta verdadero o falso o cada cuestión.

1) La matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es triangular inferior.

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Por encima de la diagonal todo es 0.

2) La matriz identidad de orden 3 es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

El elemento a_{31} es 1, por tanto, no es diagonal.

3) La matriz $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es triangular inferior.

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

Ni siquiera es una matriz cuadrada.

4) La matriz traspuesta de $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Cambia las filas por columnas y observa lo que ocurre.

5) La matriz $\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ es simétrica.

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Si se cambian filas por columnas, la matriz no cambia.

2. Y empezamos a hacer cálculos



Imagen de [Dicemanic](#) bajo licencia Creative Commons.

Esto de las matrices, como comprenderás, no sólo sirve para agrupar datos, sino que de forma cómoda nos permite hacer también muchas operaciones con esos datos. Sumar dos números no tiene ninguna complicación, sumar diez tampoco tiene mucha, pero sumar cien o quinientos o miles, ya hace que la cosa cambie.

Las matrices puesto que supone un ahorro en la ordenación de datos, nos van a servir también para que las operaciones que tengamos que hacer con ellos, las hagamos de una manera más cómoda y por tanto más rápida.

En este apartado vamos a comenzar a sumar y restar matrices y vas a ver que es lo más fácil del mundo.

Ejercicio resuelto

¿Recuerdas el ejemplo del primer apartado del tema?

Teníamos un cuadrante con los repartos que había hecho nuestra empresa de mensajería en la primera quincena de un mes en una de sus rutas de reparto. Esta tabla resume la información que teníamos:

| Ruta I | Sobres | < 2 kg | Entre 2 y 5 kg | > 5 kg |
|-----------|--------|--------|----------------|--------|
| 1ª semana | 20 | 48 | 25 | 31 |
| 2ª semana | 14 | 50 | 20 | 38 |

y como matriz lo habíamos puesto así: $\begin{bmatrix} 20 & 48 & 25 & 31 \\ 14 & 50 & 20 & 38 \end{bmatrix}$

Pero, ¿y si tuviéramos la información de otra ruta? ¿Cómo la juntaríamos?



Imagen de [Daquella manera](#), bajo licencia Creative Commons

La información de la Ruta I, corresponde con los repartos que la oficina de Morón de TRANS VELOX ha tramitado en la ruta sur, pero en la ruta norte, los repartos que se hicieron son los que aparecen en esta tabla:

| Ruta II | Sobres | < 2 kg | Entre 2 y 5 Kg | > 5 kg |
|-----------|--------|--------|----------------|--------|
| 1ª semana | 70 | 53 | 38 | 41 |
| 2ª semana | 22 | 48 | 40 | 30 |

Parece evidente que si quisiéramos juntar las dos informaciones, sumaríamos la información de las primeras semanas de ambas rutas entre ellas y las de la segunda con las de la segunda. Y por otro lado juntaríamos sobres con sobres, paquete de más de 5 kilos con paquetes de más de 5 kilos. O sea, lo lógico sería sumar los sobres repartidos en la primera semana de la ruta norte con los sobres de la primera semana de la sur, los paquetes de menos de 5 kg de la primera semana en la ruta norte con los respectivos de la ruta sur, y así sucesivamente. No tendría sentido ninguno, sumar los sobres entregados en la ruta norte en la segunda semana con los paquetes de entre 2 y 5 kg de la primera semana en la ruta sur, ¿verdad?, si al menos queremos mantener la información clasificada en estos tipos.

Pues bien, esto escrito con matrices sería así:

$$\begin{bmatrix} 20 & 48 & 25 & 31 \\ 14 & 50 & 20 & 38 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 70 & 53 & 38 & 41 \\ 22 & 48 & 40 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 101 & 63 & 72 \\ 36 & 98 & 60 & 68 \end{bmatrix}$$

Como puedes ver, sumar dos matrices es fácil, sólo hay que sumar los elementos que están en la misma posición. Además, la matriz que se obtiene tiene el mismo significado que la anterior, por ejemplo, el que a_{22} sea 98 indica que entre las dos rutas, en la segunda semana se han repartido 98 paquetes de un peso inferior a dos kilogramos.

Importante

La suma o resta de matrices se hace sumando o restando los elementos que están en las mismas posiciones, pero ojo, las dos matrices tienen que tener la misma dimensión. Además, la matriz solución sale también de la misma dimensión.

$$A_{p \times q} + B_{p \times q} = C_{p \times q} \text{ y cada elemento, } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Imagino que te ha quedado claro, pero si no es así, observa este vídeo donde se explica paso a paso cómo hacer la suma de matrices:

Comprueba lo aprendido

1) Si tenemos dos matrices cuadradas de orden 2, el resultado de restarlas es:

- ☐ 0
- ☐ Una matriz nula (todo 0) cuadrada de orden 2.
- ☐ Una matriz cuadrada de orden 4
- ☐ Una matriz cuadrada de orden 2

No tiene sentido que la diferencia de dos matrices sea un número.

