

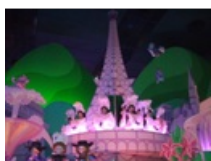
Ordenamos y mejoramos la información: En Matemáticas también existen las desigualdades.



Hagamos un breve descanso de tablas, grafos, filas y columnas, para volver a recordarte que en Matemáticas, igual que en la vida misma, también existen las desigualdades.

En este caso, no se trata de desigualdad de género, de oportunidades, raza o religión, sino de aquello que en cursos anteriores estudiaste; donde en vez del signo igual, utilizabas el menor, mayor, menor igual o mayor igual.

A lo mejor te preguntas el porqué ahora recordar todo esto, pero a lo largo de este tema y del siguiente, comprenderás la importancia que tienen las desigualdades, y concretamente las inecuaciones, para que nuestros amigos de TRANS VELOX, consigan que su empresa funcione mejor y consigan (optimicen) mejores resultados.



Curiosidad

Hoy en día el trabajar con inecuaciones es muy común dentro de las empresas que se dedican sobre todo a la producción.

El estudio de técnicas de producción utilizando inecuaciones ha tenido un gran desarrollo a lo largo del siglo XX, debido principalmente a la demanda que había en la sociedad.

Nuestra empresa TRANS VELOX, ha invertido y dedicado un gran esfuerzo en utilizar métodos matemáticos que le garanticen tomar decisiones óptimas para aumentar sus beneficios y mejorar su oferta de calidad del servicio que presta.

1. Empecemos con una incógnita



Fotografía en Flickr de Quenerapú bajo licencia Creative Commons

Antes de meternos de lleno con las inecuaciones, deberíamos recordar algunas propiedades importantes de las desigualdades.

Ten en cuenta que el conjunto de los números reales es ordenado y esto nos permite establecer un criterio para decidir cuando un número es mayor que otro.

Aunque en la imagen de la izquierda parece que no se cumple ya que cajas con número distinto de bombones, caja de 30 y caja de 24, tienen el mismo precio, 6,49 €. (El cartel de la mitad, corresponde a otro producto).

Ejercicio resuelto

¿Te acuerdas de Luisa y Pedro?, nuestros amigos de TRANS VELOX.

Tenemos los siguientes datos de ellos:

- Luisa tiene 50 años y Pedro tiene 40 años.
- En el mes de mayo, Luisa ha ganado 1200 € y Pedro 1000 €.
- En el mes de abril, debido a la inactividad que se produce por la Semana Santa y la feria, el índice de productividad de Luisa fue de -3 y de Pedro -5.

Con estos datos responde a las siguientes cuestiones:

a) Dentro de 5 años, ¿quién tendrá más años?

a) Como habrás comprobado, la respuesta es muy sencilla, y esto es debido a una propiedad de las desigualdades, donde se cumple que si a un número menor que otro se le suma el mismo número, se sigue manteniendo esa desigualdad. Es decir: $40 < 50 \rightarrow 40+5 < 50+5$, ya que $45 < 55$

b) Juan el gerente, les ha prometido que en junio duplicaran su sueldo. ¿Quién ganará más?

b) Por lógica, Luisa seguirá ganando más que Pedro. Esto es debido a una propiedad de las desigualdades, donde se cumple que si en una desigualdad, multiplicamos los dos miembros por un mismo número positivo, en este caso 2, la desigualdad se mantiene.

Es decir: $1200 > 1000 \rightarrow 1200 \cdot 2 > 1000 \cdot 2$, ya que $2400 > 2000$.

c) Luisa le dice a Pedro que para junio el índice de productividad hay que multiplicarlo por -2, lo cual hace que Pedro se ponga muy contento. ¿Por qué?

c) Pedro se pone muy contento porque se acuerda de que había una propiedad de las desigualdades que tenía truco, es decir, que si multiplicabas ambos miembros de una desigualdad por el mismo número menor que cero, el signo de la desigualdad cambiaba.

En este caso, si en un principio Luisa ganaba a Pedro, al mes siguiente iba a ser al revés.

Es decir: $-3 > -5 \rightarrow (-3) \cdot (-2) < (-5) \cdot (-2)$, ya que $6 < 10$.

Importante

Propiedades de las desigualdades:

Sean a, b y c tres números reales.

- 1) Si $a < b$, entonces $a+c < b+c$ para cualquier número c.
- 2) Si $a < b$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$ para cualquier número $c > 0$.

