INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Sucesiones y estadística: Sucesiones

De pequeños, a nuestros padres y familiares les hace mucha gracia cuando aprendemos a decir las vocales: a, e, i, o, u. O a contar los primeros números: 1, 2, 3, 4, 5...

Después, cuando nos hacemos un poco mayores, no mucho más, seis o siete años, tendremos que recitar y aprender las tablas de multiplicar, por ejemplo, la del siete, que es una de las que más trabajo cuesta:

7 x 1 = 7

7 x 2 = 14

7 x 3 = 21

7 x 4 = 28

7 x 5 = 35

...

Imagen en Flickr de Marco Colín bajo CC

Algunos, a los que más le gustan las matemáticas, unos años más tarde, memorizamos, por ejemplo, el cuadrado de los primeros números naturales:

1 x 1 = 1

2 x 2 = 4

3 x 3 = 9

4 x 4 = 16

5 x 5 = 25

...

Las tres secuencias anteriores:

1, 2, 3, 4, 5...

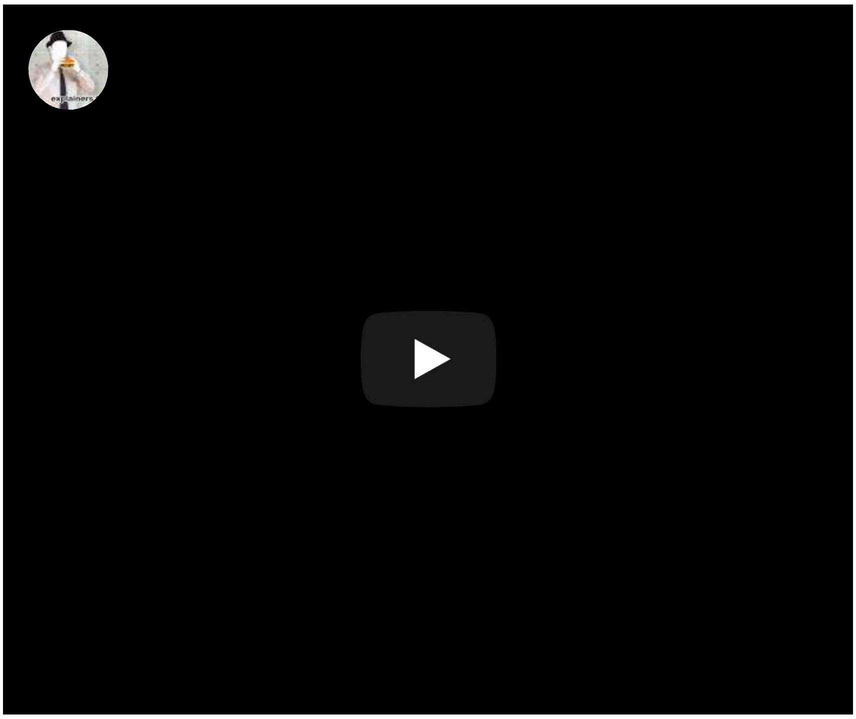
7, 14, 21, 28, 35...

1, 4, 9, 16, 25...

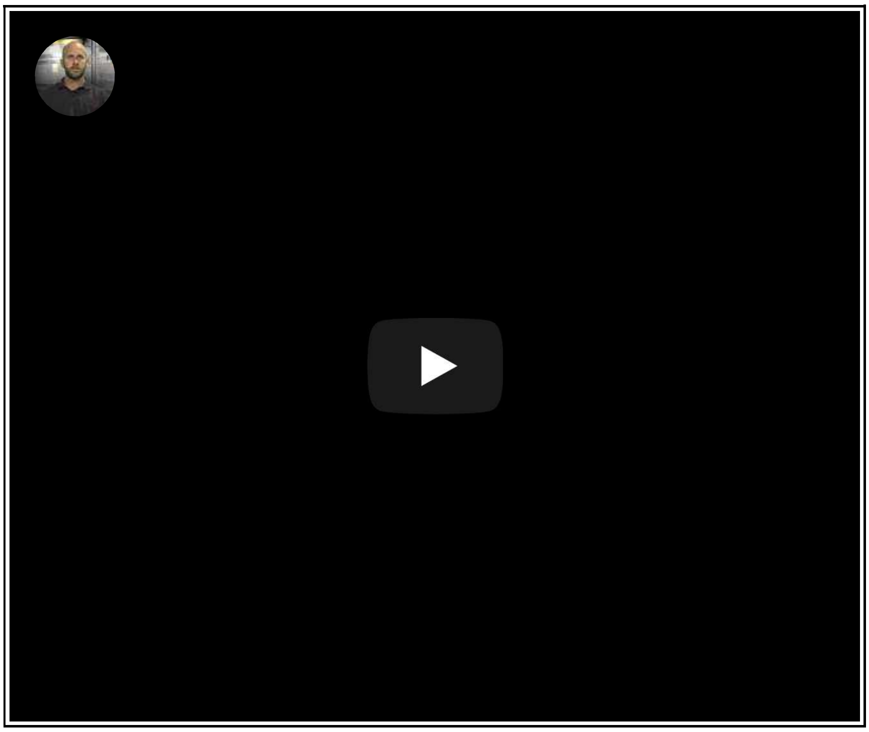
se denominan **sucesiones numéricas**. Una primera definición de **sucesión** sería la de un conjunto infinito de números ordenados.

Este tema está dedicado a conocer mejor las sucesiones y algunas de sus familias más famosas: **progresiones aritméticas** y **geométricas**. Aunque en un principio te pueda parecer un asunto trivial, sin importancia, ya verás que las sucesiones tienen más hondura de lo que a primera vista pueda parecer.

Hay sucesiones muy famosas, entre ellas la de Fibonacci podemos decir que se encuentra en el "top ten":



Como has podido ver en el vídeo anterior, la sucesión de Fibonacci está presente en la naturaleza o el arte, pero también se usa en procesos relacionados con la economía, como el llamado retroceso de Fibonacci.



En este tema también veremos un tipo de sucesiones muy particulares relacionada con temas económicos y financieros, las que nos indican los **intereses** de una inversión o de una deuda.

¿Te gustan los pasatiempos? En general son pequeños divertimentos lógicos que nos hacen pensar y nos evaden durante cierto tiempo de la realidad.

¿A ver si eres capaz de adivinar este que te proponemos?

Los números de la siguiente secuencia tienen relación con las figuras que lo rodean, sabrías decir cuál falta.

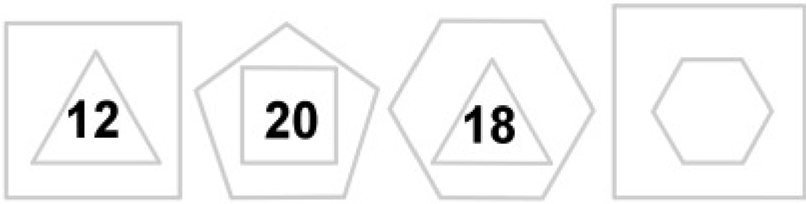


Imagen de elaboración propia

La anterior es una secuencia numérica que a pesar de poseer una regla para conocer cada valor individualmente, no tiene una regla de formación general. Para nosotros esas serán las secuencias que nos interesan, las que cumplen una norma para su construcción.

Esto ocurre con los denominados números poligonales. El ejemplo más sencillo de ellos son los **números triangulares**. En la siguiente imagen puedes ver cómo se van construyendo.

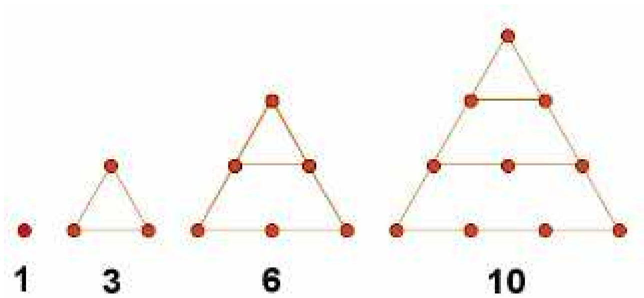


Imagen de elaboración propia

¿Sabrías decir cómo continúa la secuencia, cuáles son el quinto y sexto número triangular? ¿Y el décimo? ¿Serías capaz de dar una regla general para construirlos todos?