No tiene porqué. Sería así sólo si las dos matrices son iguales.

Repasa lo de la dimensión de la suma.

Correcto

Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)
3. Incorrecto (Retroalimentación)
4. Opción correcta (Retroalimentación)

2) La suma de las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ es:

- ☐ $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
☐ $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$
☐ No se puede hacer esa suma.

No es correcto

No es correcto

Correcto

Solución

1. Incorrecto (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)
3. Opción correcta (Retroalimentación)

3) Una matriz cuadrada se puede sumar con su traspuesta

- ☐ Sí
☐ No

Claro, si la matriz es cuadrada, al hacer la traspuesta sigue siendo cuadrada y por tanto las dimensiones de las dos matrices son iguales.

Claro que se puede, si la matriz es cuadrada, al hacer la traspuesta sigue siendo cuadrada y por tanto las dimensiones de las dos matrices son iguales.

Solución

1. Opción correcta (Retroalimentación)
2. Incorrecto (Retroalimentación)



Siguiendo el [enlace](#) puedes hacer ejercicios con sumas o restas de matrices. Haz al menos diez y asegúrate que te salen bien.

Para saber más

El elemento neutro de esta operación es la matriz nula (todos los elementos son ceros) de la misma dimensión que nuestra matriz A:

$$A + O = A$$

Si quieres ver las otras propiedades que tiene la suma de matrices, sigue el [enlace](#).

3. Ahora, multiplicar



Imagen de [Robbert van der Steeg](#) bajo licencia Creative Commons.

Imagino que te ha resultado fácil lo de sumar y restar matrices y que los ejercicios que te propusimos te han salido a la perfección. Bueno, pues vamos a dar otro pasito, vamos a empezar a multiplicar matrices. Lo que ocurre, es que con las matrices eso del producto ya no es tan evidente y ni tan siquiera es necesario que las dos matrices sean de la misma dimensión, es más, ¡a veces dos matrices de la misma dimensión no se pueden calcular! Y es que, en el producto, ya no va a ser eso de multiplicar los elementos que están en la misma posición, sino que habrá que seguir otro procedimiento.

No te preocupes que con los ejemplos que te vamos a poner lo vas a entender y sobre todo vas a entender el porqué de ese procedimiento. Y sobre todo, te aseguro que no te hará falta la capacidad de este hombre para hacer esos cálculos.

Para empezar, tenemos que tener en cuenta el tipo de multiplicación que vamos a hacer, si vamos a multiplicar por un número, un vector (matriz columna), o una matriz por una matriz.

Venga, pues vamos a comenzar, y vamos a hacerlo con el caso más simple, el de multiplicar una matriz por un [número real](#). Te aseguro

Ejercicio resuelto

¿Qué te parecería si te dijera que tu empresa va a duplicar la producción? Genial, ¿no? Doble de trabajo, doble de ventas, doble de ganancias,...

Pues nuestra empresa de transportes también ha conseguido doblar su facturación. Si recuerdas el ejemplo con el que empezamos el tema, estábamos analizando los repartos que había realizado TRANS VELOX durante la primera quincena de un mes en una de sus rutas. Teníamos que en la primera semana, transportaron 20 sobres o documentos, 48 paquetes de menos de 2 kg, 25 de entre 2 y 5 kg y 31 paquetes de más de 5 kilos. Y en la segunda semana los portes fueron 14 sobres, 50 paquetes de menos de 1 kg, 20 portes de entre 2 y 5 kg y 38 paquetes de más de 5 kg.

Matricialmente, habíamos escrito esos datos así:

$$\begin{bmatrix} 20 & 48 & 25 & 31 \\ 14 & 50 & 20 & 38 \end{bmatrix}$$

Si decimos que en esa primera quincena del mes siguiente hemos doblado la facturación, esto querrá decir que de cada tipo de producto hemos facturado el doble, es decir, en la primera semana, en lugar de 20 sobres o documentos, habremos transportado 40, de paquetes de menos de 2 kg, en lugar de 48, llevaremos 96, de paquetes de entre 2 y 5 kilogramos, en lugar de 25, ahora serán 50, y así con todos. O sea, cada valor se multiplica por 2.

Está entendida la idea, ¿no? Bueno pues vamos a darle sentido a esto usando las matrices.