3) Si $a < b$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$ para cualquier número $c < 0$.

Las desigualdades **no** se comportan igual que las igualdades cuando multiplicamos ambos términos por un mismo número.

Curiosidad

Uno de los casos claros de desigualdad es el que se refiere al precio de la gasolina y el gasoil.

Y también existe mucha desigualdad, dependiendo del país donde estemos.



Fotografía en Flickr de Oneras bajo licencia Creative Commons

Comprueba lo aprendido

Contesta Verdadero o Falso:

Si $x \geq -2$, entonces $x - 5 \leq -7$


 [Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

Si sumamos un número a ambos lados, la desigualdad no tenía que variar.

Si $x > 3$, entonces $-5x < -15$


 [Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Si multiplicamos ambos lados de la desigualdad por un número menor que cero, el signo de la desigualdad cambia.

Si $3 \leq x \leq 4$, entonces $x \geq -1$

 [Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Sumamos -3, la desigualdad se mantiene: $-x \leq 1$. Multiplicamos por -1, la desigualdad cambia: $x \geq -1$.



1.1. Veamos cómo podemos representar la solución



Fotografía en Flickr de Gonzopowers bajo licencia Creative Commons

Seguramente, estarás acostumbrado o acostumbrada a utilizar las Matemáticas en un montón de situaciones que se presentan en el día a día, aunque no seas consciente de ello, y en muchos casos estarás resolviendo ecuaciones.

Te cuento lo que le pasó a Pedro, ¿te acuerdas?, el Director de Personal de TRANS VELOX.

Los fines de semana, coge su moto, que por cierto, ¡vaya moto!, y se para a echarle gasolina. El sábado pasado se miró el bolsillo y sólo tenía 10 € y el litro valía 1,25 €, ¿cuántos litros pudo echarle?

Después, le entró hambre y fue a comprar a una tienda 1/4 de mortadela; en el mostrador ponía que el Kg valía 5,70 €, y le quedaba sólo 1 €, ¿cuántos gramos pudo pedir?

En definitiva, muchas veces tienes que resolver ecuaciones de primer grado en las que obtienes una única solución.

Además, recuerda que para representar esta solución, en Matemáticas, tienes que dibujar un punto sobre la recta numérica.

Ejercicio resuelto

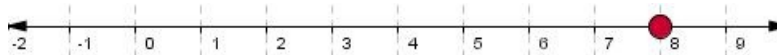
En el problema de la gasolina, si llamamos x al número de litros que puedes echar con 10 €, ¿qué ecuación de primer grado puedes plantear?

Resuélvela y representa la solución en la recta numérica.

Tenemos que $1,25 \cdot x = 10$, despejamos x y obtenemos $x = 10/1,25 = 8$.

Podemos echar 8 litros de gasolina.

La representación de la solución sería:



Como te habrás dado cuenta, no siempre tenemos que resolver ecuaciones, es decir, expresiones donde aparezcan igualdades, sino que la mayoría de las veces, lo que aparecen son desigualdades, y entonces tenemos que hablar de inecuaciones.

Si con la moto queremos gastar como mucho 10 €, estamos diciendo que queremos saber cuántos litros podemos echar como mucho, es decir:

Si x es el número de litros máximo que podemos echar, tendríamos que $1,25 \cdot x \leq 10$, y despejando x , tenemos que $x \leq 8$, es decir, tenemos que echar 8 litros o menos de 8.

Como en este caso, x no puede ser negativo, la solución la escribiríamos utilizando el siguiente intervalo $[0,8]$, es decir, x está en ese intervalo.

Recuerda: Un **intervalo** es un subconjunto conexo de la recta real definido por sus extremos a y b . Según éstos pertenezcan o no al intervalo hablaremos respectivamente de intervalo cerrado $[a,b]$, intervalo abierto (a,b) , e intervalo semiabierto $[a,b)$ ó $(a,b]$.

Importante

Para resolver una inecuación, es decir, una desigualdad donde aparece una incógnita, tienes que encontrar todos los valores de la incógnita que verifican la desigualdad.