De todo esto trata el estudio de las sucesiones numéricas, y a dar respuestas a este tipo de preguntas está dedicado el tema.

Ejercicio resuelto

En este enlace puedes acceder a una recopilación de pasatiempos numéricos. La mayoría de ellos son secuencias numéricas. Todos son entretenidos, pero nos conformamos con que resuelvas el 1a, el 3 completo y el 6.

Te recomendamos que escribas en un papel las diferentes sucesiones numéricas, y analices con detenimiento qué relación existe entre cada término y el anterior.

Mostrar retroalimentación

1a) La secuencia es 0, 3, 8, 15, 24... Estudiemos las diferencias entre cada impares se incrementan en 3 unidades, en tanto que los pares disminuyen en 3. El término que nos piden es el que ocupa el lugar octavo, par, por tanto será 72, que se obtiene de sumar 3 a 69.

3b) 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140... Las diferencias entre dos números consecutivos generan la siguiente secuencia: 4, 9, 16, 25, 36, 49. Esta corresponde al cuadrado de los primeros números naturales. La siguiente sería el cuadrado de 8, es decir, 64. Lo sumamos a 140 y obtenemos 204, que será el término que nos piden.

6) 2, 6, 30, 210, 2310... En este caso, cada término se obtiene del anterior multiplicado por un número, la secuencia de dichos números es 3, 5, 7... Y aquí creo que hay un fallo, porque el siguiente es 9, por tanto el término quinto sería 210·9 = 1890. Pero aparece 2310 que es igual a 210·11, de ahí lo del fallo.

Importante

Una **sucesión numérica** es todo conjunto ordenado de números reales.

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\ \cdots$$

Cada uno de los elementos de la sucesión se llama **término**. Como puedes ver, se utilizan los **subíndices** para conocer el lugar que ocupa cada término en la sucesión.

Se llama **término general** al que ocupa el lugar indeterminado n . Dicho término se expresa como a_n .

En muchas ocasiones, los términos de las sucesiones se pueden determinar a partir de cierto criterio, este criterio se denomina **regla de formación**.

En el caso de números triangulares, tendríamos que $a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=6,\ a_4=10$ ...

Más adelante veremos por qué, pero puedes comprobar que el término general de la sucesión formada por los números triangulares es $a_n=\frac{n^2+n}{2}$.

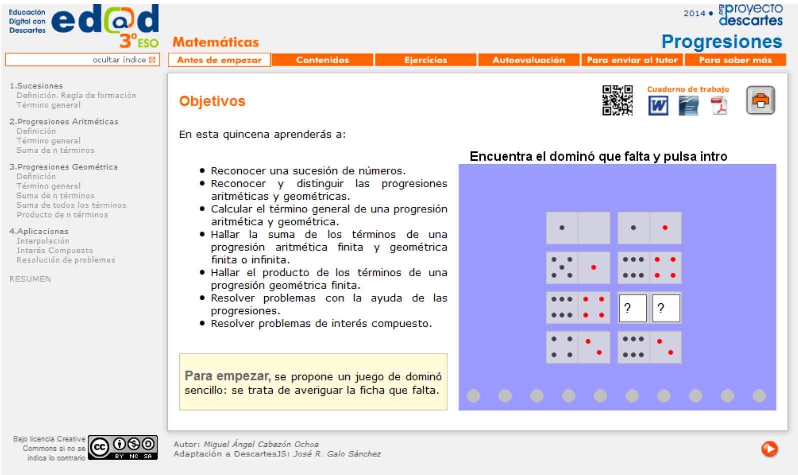
Veamos que es cierto para el término que ocupa el segundo lugar: $a_2=\frac{2^2+2}{2}=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3$.

Esa expresión es la regla de formación de los números triangulares que nos permite saber el valor de cualquier término, ocupe el lugar que ocupe. Por ejemplo, el término que ocupa el lugar 100: $a_{100}=\frac{100^2+100}{2}=\frac{10000+100}{2}=\frac{10100}{2}=5050$.

No siempre es posible escribir el término general de una sucesión con una expresión algebraica, aunque conozcamos la regla que sirve para hallar sus términos. Es el caso de las **sucesiones recurrentes**, en las que cada término queda determinado a partir de los anteriores. La ya mencionada sucesión de Fibonacci es de este tipo. Recuerda, $a_1=1,\ a_2=1$, y a partir del tercer término se cumple que $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, es decir cada término es la suma de los dos anteriores.

Aplicando la regla de recurrencia anterior tenemos que $a_3=1+1=2,\ a_4=2+1=3,\ a_5=3+2=5$ ...

Si haces clic en el **siguiente enlace**, puedes acceder a los contenidos del Proyecto EDAD en los que se desarrollan los conceptos anteriores, acompañados de algunos ejemplos y ejercicios.



Comprueba lo aprendido

Recuerdas las tres primeras sucesiones que vimos al principio del tema:

Los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5...

La tabla de multiplicar del 7: 7, 14, 21, 28, 35...

Los cuadrados de los números naturales: 1, 4, 9, 16, 25...

Completa las siguientes frases.

a. El término general de la sucesión formada por los números naturales es a_n = ☐ .

b. En el caso de la tabla de multiplicar del 7 a☐ = 49.

c. El término general de la sucesión anterior es a_n = ☐ .

d. En la sucesión de los cuadrados a☐ = 81.

Enviar

Johann Carl Friedrich Gauss, llamado el "príncipe de las matemáticas", fue un niño precoz. Tenía 10 años de edad cuando un día en el colegio el maestro pidió a los alumnos, quizás para que lo dejarán tranquilo durante un buen rato, que sumaran los 100 primeros números naturales. Trascurrido unos pocos minutos, Gauss se acercó a la mesa del profesor con el resultado correcto de la suma: **5.050**.

¿Cómo lo consiguió? ¿Sumó las cien cifras de forma rápida? ¿Cuál fue el razonamiento del pequeño Gauss?

Muy fácil, pero a la vez ingenioso. Gauss escribió dos veces la sucesión, la primera en el orden natural de 1 a 100, y la otra de 100 a 1. Se dió cuenta de que la suma de los pares de números extremos era siempre la misma, 101. Dicha suma aparecía 100 veces, es decir 100·101= 10.100 era el resultado de sumar dos veces lo que había pedido el maestro, por tanto, bastaba dividir entre 2 esa cantidad. Así obtuvo el 5.050 que sorprendió tanto al maestro como a sus compañeros.

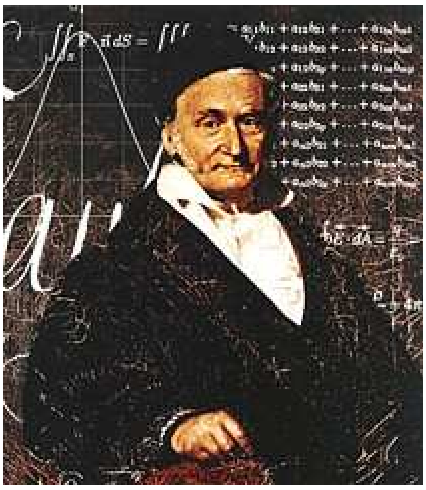


Imagen en Flickr de Agc studios bajo CC

	1	2	3	4	...	97	98	99	100
	100	99	98	97	...	4	3	2	1
Suma	101	101	101	101	...	101	101	101	101

No es la primera vez que aparece 5.050 en este tema, ¿recuerdas que era el número triángular correspondiente a 100? El motivo es bien sencillo. En realidad, el número triangular que ocupa el lugar n no es más que la suma de los n primeros números naturales. Por ejemplo, el que ocupa el quinto lugar es el resultado de sumar 1 + 2+ 3 + 4 + 5 = 15.