Como ya sabes, duplicar es multiplicar por dos, así que, si duplicamos toda la producción, habrá que multiplicar por dos la matriz, y según hemos visto arriba, lo que en realidad hemos de hacer es multiplicar por dos cada uno de los elementos de la matriz. Por tanto, la operación quedaría así:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 48 & 25 & 31 \\ 14 & 50 & 20 & 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 96 & 50 & 62 \\ 28 & 100 & 40 & 76 \end{bmatrix}$$



Imagen de [zatumo](#) bajo licencia Creative Commons.

Importante

El **producto** de una **matriz A** por un **número real k** es otra matriz de la misma dimensión que A, cuyos elementos se obtienen multiplicando cada elemento de A por k.

$$A=(a_{ij}) \rightarrow k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$$

En este vídeo te combinamos ya las dos operaciones que llevamos, esto es, sumar o restar y multiplicar por un número. Recuerda que una multiplicación siempre se hace antes que una suma o una resta.

Para saber más

El elemento neutro de esta operación es el 1, pues si multiplicamos nuestra matriz A por 1, nos quedamos igual, con la matriz A.

$$1 \cdot A = A$$

Las otras propiedades que cumple son la distributiva respecto de la suma de matrices, distributiva respecto de la suma de escalares y asociativa mixta. Si quieres verlo con más detalle, sigue este [enlace](#).

Reflexiona



Imagen de [El Matenavegante](#) bajo licencia Creative Commons

Vamos a practicar un poco antes de seguir. Haz los siguientes cálculos con matrices:

a) $-3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Los resultados deben haberte salido:

a) $\begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 2 \\ 3 & 17 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -12 \\ 2 & 6 & 1 \\ -2 & -6 & 17 \end{bmatrix}$

Ejercicio resuelto

Pues sí, está muy bien todo esto de la producción pero será cuestión de ir viendo cuánto vamos a ganar, porque nuestros amigos de TRANS VELOX es lo que tienen, que les gusta comer de vez en cuando, y para eso, tendrán que ganar dinero.

Pues volvemos a nuestra facturación de la primera quincena en la ruta sur de la oficina de Morón. Los datos te los sabrás ya de memoria, pero aún así te lo volvemos a poner:

| Ruta I | Sobres | < 2 kg | Entre 2 y 5 kg | > 5 kg |
|-----------|--------|--------|----------------|--------|
| 1ª Semana | 20 | 48 | 25 | 31 |
| 2ª Semana | 14 | 50 | 50 | 38 |



Imagen de [TheGirlsNY](#) bajo licencia Creative Commons.

Ahora además disponemos del precio que la empresa cobra por cada uno de los conceptos. La tarifa de precios es:

| | |
|-------------------------------------|--------|
| Sobres y documentos | 5,50 € |
| Paquetes de menos de 2 kg | 7,14 € |
| Paquetes de entre dos y cinco kilos | 9,04 € |
| Paquetes de más de 5 kg | 12 € |

Es evidente que si queremos saber cuál es la ganancia obtenida, habrá que multiplicar el número de productos de cada tipo que ha transportado por su precio y sumarlo todo, pero, ¿podremos expresar esto con matrices?

Y la respuesta es evidentemente que sí, sino para qué lo íbamos a poner, ¿verdad? Bueno, pues vamos a ver cómo hacerlo.

Está claro que la operación que tenemos que hacer es multiplicar el número de productos enviados por los precios de cada uno, o sea, vamos a multiplicar la matriz de productos por la matriz de precios. Lo escribimos así:

$$\begin{bmatrix} 20 & 48 & 25 & 31 \\ 14 & 50 & 20 & 38 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5,50 \\ 7,14 \\ 9,04 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Si queremos saber la ganancia de la primera semana, multiplicaríamos el número de sobre por su precio ($20 \cdot 5,50$); el número de paquetes de peso inferior a dos kilos por su precio ($48 \cdot 7,14$); el número de paquetes de entre dos y cinco kilos por su precio ($25 \cdot 9,04$) y el número de paquetes de más de 5 kilos por el precio de cada uno ($31 \cdot 12$) y sumáramos todas las cantidades, es decir, haríamos:

$$20 \cdot 5,50 + 48 \cdot 7,14 + 25 \cdot 9,04 + 31 \cdot 12$$

El resultado de esta operación es: 1050,72 €

Para el beneficio de la segunda semana haríamos lo mismo: $14 \cdot 5,50 + 50 \cdot 7,14 + 20 \cdot 9,04 + 38 \cdot 12 = 1070,80$ €