Ejercicio resuelto

Resuelve la siguiente inecuación y representa la solución obtenida:

$$-2(x-3) \geq 18$$

Primero operamos para quitar el paréntesis.

$$-2x+6 \geq 18.$$

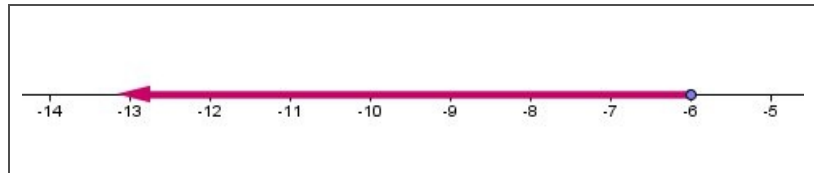
Sumamos -6 a ambos miembros y la desigualdad no varía.

$$-2x \geq 12.$$

Dividimos ambos miembros por -2, la desigualdad cambia de sentido.

$$x \leq -6.$$

El conjunto de soluciones de la inecuación es $(-\infty, -6]$ y su representación gráfica es:



En la siguientes imágenes creadas por [Mª José García Cebrián](#), y alojada en su página web, podéis ver en una de ellas un resumen sobre inecuaciones y en la siguiente cuatro ejemplos de resolución de inecuaciones de primer grado resueltos.

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas. Las soluciones de una inecuación suelen ser intervalos de números reales.

Una *inecuación de primer grado con una incógnita* es una inecuación que se puede transformar en otra equivalente de una de las formas:

Inecuaciones de primer grado

$$\begin{array}{ll} ax < b & ax \leq b \\ ax > b & ax \geq b \end{array}$$

Para resolver una inecuación de primer grado con una incógnita:

Operamos en ambos miembros, suprimiendo paréntesis y eliminando denominadores, si los hubiera.

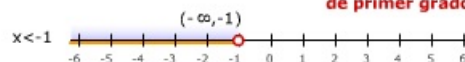
Trasponemos términos, lo que contengan la incógnita en un miembro y los términos independientes al otro.

Reducimos términos semejantes.

Despejamos la incógnita, teniendo en cuenta que si hay que multiplicar por un nº negativo la desigualdad cambia de sentido.

$$5(x-2) < 3(x-3) - 3$$

$$\begin{array}{l} 5x - 10 < 3x - 9 - 3 \\ 5x - 10 < 3x - 12 \\ 5x - 3x < -12 + 10 \\ 2x < -2 \quad x < -1 \end{array}$$



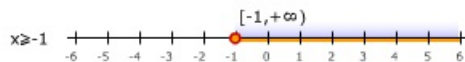
$$\frac{x+5}{4} < \frac{x+3}{3}$$

$$\begin{array}{l} 3(x+5) < 4(x+3) \\ 3x + 15 < 4x + 12 \\ 3x - 4x < 12 - 15 \\ -x < -3 \quad x > 3 \end{array}$$



$$2(2-x) \geq 3(1-x)$$

$$\begin{array}{l} 4 - 2x \geq 3 - 3x \\ -2x + 3x \geq 3 - 4 \\ x \geq -1 \end{array}$$



$$2(x-1) \geq 4x+8$$

$$\begin{array}{l} 2x - 2 \geq 4x + 8 \\ 2x - 4x \geq 2 + 8 \\ -2x \geq 10 \\ x \leq -5 \end{array}$$



Comprueba lo aprendido



Fotografía en Flickr de LordFerguson bajo licencia Creative Commons

Tenemos la siguiente inecuación:

$$1 - \frac{x-5}{2} \geq 3x$$

¿Cuáles de los siguientes valores son solución de esa inecuación?

☐ $x=0$

☐ $x=3$

☐ $x=-2$

☐ $x=1/2$

Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto
4. Correcto

¿Cuáles de las siguientes inecuaciones, tienen como solución la siguiente representación gráfica?



☐ $2x+1 \geq 3$

☐ $3(x+2) \geq 0$

☐ $2(x+5) \geq 2-2x$

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Correcto

Comprueba lo aprendido

¿Cuál es el conjunto de soluciones de la siguiente inecuación?

$$2x+3 \leq 5x$$

☐ $x=1$

☐ $[1, +\infty)$

☐ $(-\infty, 1]$

Inténtalo otra vez.

Muy bien.

Inténtalo otra vez.

Solución

1. [Incorrecto](#) ([Retroalimentación](#))
2. [Opción correcta](#) ([Retroalimentación](#))
3. [Incorrecto](#) ([Retroalimentación](#))

1.2. ¿Qué ocurre si tenemos varias inecuaciones?

Hasta ahora, habrás comprobado, y seguramente recordado, que esto de las inecuaciones no tiene mucha dificultad.