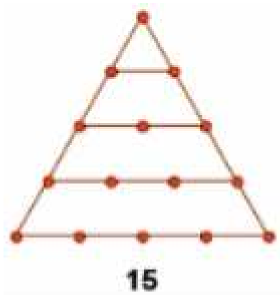


Imagen de elaboración propia

La sucesión formada por los números naturales es el ejemplo más sencillo de un tipo de sucesión con nombre propio, la **progresión aritmética**. Como puedes ver, no por ser sencillas quiere decir que no se pueden usar en muchos contextos.

No solo los triángulos determinan un tipo de sucesión numérica, también es posible jugar con las letras del abecedario para generar sucesiones, por ejemplo, con la T.

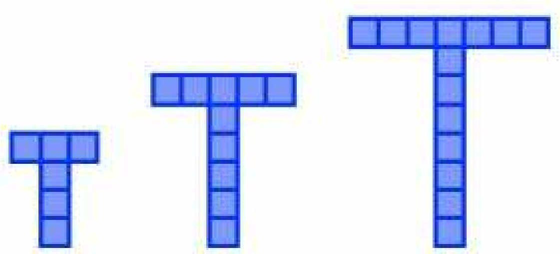


Imagen de elaboración propia

¿Cuántos cuadrados son necesarios para construir la primera T? ¿Y la segunda? ¿Y la tercera? ¿Y las sucesivas T?

En un principio parece que basta con contar los cuadrados: 6 para la primera, 10 para la segunda, 14 para la tercera... Pero si queremos conocer la regla de formación tendremos que fijarnos un poco más: 6 para la primera y después se añaden 4 cuadrados más a las sucesivas T.

Vamos a escribirlo utilizando la notación de sucesiones:

$$a_1 = 6$$
$$a_2 = 6+4$$
$$a_3 = 6+4+4 = 6+2\cdot 4$$
$$a_4 = 6+4+4+4 = 6+3\cdot 4$$

De lo anterior podemos deducir que $a_n = 6+(n-1)\cdot 4$.

A este tipo de sucesiones se las denomina **progresiones aritméticas**.

Importante

Se llama **progresión aritmética** a toda sucesión en la que cada término, exceptuando el primero, es la suma del anterior más una cantidad fija llamada **diferencia**.

Es decir $a_n = a_{n-1} + d$, donde d es la diferencia y $n>1$.

La sucesión anterior, la formada por los cuadrados necesarios para ir construyendo las sucesivas T, es una progresión aritmética en la que la diferencia vale 4.

Comprueba lo aprendido

Algunos de los ejemplos de sucesiones que hemos vista hasta ahora son progresiones

a. La sucesión formada por los números naturales es una progresión aritmética con diferencia igual a ☐ .

b. Los múltiplos de 7 también forman una progresión aritmética en que d = ☐ .

c. La sucesión determinada por las losetas necesarias para rodear las jardineras forman una progresión aritmética en la que d = ☐ .

Imagen en Flickr de mckreyness bajo CC

Enviar

Comprueba lo aprendido

¿Cuál de las siguientes sucesiones se corresponden con una progresión aritmética?

- ☐ 5, -5, 5, -5, 5, -5...
- ☐ -5, 0, 5, 10, 15, 20...
- ☐ 1, 11, 111, 1111, 11111...
- ☐ 50, 42, 34, 26, 18...
- ☐ 2, 4, 8, 16, 32...

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto
4. Correcto
5. Incorrecto

En una progresión aritmética, si son conocidos su primer término y la diferencia es posible conocer cómodamente cualquier término, es decir, es muy fácil determinar su término general.

Lo anterior ya lo hemos podido comprobar en el caso de los cuadros que hacen falta para ir formando las sucesivas T y con las losetas necesarias para rodear las jardineras.

En general, solo hace falta razonar un poco sobre los primeros términos de la progresión aritmética, como se puede ver en la siguiente presentación:

Importante

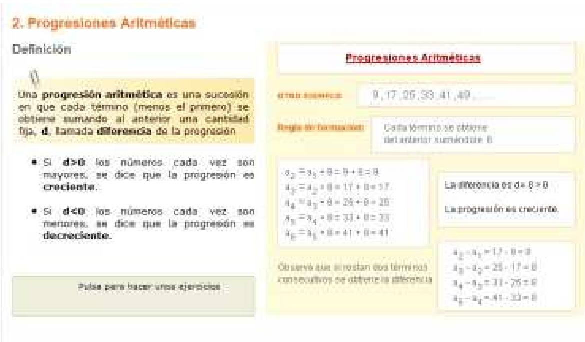
Una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y de diferencia d, tiene como **término general:**

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

En el caso de las losetas, $a_1 = 6$ y $d = 5$, por tanto $a_n = a_1 + (n-1)\cdot 5 = 6 + 5n - 5 = 1 + 5n$.

Y en el de las T, $a_1 = 6$ y $d = 4$, por tanto $a_n = a_1 + (n-1)\cdot 4 = 6 + 4n - 4 = 2 + 4n$.

Si haces clic en la siguiente imagen, podrás acceder a las secciones del Proyecto EDAD en las que se desarrollan los conceptos anteriores, acompañados de algunas actividades.



Ejercicio resuelto

Imagen en Flickr de Iokin bajo CC

La primera fila del patio de butacas del teatro Antonio Gala de mi ciudad, tiene 20 asientos, el resto de filas aumenta en 2 asientos respecto a la que tiene delante.

¿Cuántos asientos tiene la fila que ocupa el lugar 15?

Mostrar retroalimentación

La situación se ajusta a una progresión aritmética donde el primer término, $a_1=20$, y la diferencia $d=2$.

Por tanto, si queremos saber cuántas butacas hay en la fila 15, basta que apliquemos la fórmula del término general:

$a_{15}=20+(15-1)\cdot 2=20+14\cdot 2=20+28=48$.

Por lo que el número de asientos en la fila 15 es de 48.

Ejercicio resuelto

De una progresión aritmética se conocen el valor del segundo y el quinto término, $a_2=-4$ y $a_5=-18$.

Determinar el término general de la progresión.

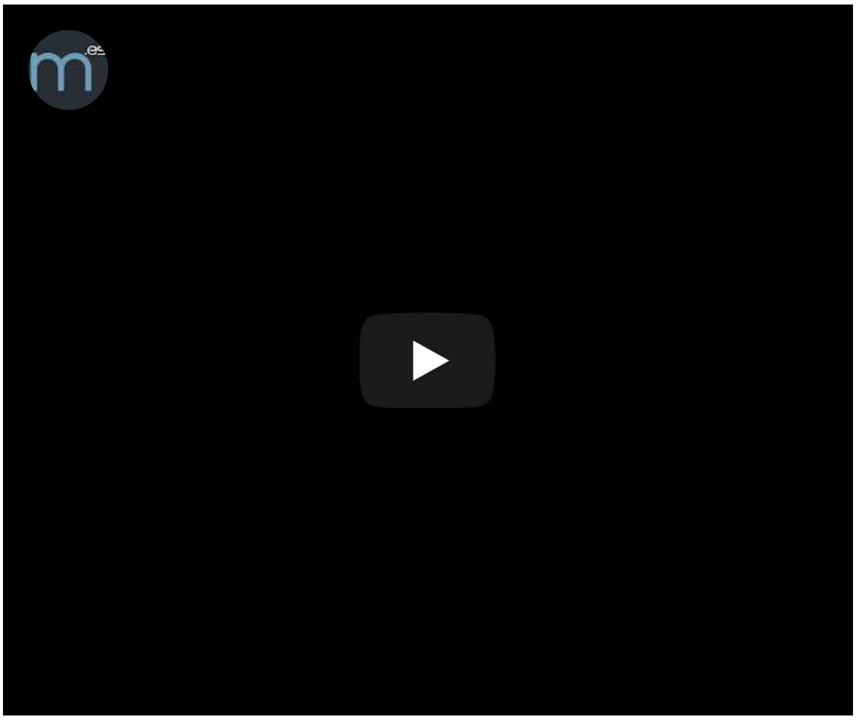
Mostrar retroalimentación

Sabemos que en una progresión aritmética cada término es la suma del anterior más un valor fijo llamado diferencia, d. Entre el segundo y el quinto término se ha sumado 5-2= 3 veces la diferencia. Por tanto $a_5=a_2+3d$, es decir $-18=-4+3d$, despejando $-14=3d$ y $d=\frac{-14}{3}$.