Y puesto que la información la teníamos separada en semanas, también podemos dar el beneficio en semanas y quedaría así:

$$\begin{bmatrix} 1050,72 \\ 1070,80 \end{bmatrix}$$

Resumiendo toda la operación producto quedaría así:

$$\begin{bmatrix} 20 & 48 & 25 & 31 \\ 14 & 50 & 20 & 38 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5,50 \\ 7,14 \\ 9,04 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \cdot 5,50 + 48 \cdot 7,14 + 25 \cdot 9,04 + 31 \cdot 12 \\ 14 \cdot 5,50 + 50 \cdot 7,14 + 20 \cdot 9,04 + 38 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1050,72 \\ 1070,80 \end{bmatrix}$$

Importante

Para multiplicar una matriz A por una matriz columna, es necesario que la matriz A tenga tantas columnas como filas tenga la matriz B. Para hacer el producto, cogemos cada fila de la matriz A y multiplicamos el primer elemento de la fila con el primero de la matriz columna, el segundo de la fila con el segundo de la matriz columna y así sucesivamente con todos y sumamos todos esos productos.

El resultado será una matriz columna con tantas filas como filas tenga la matriz A.

$$A_{p \times q} \cdot B_{q \times 1} = C_{p \times 1}$$

Comprueba lo aprendido

Vamos a comprobar que los has entendido:

1) Calcula el beneficio obtenido en la ruta norte del ejemplo del apartado 2:

$$\begin{pmatrix} 70 & 53 & 38 & 41 \\ 22 & 48 & 40 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5,50 \\ 7,14 \\ 9,04 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2) Realiza el producto:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enviar

3.3. Matriz x Matriz

¿Y adivinas lo que viene ahora, no? claro, multiplicar una matriz por otra. Y es que la gran ventaja que nos aporta el uso de matrices es que podemos manejar simultáneamente un número elevado de datos.

En el ejemplo del apartado anterior hemos multiplicado un determinado número de productos por sus precios para determinar la ganancia, pero imagínate que estamos en una línea de montaje donde hay varios centros de producción y estos a su vez reciben materiales de diversos proveedores, y hay que tener en cuenta las horas de trabajo que tiene un producto en cada apartado de la línea de montaje, y después para deducir el beneficio, hay que ver los puntos en los que se venden los productos, y... y así todo lo que lo queramos enrevesar.

Todos estos pasos serían en la realidad multiplicaciones, y usando las matrices, éstas se pueden hacer de forma más rápida y sobre todo más ordenada. En el siguiente ejemplo te vamos a enseñar cómo se hace el producto de matrices (aunque en realidad ya casi sabes), y sobre todo, queremos que entiendas el porqué de hacer ese producto.



Imagen de DieselDemon bajo licencia Creative Commons.

Ejercicio resuelto



Imagen de bpende bajo licencia Creative Commons.

A Reme, una de las administrativas que trabaja en la oficina de TRANS VELOX de Morón y encargada de la compra del material de oficina, le han llegado tres catálogos de tiendas de material de oficina y decidida a ahorrar al máximo, decide hacer un estudio de precios concienzudo. Claro, como es normal, unas cosas están más baratas en una y otras cosas en otra, pero Reme quiere decidirse por un proveedor, así que como muestra, va a tomar los precios de cinco artículos en los tres proveedores y va a estimar el gasto que tendría siguiendo los pedidos del año pasado en el mismo mes.

Para el estudio, Reme ha observado el precio de las libretas, de las cajas de bolígrafos, de los recambios de los cartuchos de tinta, de las cajas de grapas y de los paquetes de folios.

En el primer proveedor, los precios son 0,85 € las libretas, 6,50 la caja de bolígrafos, 6,95 los cartuchos de tinta, 0,42 la caja de grapas y 3,10 el paquete de folio.

El segundo proveedor tiene los siguientes precios: 0,74 € las libretas, 7,20 los bolígrafos, 7,15 los cartuchos de tinta, 0,62 las grapas y 2,60 € el paquete de folios.

Por último, los precios que muestra el catálogo del tercer proveedor son: 1,05 € libretas, 6,85 bolígrafos, 6,75 € el cartucho de tinta, 0,55 la caja de grapas y 2,95 € el paquete de folios.

En cuanto a los pedidos, los realizados el año anterior en los meses de septiembre, octubre y noviembre fueron los que se reflejan en la tabla:

| | Libretas | Cajas de bolígrafos | Cartuchos | Cajas de grapas | Paquetes de folios |
|------------|----------|---------------------|-----------|-----------------|--------------------|
| Septiembre | 21 | 8 | 5 | 4 | 14 |
| Octubre | 16 | 0 | 8 | 9 | 17 |
| Noviembre | 31 | 11 | 10 | 11 | 18 |

¿Qué decisión tomará Reme?