Hemos visto que fácilmente se nos presentan inecuaciones en situaciones cotidianas, pero lo más común es que se presenten varias en una misma situación, es decir, que en vez de una, tengamos un sistema de inecuaciones.

Por ejemplo, Pedro sólo tenía 10 € para gasolina, pero es que en esa gasolinera, lo mínimo que surtía era 2 litros, con lo cual ya aparecen dos desigualdades.

Quiere comprar mortadela, pero como mínimo tiene que pedir 100 gramos.

Y, de la misma forma que pasa con los sistemas de ecuaciones, puedes encontrarte con situaciones donde no hay solución. Imagina que lo mínimo que despacha la tienda es 1/4 y sólo tienes 1 €, como el Kg cuesta 5,70 €, no hay solución posible.



Fotografía en Flickr de marcp_dmoz bajo licencia Creative Commons

Ejercicio resuelto

Escribe las dos inecuaciones que representan el problema de la gasolina, que acabamos de mencionar.

¿Cuál será la solución?

Recuerda que el litro costaba 1,25 €.

Si x es el número de litros máximo que podemos echar, tenemos por un lado que $1,25 \cdot x \leq 10$, y como el número mínimo de litros es 2, tenemos que $x \geq 2$.

Es decir, tenemos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 1,25x \leq 10 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Despejando x en la primera inecuación, tenemos que $x \leq 8$, y de la segunda tenemos que $x \geq 2$.

Representamos las dos soluciones en la recta numérica, obteniendo lo siguiente:



En rojo hemos pintado las soluciones de cada inecuación y en verde la solución del sistema.

Como puedes ver, la solución es $[2, 8]$.

Importante

Resolver un sistema de inecuaciones es buscar soluciones que cumplan **todas** las inecuaciones del sistema.

En la siguientes imágenes creadas por M^a José García Cebrán, y alojadas en su página web, podéis ver en una de ellas, un resumen sobre inecuaciones y en la siguiente la resolución de un sistema de inecuaciones de primer grado.

Un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita es un conjunto de inecuaciones de primer grado todas con la misma incógnita.

Sistemas de inecuaciones con una incógnita

La solución de un sistema de inecuaciones es la intersección de las soluciones de cada inecuación. Cada inecuación tendrá su solución pero es posible que el sistema no tenga, al no existir números que sean a la vez solución de todas las inecuaciones.

Para resolver un sistema de inecuaciones:
Se resuelve cada inecuación por separado.
Se representan las soluciones y se buscan las soluciones comunes.

Resolver el sistema:

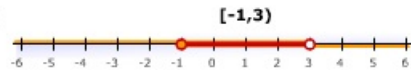
$$\begin{array}{l} \frac{x-1}{2} + 2x \geq x-2 \\ x-2(x-3) < 3(4-x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-1+4x \geq 2x-4 \\ x+4x-2x \geq -4+1 \\ 3x \geq -3 \end{array}$$

$$x \geq -1$$

$$\begin{array}{l} x-2x+6 < 12-3x \\ x-2x+3x < 12-6 \\ 2x < 6 \end{array}$$

$$x < 3$$



La solución de un sistema de inecuaciones es la intersección de las soluciones de cada inecuación.

Ejercicio resuelto

Vamos a resolver los siguientes sistemas de inecuaciones

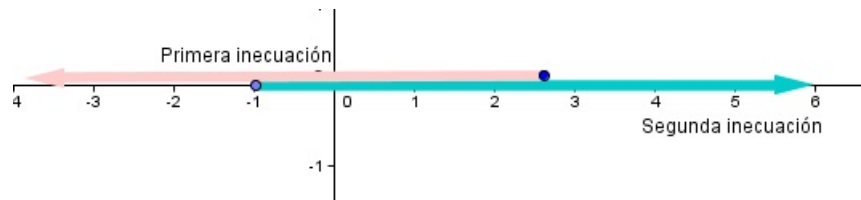
a) $\begin{cases} 4x-6 \leq x+2 \\ 2+3x \geq x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+\frac{1}{5} < 3 \\ x < \frac{4-2x}{5} \end{cases}$

a)

	Primera inecuación: $4x - 6 \leq x + 2$	Segunda inecuación $2 + 3x \geq x$
Pasamos las incógnitas a un lado y los números a otro	$4x - x \leq 2 + 6$	$3x - x \geq -2$
Sumamos o restamos los términos	$3x \leq 8$	$2x \geq -2$
Despejamos X:	$x \leq 8/3$	$x \geq -2/2 \rightarrow x \geq -1$