Ahora podemos hallar el primer término, a_1, ya que $a_2=a_1+d$. Por tanto $-4=a_1-\frac{14}{3}$. De donde obtenemos que $a_1=\frac{2}{3}$.

Ya podemos hallar el término general de la progresión

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d=\frac{2}{3}+(n-1)\cdot\left(\frac{-14}{3}\right)=\frac{2}{3}-\frac{14n}{3}+\frac{14}{3}=\frac{16-14n}{3}$



2.2. Suma

Recordemos a Gauss y su brillante idea para sumar los 100 primeros números naturales. ¿Podremos generalizarla para sumar los 200 primeros números? ¿O los n primeros?

Volvamos también a los números triángulares. ¿Cuántos puntos tendrá el que ocupa el lugar n?

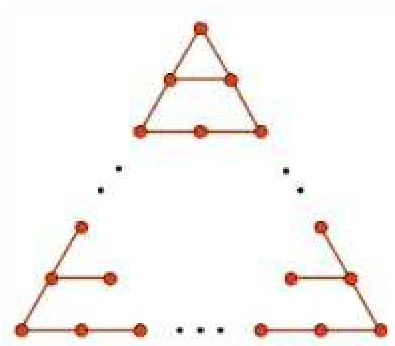


Imagen de elaboración propia

Relacionemos las dos sucesiones anteriores. Por un lado tenemos la de los números naturales 1, 2, 3, 4... Por otro la de los números triangulares. Hagamos memoria:

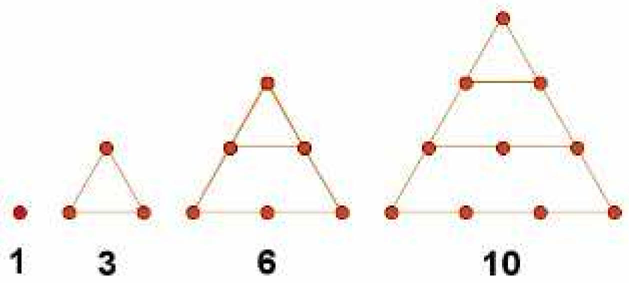


Imagen de elaboración propia

Podemos ver que el número triangular que ocupa el lugar n es igual a la suma de los n primeros números naturales: 1 + 2 + 3 + ... + n.

Operando de forma similar a como lo hizo Gauss, tenemos:

	1	2	3	4	...	n-3	n-2	n-1	n
	n	n-1	n-2	n-3	...	4	3	2	1
Suma	n+1	n+1	n+1	n+1	...	n+1	n+1	n+1	n+1

Por tanto, dos veces la suma de los n primeros números naturales es igual al n·(n+1). Esto quiere decir que la suma de los n primeros números naturales es igual a:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

¿Será posible realizar un razonamiento similar para la suma de los primeros términos de cualquier progresión aritmética?

Comprobemos que sí en la siguiente presentación:

Importante

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de término general a_n es igual a

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Ejercicio resuelto

Volvamos al número de asientos que tiene el patio de butacas del teatro Antonio Gala, que vimos en el apartado anterior. Recordemos que la primera fila tenía 20 asientos y que el resto de filas aumenta en 2 asientos respecto a la que tiene delante.

Ahora nos preguntamos, cuántos asientos hay en el patio de butacas si dispone de 15 filas en total.

Mostrar retroalimentación

El problema planteado se resuelve si hallamos la suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética de la que sabemos que $a_1 = 20$ y $d = 2$.

De un ejercicio anterior sabemos que $a_{15} = 48$.

$$S_{15}=\frac{(20+48)}{2}\cdot 15=\frac{68}{2}\cdot 15=34\cdot 15=510$$

Por lo que el número de asientos totales del patio de butacas es 510.

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

En una progresión aritmética de 20 términos, el primero es 5 y el décimo 32. Halla su diferencia y la suma de sus primeros 20 términos.

Mostrar retroalimentación

De la progresión aritmética sabemos que $a_1=5$ y $a_{10}=32$. Nos piden la diferencia, d, y la suma de los primeros 20 términos, S_{20} .

En primer lugar calculamos d . Sabemos que $a_{10}=a_1+9d$. Sustituimos valores y despejamos d :

$$32=5+9d\rightarrow 27=9d\rightarrow d=3$$

Ahora, y aplicando la fórmula, hallaremos S_{20} . Pero antes hay que calcular el valor de $a_{20}=a_1+19d=5+19\cdot 3=5+57=62$.

Por tanto, la suma de los primeros 20 terminos será:

$$S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20=\frac{5+62}{2}\cdot 20=670$$

Luego la suma es **335**.

Ejercicio resuelto

Curso 2010/2011

Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 30 y el cuarto es 39, halla la diferencia de la progresión y la suma de sus primeros 25 términos.

Mostrar retroalimentación

Los pasos a seguir son idénticos a los del ejercicio anterior.

Primero hallamos la diferencia d, para lo que conocemos a_1 y a_4 :

$a_4 = a_1 + 3d$, es decir, $39 = 30 + 3d$. Por tanto, $d = 3$.

Antes de calcular la suma de los 25 primeros términos tendremos que conocer cuánto vale a_{25} . Operamos:

$$a_{25} = 30 + 24 \cdot 3 = 102$$

Ya podemos aplicar la fórmula y tendremos que

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(30 + 102) \cdot 25}{2} = \frac{132 \cdot 25}{2} = 1.650$$

.

3. Progresiones geométricas

Existe una leyenda sobre el supuesto inventor del juego del ajedrez, **Sissa Ben Dahir**. Cierto rey hindú se encontraba muy triste debido a la muerte de su hijo. Para aliviar su pena, Sissa le enseñó a jugar al ajedrez.

Imagen en Flickr de jefedo61 bajo CC

Quedó tan contento el monarca que le ofreció el regalo que él quisiera. Sissa tan sólo le pidió que le diera un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, el doble por la segunda, el doble por la tercera y así sucesivamente hasta completar las 64 casillas.

El rey accedió entre satisfecho y sorprendido a la extraña petición, pero al realizar los cálculos se dio cuenta de que le sería imposible cumplirla.

El número de granos de arroz que corresponde a cada una de las casillas es una sucesión numérica:

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4,\ a_4=8,\ a_5=16\ \cdots$$

El primer término es 1, los términos posteriores se obtienen multiplicando por 2 el término anterior, es decir:

$$a_1=1,\ a_2=2\cdot 1=2=2^1,\ a_3=2\cdot 2=4=2^2,\ a_4=4\cdot 2=8=2^3,\ a_5=8\cdot 2=16=2^4\ \cdots$$

Podríamos escribir lo anterior de la siguiente forma: $a_1=1$ y $a_n=2^{n-1}$.

Esto nos permite saber cómodamente el número de granos de la última casilla, la 64:

$2^{64-1}=2^{63}=9.223.372.036.854.780.000$ granos de trigo.

Es decir, $9.22\cdot 10^{18}$ granos. Y aún tendríamos que sumar todos los granos de las 64 casillas.