Vamos a comenzar poniendo los datos en forma de matriz. La primera será la matriz de precios, donde en filas ponemos los datos de los proveedores y en columnas los de los tipos de artículos:

$$\begin{bmatrix} 0,85 & 6,50 & 6,95 & 0,42 & 3,10 \\ 0,74 & 7,20 & 7,15 & 0,62 & 2,60 \\ 1,05 & 6,85 & 6,75 & 0,55 & 2,95 \end{bmatrix}$$

La segunda matriz es la de los pedidos en los distintos meses. Colocamos en filas los datos por meses y en columnas el número de artículos de cada tipo:

$$\begin{bmatrix} 21 & 8 & 5 & 4 & 14 \\ 16 & 0 & 8 & 9 & 17 \\ 31 & 11 & 10 & 11 & 18 \end{bmatrix}$$

Está claro que lo que tenemos que calcular es lo que nos costaría hacer esos pedidos con cada proveedor y para ello de



Imagen de Klearchos Kapoutsis bajo licencia Creative Commons.

forma similar al cálculo que hacíamos en el apartado anterior habrá que ir multiplicando los precios con el número de productos. Si recuerdas del apartado anterior, tenía que cumplirse que el número de columnas de la primera matriz fuese igual que el número de filas de la segunda, así que, lo primero es colocar las matrices de forma adecuada, ya que estas dos no las tenemos. Habrá que cambiar las filas por columnas en la segunda matriz, es decir, hacerle la traspuesta a la segunda para que así sí, vayan coincidiendo precios y números de artículos. Por tanto, el producto que tenemos que hacer es:

$$\begin{bmatrix} 0,85 & 6,50 & 6,95 & 0,42 & 3,10 \\ 0,74 & 7,20 & 7,15 & 0,62 & 2,60 \\ 1,05 & 6,85 & 6,75 & 0,55 & 2,95 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 & 16 & 31 \\ 8 & 0 & 11 \\ 5 & 8 & 10 \\ 4 & 9 & 11 \\ 14 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

Ahora ya sí que cogiendo filas y columnas, los valores casan unos con otros.

Bueno, pues vamos ya a calcular el producto. Como la primera matriz tiene tres filas y la segunda matriz 3 columnas, el resultado nos va a salir una matriz tres por tres donde cada elemento va a indicar el gasto que tendríamos con el determinado proveedor en el mes indicado.

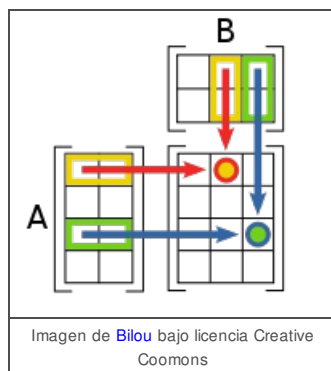
Comenzamos. Si cogemos la primera fila con la primera columna, estaremos calculando el costo de hacer el pedido con el proveedor 1 en el mes de septiembre. El cálculo que haríamos sería:

$$0,85 \cdot 21 + 6,50 \cdot 8 + 6,95 \cdot 5 + 0,42 \cdot 4 + 3,10 \cdot 14 = 149,68. \text{ Ese valor lo pondremos en la casilla } a_{11}$$

Si cogemos primera fila con segunda columna, calcularemos la factura con el primer proveedor en el segundo mes. Ahora el cálculo sería:

$$0,85 \cdot 16 + 6,50 \cdot 0 + 6,95 \cdot 8 + 0,42 \cdot 9 + 3,10 \cdot 17 = 125,68. \text{ Este sería } a_{12}.$$

Cogiendo ahora la primera fila con la tercera columna, obtendríamos el elemento a_{13} que nos indicaría el costo del pedido del mes de noviembre con el primer proveedor. Haciendo el cálculo igual que los dos anteriores, obtenemos como resultado 227,77.



Nos vamos ahora al segundo proveedor. Si multiplicamos la segunda fila con la primera columna, obtendremos el precio que pagaríamos en pedido del primer mes con este proveedor. Parece lógico colocar este dato ya en otra fila, este valor va a ser el elemento a_{21} . El cálculo sería:

$$0,74 \cdot 21 + 7,20 \cdot 8 + 7,15 \cdot 5 + 0,62 \cdot 4 + 2,60 \cdot 14 = 147,77.$$

Factura segundo proveedor segundo mes, a_{22}

$$0,74 \cdot 16 + 7,20 \cdot 0 + 7,15 \cdot 8 + 0,62 \cdot 9 + 2,60 \cdot 17 = 118,82.$$

Factura segundo proveedor tercer mes; a_{23}

$$0,74 \cdot 31 + 7,20 \cdot 11 + 7,15 \cdot 10 + 0,62 \cdot 11 + 2,60 \cdot 18 = 227,26.$$

Por último, repetiríamos los cálculos con el tercer proveedor y colocaríamos los datos en la tercera fila, es decir, los elementos a_{31} , a_{32} y a_{33} . Si hacemos las operaciones los resultados son respectivamente 154,10; 125,90 y 234,55.