Si representamos gráficamente las dos soluciones, obtenemos:

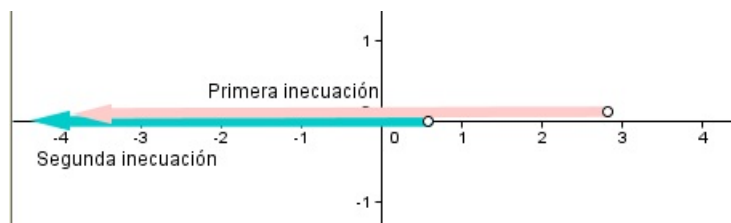


Luego la solución es el intervalo $[-1, 8/3]$

b) Hacemos lo mismo con el segundo sistema:

	Primera inecuación: $x + \frac{1}{5} < 3$	Segunda inecuación: $x < \frac{4-2x}{5}$
Eliminamos denominadores reduciendo a común denominador	$5x + 1 < 15$	$\frac{5x}{5} < \frac{4-2x}{5}$
Pasamos las incógnitas a un lado y los números a otro	$5x < 15 - 1$	$5x < 4 - 2x$
Sumamos o restamos los términos	$5x < 14$	$5x + 2x < 4$
Despejamos X:	$x < 14/5$	$7x < 4$ $x < 4/7$

Gráficamente:



Por tanto, la solución es $(-\infty, 4/7)$.

Comprueba lo aprendido

Señala si son Verdadero o Falso, cada uno de los siguientes enunciados.

Un sistema de inecuaciones siempre tiene solución.

[Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

Puede no tener solución.

La solución del siguiente sistema $\begin{cases} 2x-4 > 0 \\ 5-x < 1 \end{cases}$ es $(2, 4)$.

[Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

La solución es $(4, +\infty)$.

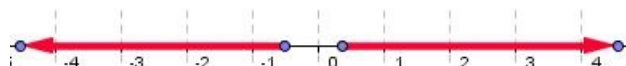
El siguiente sistema $\begin{cases} 3x-1 > 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases}$ no tiene solución.

[Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

De la primera inecuación obtenemos que $x < -1/2$ y de la segunda que $x > 1/3$.



No hay puntos en común.

2. Avancemos un poco. Ahora con dos incógnitas

Nuestro amigo Pedro el motorista, ya lo llamo amigo porque lleva acompañándonos desde principio de curso, se acordó que podía mezclar la gasolina con otro producto de más baja calidad, pero que costaba 0,5 € el litro.

Para poder resolver ahora el problema, necesita saber cuántos litros de gasolina tiene que echar de cada clase, sabiendo que como mucho se puede gastar 10 €.

Como te habrás fijado, entra en juego otra variable, el número de litros del otro producto que vamos a llamar y .

¿Cómo plantearías ahora el problema?

Teniendo en cuenta que el litro de gasolina costaba 1,25 €, escribimos la siguiente inecuación con dos incógnitas: $1,25 \cdot x + 0,5 \cdot y \leq 10$.



Fotografía en Flickr de apagada_barcelona07 bajo licencia Creative Commons

Importante

Una inecuación en el plano viene dada por una desigualdad del tipo:

- $ax + by \leq c$
- $ax + by < c$
- $ax + by \geq c$
- $ax + by > c$

y la solución corresponde a un semiplano.

Recuerda que se llama **semiplano** cada una de las dos partes en que un plano queda dividido por una recta.

La recta asociada a una inecuación resulta de cambiar el símbolo de desigualdad por el de igualdad, $ax+by=c$.

Si representamos la recta $ax+by=c=0$ en el plano, ésta lo divide en dos zonas (semiplanos).

Si tomamos cualquier punto y sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la recta, tendremos siempre un resultado que será:

Positivo, para todos los puntos de uno de los lados, negativo, para los del otro lado y 0, para los puntos de la recta.

Aquí tenéis una escena hecha con Descartes por Xosé Eixó B., donde podéis comprobarlo, con la ecuación de la recta $3x-2y-3=0$.

Tenéis que mover el punto P para comprobarlo.

También puedes cambiar los controles "a", "b" y "c" para que la recta sea distinta. En cualquier caso, puedes comprobar que siempre se cumple esto que hemos visto; a un lado de la recta hay un signo, al otro lado el otro signo y sobre la recta 0.