¿Entiendes ahora cómo se quedó el rey cuando se dio cuenta del regalo que le debía a Sissa?

A este tipo de sucesiones se les denomina **progresiones geométricas**.

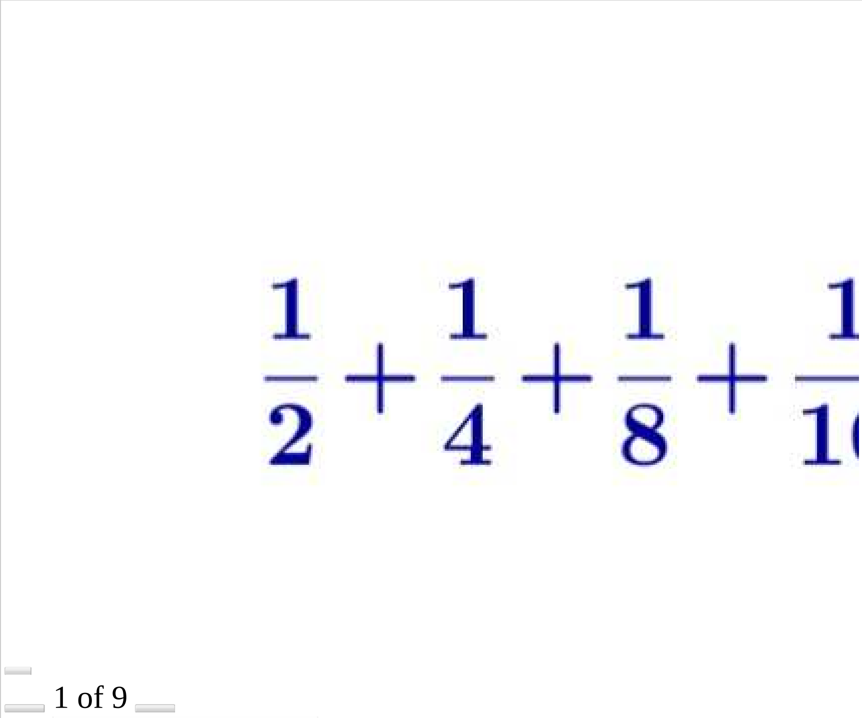
Importante

Se llama **progresión geométrica** a toda sucesión en la que cada término, exceptuando el primero, es el producto del anterior por una cantidad fija llamada **razón**.

Es decir $a_n=a_{n-1}\cdot r$, donde $r\neq 0$ es la razón, y $n>1$.

En la progresión geométrica de los granos de trigo la razón es 2, un número mayor que 1 en valor absoluto. Esto implica que los términos de la progresión se vayan haciendo muy grande en valor absoluto, como hemos podido comprobar con los granos que habría que poner en la casilla 64.

Pero también podemos considerar progresiones geométricas en que la razón es número menor que 1 en valor absoluto. Observa con detenimiento la siguiente presentación.



La progresión geométrica anterior $a_1=\frac{1}{2}$, la razón $r=\frac{1}{2}$, y el término general $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Ya veremos cómo podemos calcular las sumas de las dos progresiones geométricas anteriores.

Al igual que ocurre con las progresiones aritméticas, existe una ley de formación para las geométricas.

$$a_1,\ a_2=a_1\cdot r,\ a_3=a_2\cdot r=a_1\cdot r^2,\ a_4=a_3\cdot r=a_1\cdot r^3,\ a_5=a_4\cdot r=a_1\cdot r^4\ \ldots$$

Importante

Una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y de razón $r\neq 0$, tiene como **término general:**

$$a_n=a_1\cdot r^{n-1}$$

Ejercicio resuelto

Halla los cinco primeros términos de una progresión geométrica de la que sabemos que $a_1=1$ y $a_5=81$.

Mostrar retroalimentación

Por lo que hay dos progresiones posibles:

En el caso de que $r = 3$: **1, 3, 9, 27, 81**.

Y, para $r = -3$: **1, -3, 9, -27, 81**.

Comprueba lo aprendido

Imagen en Flickr de sergis blog bajo CC

Interpola tres medios geométricos entre 3 y 48.

Interpolar tres medios geométricos entre dos números *a* y *b* quiere decir intercalar tres números *c*, *d* y *e* entre *a* y *b*, de tal forma que los cinco números *a*, *c*, *d*, *e* y *b* formen una progresión geométrica.

Este problema se puede extender a cualquier cantidad de números entre dos números conocidos. Por ejemplo, interpolar seis medios geométricos entre *a* y *b* quiere decir intercalar seis números entre ellos, de tal forma que los ocho números, ordenados de menor a mayor, formen una progresión geométrica.

Para saber más sobre interpolación geométrica puedes ir a este enlace.

Para resolver el problema planteado, completa las siguientes frases.

Tenemos que buscar tres números a, b y c, de tal forma que 3, a, b, c y ☐ determinen una progresión geométrica.

El primer término de la progresión es 3 y el ☐ 48. Sabemos que $a_5 = a_1 \cdot r^4$, donde ☐ es la razón. Sustituyendo: ☐ $= 3 \cdot r^4$.

Despejando nos queda que $r^4 =$ ☐ , por tanto r = ☐ .

Tenemos entonces que los tres números buscados son ☐ , ☐ y ☐ , que junto con 3 y 48 formarán la progresión geométrica.

Enviar

Si haces clic en este enlace, accederás una página del portal Vitutor donde está planteado el problema anterior. Si seleccionas el número 3 que está recuadrado, podrás ver otra forma de resolverlo.

Del mismo modo que ocurría con una progresión aritmética, también nos puede interesar en algunas ocasiones saber cuánto vale la suma de los términos de una progresión geométrica. Por ejemplo para saber cuántos granos de trigo debería entregar el rey a Sissa o demostrar que la suma de las potencias de $\frac{1}{2}$ vale 1.

Veamos cuáles son las fórmulas que nos permiten sumar algunos o muchos términos de una progresión geométrica.

Importante

- La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r es igual a: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$

- Si la razón es, en valor absoluto, menor que 1, $(|r|<1)$ la suma de los **infinitos términos** de la progresión geométrica toma un valor finito y se calcula utilizando la fórmula: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

Ejercicio resuelto

Calcula el total de granos de trigo que tuvo que dar el rey a Sissa.

Recuerda que la progresión formada por los granos que corresponden a las 64 casillas es geométrica con $a_1 = 1$ y $r = 2$.

Resolveremos el problema utilizando la calculadora científica. En primer lugar hallamos el último término:

$a_{64}=a_1\cdot r^{63}=1\cdot 2^{63}=9.2233\cdot 10^{18}$ granos de trigo.

Veamos la suma total de granos en todo el tablero de ajedrez: $S_{64}=\frac{r\cdot a_{64}-a_1}{r-1}=\frac{2\cdot 9.22\,10^{18}-1}{2-1}=1.844\cdot 10^{19}$ granos de trigo.

¿Te parecen muchos?

Ejercicio resuelto

Demuestra que la suma de los infinitos términos de la sucesión formada por las sucesivas potencias de $\frac{1}{2}$ es 1.

Recuerda que esa sucesión es una progresión geométrica en la que $a_1=\frac{1}{2}$ y $r=\frac{1}{2}$, por tanto $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Mostrar retroalimentación

Aplicamos la fórmula de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, ya que la razón es menor que 1 en valor absoluto $\left(|r|=\frac{1}{2}<1\right)$. Por tanto tenemos:

$$S_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

Que era el resultado que nos salía al ir sumando las áreas de los sucesivos triángulos que iban recubriendo el cuadrado de área 1.

Ejercicio resuelto

Curso 2013/2014

El término a_{10} de una progresión geométrica de razón 2 es 2560. Halle el término a_{14}¿Cuánto vale la suma de los 14 primeros términos?