En forma matricial todo esto sería así:

$$\begin{pmatrix} 0,85 & 6,50 & 6,95 & 0,42 & 3,10 \\ 0,74 & 7,20 & 7,15 & 0,62 & 2,60 \\ 1,05 & 6,85 & 6,75 & 0,55 & 2,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 16 & 31 \\ 8 & 0 & 11 \\ 5 & 8 & 10 \\ 4 & 9 & 11 \\ 14 & 17 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 149,68 & 125,68 & 227,77 \\ 147,77 & 118,82 & 227,26 \\ 154,1 & 125,9 & 234,55 \end{pmatrix}$$

Ahora sí que se ve bien que en cada mes (columnas) el que ofrece el mejor precio es el segundo proveedor, luego está clara la elección de Reme, a partir de ahora, todo se lo comprará al segundo proveedor.

Importante

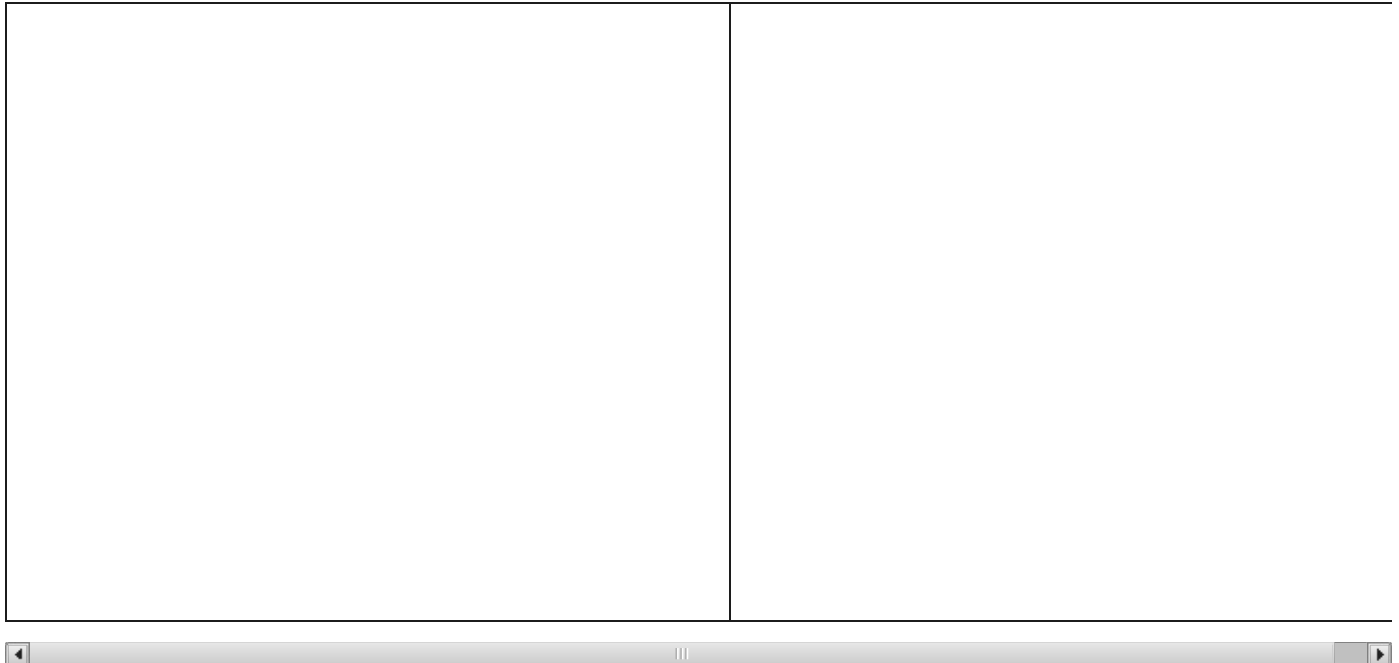
Para multiplicar dos matrices, tiene que cumplirse que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda. Además, la matriz resultado tendrá el número de filas que tenga la primera matriz y el número de columnas de la segunda.

$$A_{n \times p} \cdot B_{p \times q} = C_{n \times q}$$

Una consecuencia de esto es que el producto de matrices no es conmutativo, o sea, que $A \cdot B$ no tiene porqué ser igual que

$B \cdot A$. Es más a lo mejor ni siquiera se puede hacer $B \cdot A$.