Esta unidad interactiva requiere la máquina virtual de Java [J2RE](#).



Comprueba lo aprendido

Dada la inecuación $2x+y \leq 1$, indica si son solución los siguientes puntos del plano:

(0,0)

 [Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

$$2 \cdot 0 + 0 - 1 = -1 \leq 0$$

(-2,1)

 [Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

$$2 \cdot (-2) + 1 - 1 = -4 \leq 0$$

(2,-1)

 [Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

$$2 \cdot 2 - 1 - 1 = 2 \geq 0$$

(1/2, 1)

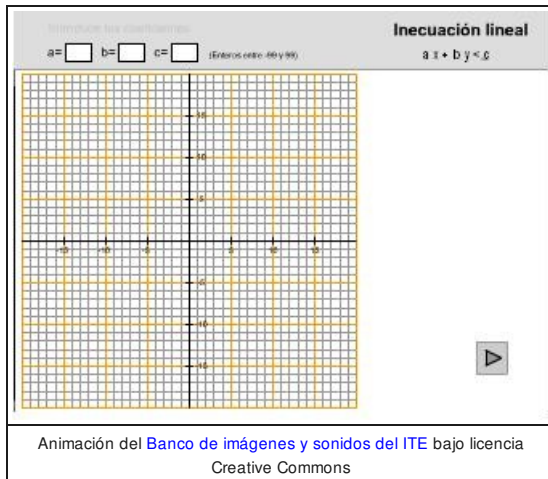
 Sugerencia

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

$$2 \cdot (1/2) + 1 - 1 = 1 \geq 0$$

2.1. Ahora nos toca jugar con los ejes de coordenadas



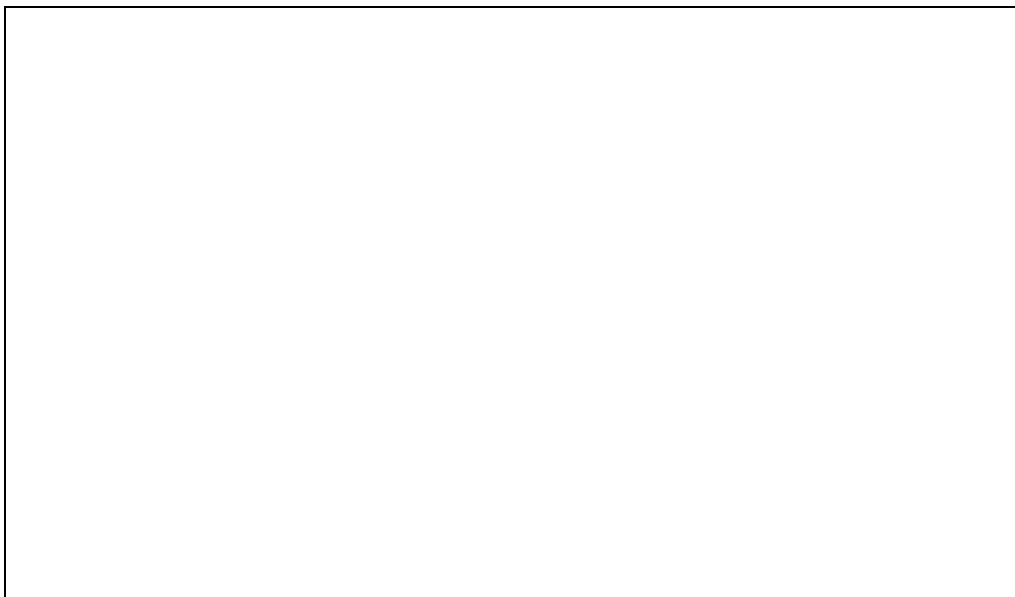
En la siguiente animación (haz clic en la imagen), puedes comprobar la representación gráfica de la solución de una inecuación con dos incógnitas.

Prueba escribiendo $a=1.25$, $b=0.5$ y $c=10$, para ver la solución a la inecuación que escribimos en el problema de la mezcla de gasolina con otro producto para la moto de Pedro.

En la siguiente escena, basada en una creada con Geogebra por [José Álvarez](#) y modificada, puedes ver el comportamiento de un punto sobre una recta y las posiciones relativas de dicho punto respecto a la recta.