Universidades Públicas de Andalucía

Utilizando la fórmula: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, podemos despejar el término a_1.

$$a_{10} = a_1 \cdot 2^9 \rightarrow 2560 = a_1 \cdot 512 \rightarrow a_1 = \frac{2560}{512} = 5$$

A partir del primer término calculamos el 14 y la suma de los 14 primeros:

$$a_{14} = 5 \cdot 2^{13} = 40960$$

$$S_{14} = \frac{2 \cdot 40960 - 5}{1} = 81915$$

¡Ahorrar, a todos nos gustaría poder ahorrar! Disponer de un dinero extra disponible para un gasto imprevisto.

Y si ese dinero ahorrado nos proporciona beneficios, **intereses**, miel sobre hojuelas.

¿Y qué tiene que ver el ahorro con las progresiones? Más de lo que en un principio puede parecer.

En el caso de que dispongamos de ese dinerillo extra, lo más común es que vayamos a varios bancos a preguntar cuánto **interés** nos darían por él.

O, en el caso de que seamos nosotros los que pidamos dinero al banco, nos convendrá saber cuánto nos costará ese "favor". Es decir, qué **intereses** tendremos que abonar.

Imagen en Flickr de wendypan bajo CC

Importante

Hay dos tipos de intereses: el que se recoge año a año, que recibe el nombre de **interés simple,** y otro que se va incorporando a la cantidad inicial y sólo se recoge al final (por lo que esa cantidad también incrementa, cada año, la cantidad inicial). Este segundo tipo recibe el nombre de interés **compuesto**.

Veamos con un ejemplo cómo varían ambos tipos de intereses.

Disponemos de **2.000 euros** y una entidad bancaria nos ofrece un **3 por ciento** de interés durante **5 años**.

Vamos a construir una tabla en donde se exprese cómo varía la cantidad de dinero a lo largo de esos cinco años, según el tipo de interés.

	Interés simple			Interés compuesto		
Años	C_i	Intereses	C_f	C_i	Intereses	C_f
1	2000	60	2060	2000	60	2060
2	2000	60	2120	2060	61,80	2121,80
3	2000	60	2180	2121,80	63,65	2185,45
4	2000	60	2240	2185,45	65,56	2251,02
5	2000	60	2300	2251,02	67,53	2318,55

Imagen de elaboración propia

Representamos por C_i el capital inicial que tenemos al principio del año y por C_f la cantidad final que tenemos en un determinado momento.

En el caso del **interés simple**, como siempre se aplica un interés del 3 % a la cantidad inicial, el interés obtenido será siempre el mismo cada año:

$$2.000 \cdot \frac{3}{100} = 2.000 \cdot 0{,}03 = 60 \text{ euros}$$

Esa cantidad se irá acumulando año a año, es decir, las cantidades finales forman una progresión aritmética de primer término 2.060 y diferencia 60:

Imagen en Flickr de Image_of_money bajo CC

$C_f = 2.000 + 60t$, donde t son los años transcurridos.

En cuanto al **interés compuesto**, el primer año será igual que el simple, pero en los años posteriores no se aplicarán a 2.000, sino al capital final del año anterior.

El primer año el interés será $2.000 \cdot 0{,}03 = 60 \text{ euros}$, luego el capital final será:

$$2.000 + 2.000 \cdot 0{,}03 = 2000 \cdot (1 + 0{,}03) = 2.000 \cdot 1{,}03 = 2.060 \text{ euros}$$

El segundo año el interés será el 3 % aplicado a 2.060, es decir $2.060 \cdot 0.03$, por tanto el capital final será:

$$2.060 + 2.060 \cdot 0{,}03 = 2060 \cdot (1 + 0{,}03) = 2.060 \cdot 1{,}03 = 2.000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 2.000 \cdot (1{,}03)^2 = 2.121{,}80 \text{ euros}$$

Operando de forma similar, el tercer año el capital final será:

$$2.121{,}80 + 2.121{,}80 \cdot 0{,}03 = 2.121{,}80 \cdot (1 + 0{,}03) = 2.121{,}80 \cdot 1{,}03 = 2.000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 2.000 \cdot (1{,}03)^3 = 2.185{,}45 \text{ euros}$$

El capital final obtenido cada año determina una **progresión geométrica de primer término** $2.000 \cdot 1{,}03$ y **razón** $1{,}03$:

$C_f = 2.000 \cdot 1{,}03^t$, donde t son los años transcurridos.

Por tanto, el cuarto año el capital final será de $2.000 \cdot 1{,}03^4 = 2.251{,}02 \text{ euros}$, y el quinto año de $2.000 \cdot 1{,}03^5 = 2.318{,}55 \text{ euros}$.

Importante

Si hemos invertido un capital C_i a un interés de r por ciento durante t años, el capital final C_t que obtendremos será:

$$\begin{array}{ll} \text{Interes simple:} & C_t = C_i + C_i \cdot i \cdot t = C_i \cdot (1 + i \cdot t) \\ \text{Interes compuesto:} & C_t = C_i \cdot (1 + i)^t \end{array} \quad , \text{ donde } i = \frac{r}{100}$$

Ejercicio resuelto

Hace cuatro años se depositó una cantidad de dinero en una cuenta de ahorro, a un interés compuesto, con un rédito del 4 % anual. Si el capital obtenido finalmente es de 6.424,22 euros, calcule el capital inicial que se depositó y los intereses totales que ha producido en los 4 años.

Mostrar retroalimentación

Situemos el problema planteado.

Nos piden el capital inicial, es decir C_i .

El periodo de tiempo es 4 años, por tanto $t=4$.

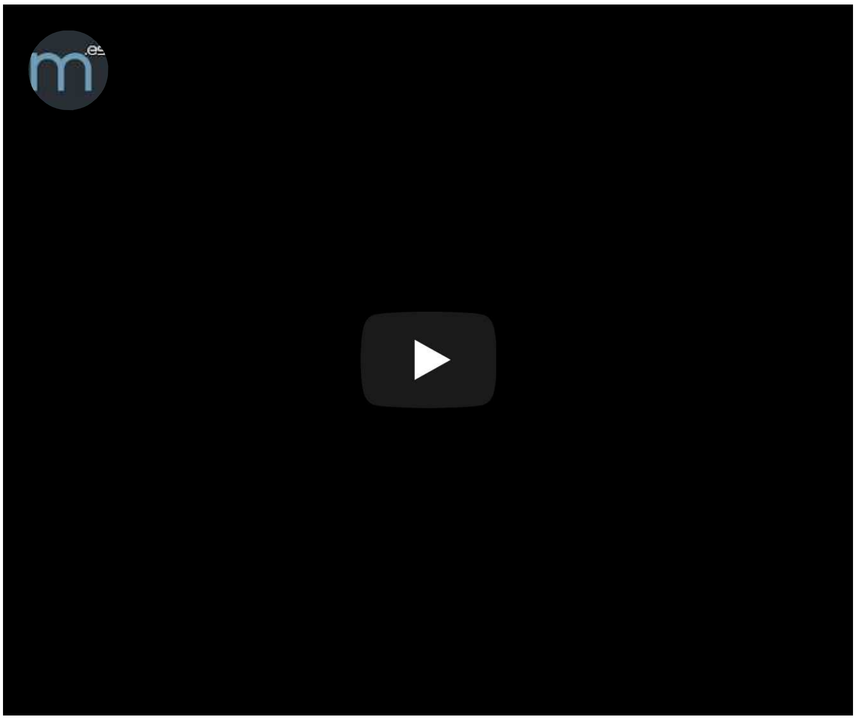
El interés compuesto es del 4 %, por lo que $i=0{,}04$.

El capital final es de 6.424,22 euros, es decir $C_4=6.424{,}22$.

Sabemos que $C_4=C_i\cdot 1{,}04^4=C_i\cdot 1{,}16985$. Despejando tenemos que $C_i=\dfrac{6.424{,}22}{1{,}16985}=5.491{,}49\ \text{euros}$.