Si todavía no te ha quedado muy claro cómo multiplicar dos matrices, en los siguientes vídeos te lo explicamos paso a paso:



Reflexiona

Siguiendo el [enlace](#), puedes hacer ejercicios de producto de matrices, así que ponte a practicar hasta que te salga.

Haz al menos cinco productos y comprueba en la pantalla que son correctos los cálculos.

Para saber más

Ahora en el producto, el elemento neutro es la matriz **identidad** del orden que le corresponde. Puedes comprobar que cualquier matriz por la identidad es ella misma.

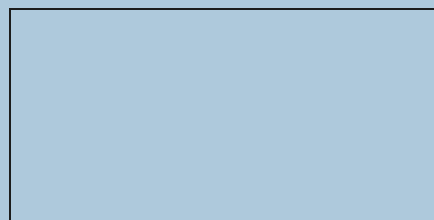
$$A \cdot I = A = I \cdot A$$

Si quieres saber cuáles son las propiedades que cumple el producto de matrices sigue este [enlace](#).

Curiosidad

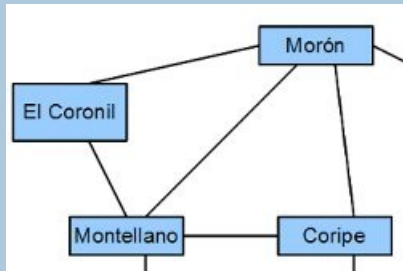
¿Recuerdas los grafos del tema anterior? ¿Recuerdas que también se podían poner como matrices? Pues bien, el producto de matrices también se puede aplicar ahí, y más concretamente la potencia, o sea, multiplicar una matriz por sí misma una serie de veces.

Si A es la matriz de adyacencia de un grafo, A^2 ($A \cdot A$) representa el número de caminos que hay para ir de un lugar a otro en dos pasos, o sea, pasando antes por un lugar intermedio, A^3 representaría el número de caminos que



une los puntos dando tres pasos, A^4 en cuatro pasos y así sucesivamente.

Vamos a verlo en un ejemplo. Recuerdas el mapa y el grafo que teníamos de los pueblos que rodeaban a Morón. Vamos a acortarlo un poco porque la matriz que salía era considerable. Vamos a quedarnos sólo con cuatro pueblos: Morón, El Coronil, Montellano y Coripe.



La matriz de adyacencia de ese grafo quedaría:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

colocando los pueblos en el orden anterior.

Si calculamos A^2 , obtendríamos lo siguiente:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, que $a_{13}=2$ quiere decir que existen dos caminos para ir de Morón a Montellano en dos pasos, que serían ir de Morón a Coripe y de Coripe a Montellano y el otro ir de Morón a El Coronil y después de El Coronil a Montellano.



Imagen de bibliotecapublicas.es bajo licencia Creative Commons

4. Y si perdemos el catálogo, ¿qué hacemos?



Imagen de [Agent 1994](#) bajo licencia Creative Commons

En el ejemplo que hicimos en el apartado anterior, multiplicábamos una matriz de precios por una matriz de pedidos y obteníamos la matriz de costos. ¿Te imaginas que al cabo del año queremos mirar algún precio pero el catálogo se ha perdido por entre los múltiples papeles de la oficina? ¿Podríamos saber algún precio si dispusiéramos de las facturas totales y de la cantidad pedida?

El problema que se plantea es encontrar la matriz A sabiendo B y C en el producto $A \cdot B = C$, o sea, encontrar una de las dos matrices que se están multiplicando.

Si eso fueran números, está claro que se reduciría a hacer una división, por ejemplo, en $2 \cdot X = 6$, está claro que x vale 3, pues $6:2 = 3$, pero, ¿con matrices se puede hacer esto? ¿existe la división de matrices?

La respuesta es que no, que no se pueden dividir matrices, pero sí existe una operación que viene a ser equivalente, y ésta es el cálculo de la matriz inversa y multiplicar por ella.

Importante

La inversa de una matriz A , que representaremos por A^{-1} , es otra matriz de la misma dimensión y que cumple que al multiplicarla por ella da la identidad del orden que le corresponda:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \text{y} \quad A^{-1} \cdot A = I$$

Puesto que las dos matrices tienen la misma dimensión, para que el producto se pueda hacer, la matriz A tiene que ser cuadrada. Es decir, la inversa de una matriz sólo tiene sentido para matrices cuadradas.