Los intereses son el resultado de restar el dinero depositado y el capital obtenido: $C_4-C_i=6.424{,}22-5.491{,}49=932{,}73\ \text{euros}$.

En el siguiente vídeo del canal de YouTube de juanmemol puedes ver cómo se resuelve un problema de interés compuesto que te ayudará a comprender todos los conceptos definidos anteriormente.



Ejercicio resuelto

Universidades Públicas de Andalucía

<u>Curso 2011/2012</u> (continuación)

Una persona coloca 20.000 € en un producto de inversión que ofrece una rentabilidad anual del 2 % de interés compuesto durante 3 años. Determina los intereses producidos cada año y el capital final obtenido al acabar el plazo previsto.

Mostrar retroalimentación

En primer lugar, dejaremos claro los datos de que disponemos.

El capital inicial, $C_i = 20.000 \text{ euros}$.

El interés es compuesto del 2 %, por tanto $i = 0{,}02$.

Y el periodo es anual de 3 años, luego $t = 3$.

Nos piden, el capital final al cabo de 3 años, C_3 y los interes obtenidos cada año.

Empezemos por el capital final, $C_3 = C_1 \cdot (1+i)^3 = 20.000 \cdot 1{,}02^3 = 21.224{,}16 \text{ euros}$.

Veamos cuáles son los intereses anuales.

El primer año $20.000 \cdot 0{,}02 = 400 \text{ euros}$.

El segundo año habrá que aplicar dicho $0{,}02$ a $20.000 + 400 = 20.400 \text{ euros}$, por tanto tendremos $20.400 \cdot 0{,}02 = 408 \text{ euros}$.

El tercer año se aplicará el $0{,}02$ a $20.400 + 408 = 20.808 \text{ euros}$, lo que dará $20.808 \cdot 0{,}02 = 416{,}16 \text{ euros}$.

Por último, y sólo como observación, si sumamos 400 + 408 + 416,16 obtendremos 1.224,16 euros, que son los intereses totales de los tres años, que al sumarlos a 20.000 nos dará los 21.224,16 euros de capital final que ya habíamos obtenido.

Ejercicio resuelto

<u>Curso 2009/2010</u> (continuación)

Un banco concedió a una empresa un préstamo a un interés compuesto del 6 % durante 5 años y al cabo de ese tiempo el interés acumulado es de 3.382,25€. ¿Qué capital prestó el banco a la empresa?

En primer lugar, situemos el ejercicio.

El capital que prestó el banco a la empresa es el capital inicial C_i .

La cantidad total que pagó la empresa por ese préstamo a 5 años es el capital final C_5 .

El interés es del 6 %, por tanto $i = 0{,}06$. Y el tiempo 5 años, es decir $t = 5$.

Los intereses acumulados son la diferencia entre el capital prestado por el banco y el pagado por la empresa, es decir $C_5 - C_i = 3.382{,}25$ euros .

Sabemos que $C_5 = C_i \cdot (1{,}06)^5$, por tanto $C_i \cdot (1{,}06)^5 - C_i = 3.382{,}25$. Operando

$C_i \cdot (1{,}06^5 - 1) = 3.382{,}25 \rightarrow C_i \cdot 0{,}338225 = 3.382{,}25 \rightarrow C_i = 10.000$ euros.

Es decir, el capital prestado fue de 10.000 euros.

Ejercicio resuelto

Curso 2015/2016

Un capital de 20000 € ha producido en 4 años, mediante interés simple, un interés de 2200 €. ¿Cuánto hubiese producido de interés si se hubiese colocado a interés compuesto, suponiendo que el rédito anual es el mismo en ambos casos?

Mostrar retroalimentación

Conocemos el tiempo, el capital final y el capital inicial con el interés simple, luego podemos calcular el interés:

$$C_f = C_i \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$22200 = 20000(1 + i \cdot 4)$$

$$i = \frac{1{,}11 - 1}{4} = 0{,}0275$$

Aplicamos ahora la fórmula del interés compuesto:

$$C_f = C_i (1 + i)^t$$

$$c_f = 20000(1{,}0275)^4 = 22292{,}46$$

5. Apéndice

En este tema hemos desarrollado los aspectos más básicos de dos tipos muy particulares de sucesiones numéricas, la progresiones aritméticas y geométricas. Ambas modelizan diversas situaciones de la realidad, siendo las más conocidas el cálculo de los intereses bancarios.

Las sucesiones significan un primer acercamiento al concepto siempre complicado del infinito, es el caso de las sumas infinitas de progresiones geométricas de razón menores que uno en valor absoluto. Existen multitud de paradojas y problemas clásicos matemáticos que se han resuelto gracias a la ayuda de este tipo de herramientas matemáticas.

Importante

que aparecen, para poder luego aplicarlas con seguridad. Por este motivo te adjuntamos un mapa conceptual con la recopilación de todas:

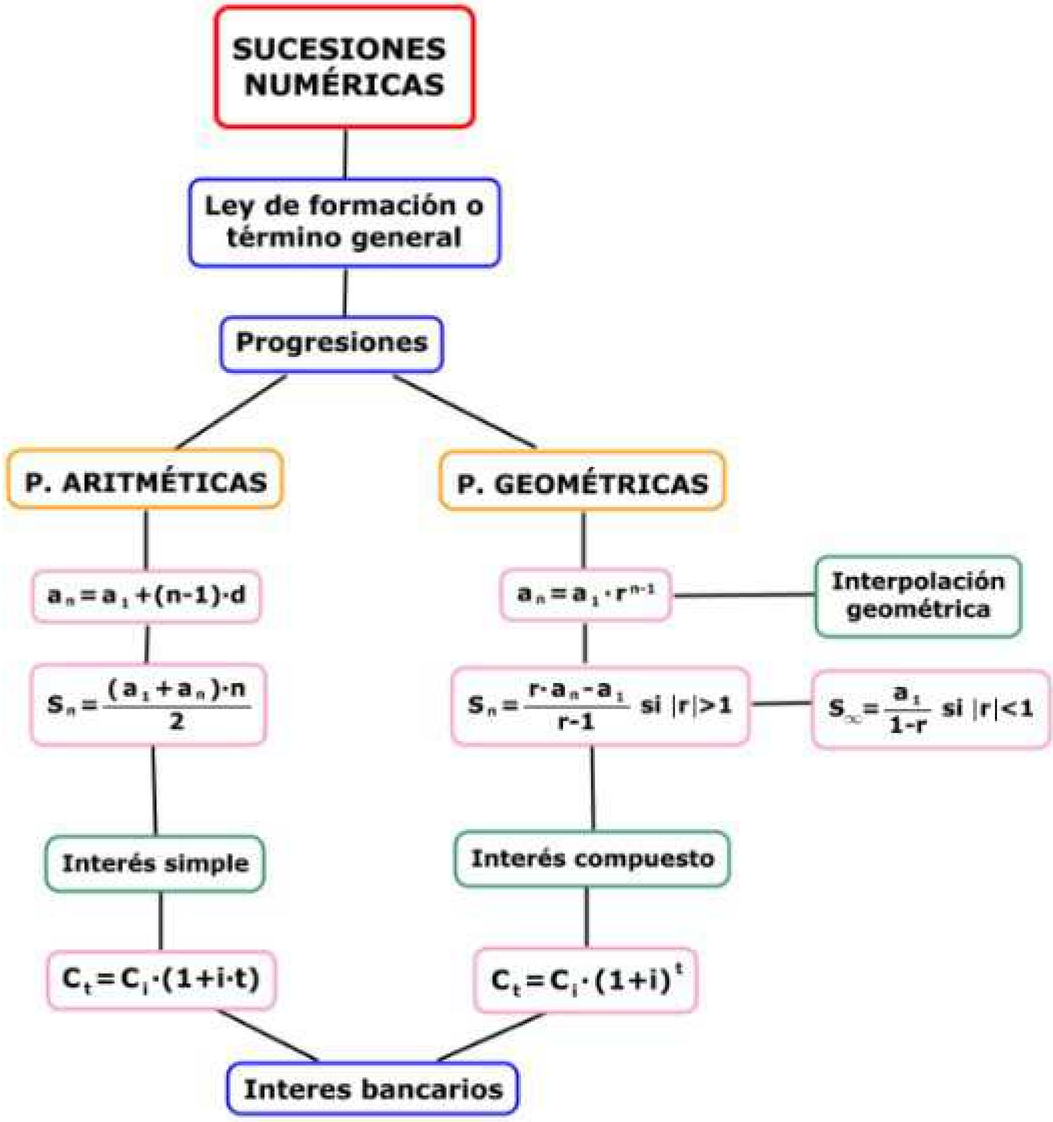
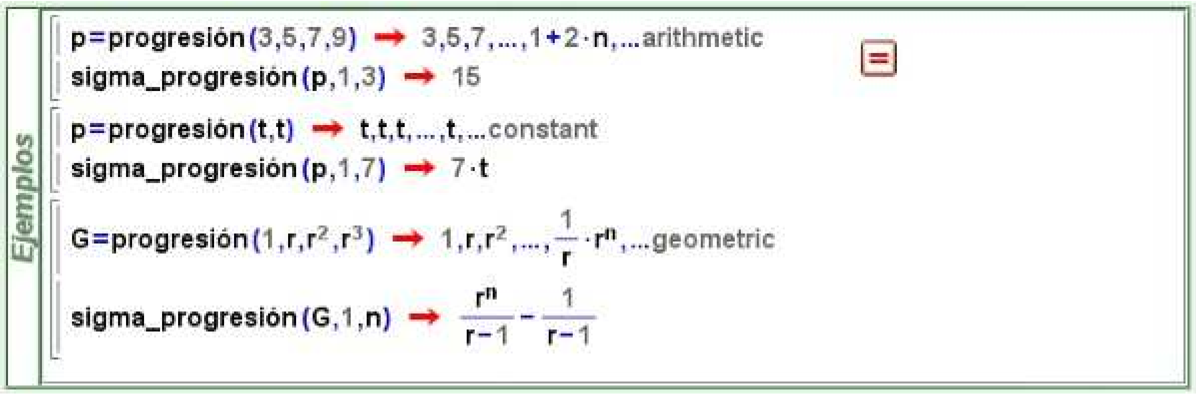