Luego en nuestro ejemplo no se podría hacer.

Bueno, pues vamos a ver cómo se hace esto de la matriz inversa. ¿Recuerdas del curso pasado el método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones con tres incógnitas? Básicamente había que hacer ceros por debajo de la diagonal multiplicando las filas por números y sumándolas.

Pues algo similar vamos a hacer aquí. Existen diversos métodos para calcular la matriz inversa, pero el que nosotros vamos a usar es el de Gauss-Jordan.

En la siguiente presentación te mostramos paso a paso cómo se hace. Vamos a calcular sólo inversas de matrices 2×2 para no complicar mucho el asunto.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Paso 2:
Escribimos la matriz $(A | I)$,
siendo I la matriz identidad

Si no te ha quedado muy claro, los siguientes videos pueden ayudarte a entender como se calcula la matriz inversa de otra.

MATRIZ INVERSA 2x2.wmv

π

INVERSA DE UNA MATRIZ

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad F_1 = \frac{1}{2}F_1$$

$$M_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad F_2 = F_1 + F_2$$

$$M_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \quad F_2 = \frac{2}{5}F_2$$

Matriz Inversa - Metodo Gauss Jordan - Matrices -



La siguiente escena de geogebra te muestra los pasos a dar para hallar la inversa de una matriz por el método de Gauss-Jordan. Para ello lo único que tienes que hacer es introducir los elementos de la matriz 2x2 de la cual quieras hallar la inversa, en los casilleros correspondientes que figuran en la matriz de arriba. En el caso de que no se pueda hallar la matriz inversa la aplicación lo indica.

Reflexiona



Imagen de [El Matenavegante](#) bajo licencia Creative Commons

Te proponemos tres matrices para que practiques:

1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

Las soluciones deben haberte salido estas:

1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3) Esta matriz no tiene inversa

De todas formas, si alguna no te sale, sustituye los datos en la escena de arriba y comprueba donde te estás equivocando.

Para saber más

Si la matriz es de dimensión mayor, el procedimiento es igual, sólo que más largo.

En esta [página](#) puedes ver cómo se hace y si quieres en este [vídeo](#) también se explica cómo se calcula la inversa de una matriz cuadrada 3×3 . Además, en la página que te proponemos puedes ver también cómo se hace una inversa por el método directo, esto es, poniendo incógnitas en los elementos y planteando un sistema de ecuaciones.

Y si quieres practicar, [aquí tienes](#).

Ecuaciones con matrices.

En muchas situaciones es necesario plantear ecuaciones con matrices donde la incógnita será una matriz. Sin ir más lejos en el ejemplo con el que hemos introducido el apartado. El procedimiento es similar al de una ecuación de primer grado, despejar la incógnita. Ahora lo que ocurre que si algo pasa dividiendo al otro lado, en lugar de dividir se multiplica por la matriz inversa.

En este [enlace](#) te explican cómo se hace esto y además tienes algunos ejercicios por si quieres practicarlos.



En este tema hemos trabajado con matrices y es muy frecuente encontrarlas en los exámenes de la PAU. Hasta hace unos años lo que más se valoraba era la soltura y seguridad en la ejecución de los cálculos, afortunadamente, desde hace un tiempo nos podemos encontrar con problemas de interpretación. Al igual que en el tema anterior, te presentamos una actividad propuesta como guía para la elaboración de las pruebas.

Ejercicio resuelto

Una persona tiene que comprar 2 kg de manzanas, 1 kg de ciruelas y 1,5 kg de plátanos y otra necesita 0,5 kg de manzanas, 2,5 de ciruelas y 3 de plátanos. En la frutería A, los precios de las manzanas son 1,8 euros/kg, los de las ciruelas 2,1 y los de los plátanos 1,9. En la frutería B son 1,7, 2,3 y 1,75 respectivamente.

Se escriben las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1,5 \\ 0,5 & 2,5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1,8 & 1,7 \\ 2,1 & 2,3 \\ 1,9 & 1,75 \end{pmatrix}$$

1. Determine $M \cdot N$ e indique qué representa cada uno de los elementos de la matriz producto
2. ¿En qué frutería le conviene a cada persona hacer la compra?

Representa lo que cada persona se gastaría en cada frutería

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1,5 \\ 0,5 & 2,5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,8 & 1,7 \\ 2,1 & 2,3 \\ 1,9 & 1,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,55 & 8,325 \\ 11,85 & 11,85 \end{pmatrix}$$

A la primera persona le conviene comprar en la frutería B. A la segunda le es indiferente comprar en una u otra.