Imagen de elaboración propia

Existen multitud de herramientas informáticas que nos facilitan los cálculos y operaciones con las sucesiones.

La calculadora en línea Wiris dispone de varios comandos para trabajar con las progresiones aitméticas y geométricas. Por ejemplo, existe una función que detecta el tipo de progresión que corresponde a una secuencia de números. Para ver todas las posibilidades que ofrece Wiris relacionadas con las sucesiones, haz clic en la siguiente imagen:



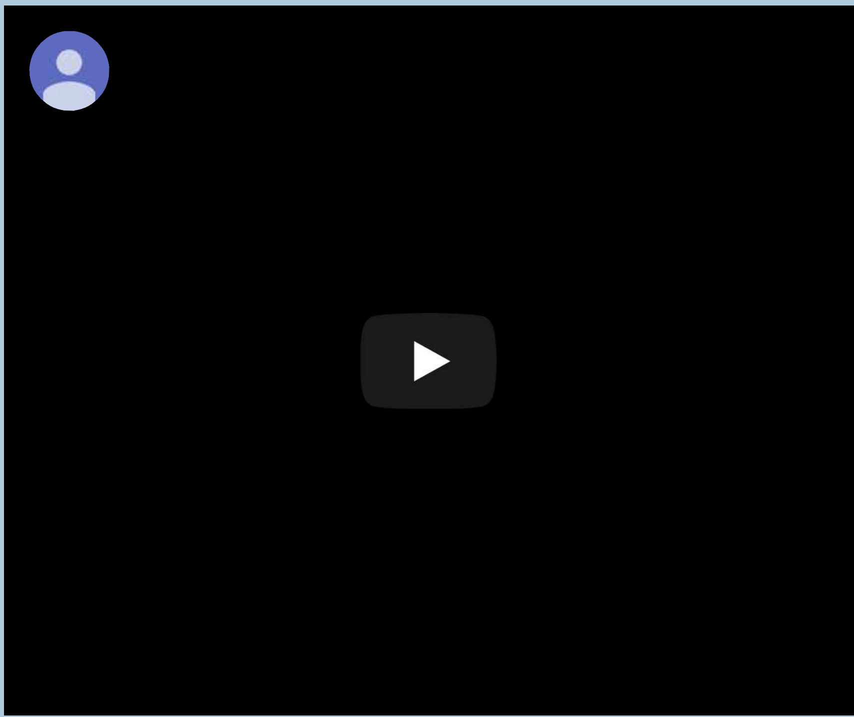
Las hojas de cálculo son también unas herramientas muy potentes y cómodas para trabajar con las progresiones. En la siguiente presentación puedes ver algunas aplicaciones de ellas.

Por último, en internet existen multitud de páginas que contienen calculadoras de intereses en línea. Si haces clic en la siguiente imagen puedes acceder a una de ellas:

Como puedes observar, incluyen una opción para deducir los impuestos a los intereses recibidos, cuestión esta que no hemos contemplado en los contenidos desarrollados, pero que en la realidad no hay que olvidar.

Curiosidad

Comenzábamos el tema hablando de Fibonacci, estaría bien acabarlo disfrutando de un vídeo donde se expone con belleza la magía de la sucesión por él descubierta.



Curiosidad

Además de estar presente en la naturaleza, las sucesiones numéricas dan mucho juego, nunca mejor dicho, a la hora de resolver pasatiempos. Si haces clic en la siguiente imagen puedes ir a una entrada del blog del grupo Alquerque dedicada a juegos numéricos.

Captura de pantalla del blog del grupo Alquerque

Curiosidad

Para terminar las curiosidades, ¿te acuerdas de Sissa Ben Dahir, el supuesto inventor del ajedrez? Aún tenemos pendiente saber si el rey le pudo pagar o no los granos de trigo que le correspondían.

Ya vimos que la suma total de granos de trigo ascendía a $1{,}844 \cdot 10^{19}$. Si consideramos que 1000 granos de trigo pueden pesar unos 30 gramos, entonces un grano pesaría 0,03 gramos.

Por tanto, $1{,}844 \cdot 10^{19} \cdot 0{,}03 = 5{,}433 \cdot 10^{17}$ gramos, que significan $5{,}433 \cdot 10^{11}$ toneladas de trigo, y expresado en millones de toneladas, son $5{,}433 \cdot 10^{5}$.

Las produccion mundial de trigo para la cosecha 2012/13 es de 651,42 millones de toneladas.

Realizando una simple división, tenemos que 543.300:651,42 = 834,02 cosechas mundiales.

Es decir, harían falta **834 años de producción mundial de trigo** actuales, para que el rey pagara su deuda a Sissa.

Seguro que el monarca no sabía nada de progresiones.

Para saber más

La siguiente presentación resumen con claridad y brevedad los aspectos más importantes relacionados con las progresiones.

Para saber más

Esta otra presentación profundiza un poco más en los tipos de interés.

Para saber más

Terminamos con una relación de enlaces con los que podrás repasar y ampliar muchos de los contenidos tratados en el tema:

- Sucesiones.
- Progresiones aritméticas.
- Progresiones geométricas.
- Interés simple y compuesto.

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación (en adelante Consejería de Educación**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio web.

Imagen corporativa. Todas las marcas, logotipos o signos distintivos de cualquier clase, relacionados con la imagen corporativa de la Consejería de Educación que ofrece el contenido, son propiedad de la misma y se distribuyen de forma particular según las especificaciones propias establecidas por la normativa existente al efecto.