Mueve el punto A a cada lado de la recta y sobre ella. te aparecerá un texto indicándote si A es solución de la ecuación $ax + by + c = 0$, la inecuación $ax + by + c < 0$ o la inecuación $ax + by + c > 0$.

Mueve también los deslizadores a , b y c para que varíe la recta r. Observa las posiciones relativas de dicho punto respecto de la recta.



Ejercicio resuelto

Resuelve gráficamente la inecuación $x-2y \geq -3$, utilizando la siguiente escena creada con Descartes por [Xosé Eixo](#).

Convertimos la inecuación en $x-2y+3 \geq 0$.

Representamos la recta $x-2y+3=0$.

Buscamos la zona correspondiente a la solución probando con un punto.

El más fácil es el (0,0), resultando: $0-2 \cdot 0+3=3 > 0$

Por tanto la zona es "la que contiene al (0,0)".

En la escena, para elegir la zona correspondiente, pulsa en el botón "zona" y elige "1" o "2" para cambiar de una a otra.

Observa que en este caso también se incluye la propia recta y por eso se dibuja con una línea continua. Cuando la desigualdad sea estricta, es decir, "<" o ">", la recta la dibujaremos con trazo más fino o discontinuo. En la escena, para indicar que la recta está incluida elige "SI" en el pulsador "recta". Si no está incluida elige la opción "NO"

Observa la escena. Prueba con otras rectas.

Ejercicio resuelto

Resuelve las siguientes inecuaciones utilizando la escena anterior:

a) $3x+4 \geq y$

b) $x-y < 5$

c) $-2x+3y > 0$

Sustituye las coordenadas de un punto para saber la zona.

Observa lo que aparece en la escena.

Comprueba lo aprendido

Dada la recta de ecuación $9x+2y=4$, indica dónde están cada uno de los siguientes puntos:

a) $P=(2,3)$

☐ P está en el semiplano inferior.

☐ P está en la recta r.

☐ P está en el semiplano superior.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Correcto



b) $P=(1, -5/2)$

☐ P está en el semiplano inferior.

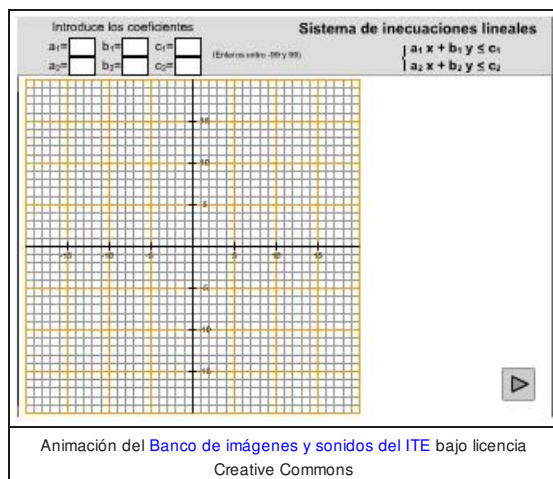
☐ P está en la recta r.

☐ P está en el semiplano superior.

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

3. De postre, qué os parece si pensamos en dos inecuaciones y dos incógnitas



En la siguiente animación (haz clic en la imagen), puedes comprobar la representación gráfica de la solución de un sistema de dos inecuaciones con dos incógnitas.

Resuelve el siguiente sistema utilizando la animación:

$$\begin{cases} x+y \leq 5 \\ 5x+y \leq 10 \end{cases}$$

Podrás comprobar como al dibujar las soluciones de ambas inecuaciones sobre los mismos ejes, obtienes una región del plano cuyos puntos verifican las dos inecuaciones a la vez.

Estos puntos son las soluciones del sistema y están en la zona que aparece con doble rayado.

Importante

El **conjunto solución** de un sistema de inecuaciones lineales se obtiene como intersección de las soluciones obtenidas para cada una de las inecuaciones que lo forman.

Al conjunto solución también se le llama **región factible**.

Ejercicio resuelto

Un sistema de dos inecuaciones con dos incógnitas puede no tener solución.

Compruébalo utilizando la animación anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x+y \leq -10 \\ x-y \leq -5 \end{cases}$$

Comprueba que no existen puntos en común entre las soluciones de cada inecuación.

En la siguiente escena basada en una creada con Geogebra por [Ignacio Larrosa](#), puedes practicar la resolución de un sistema de inecuaciones con dos incógnitas.

Moviendo los deslizadores horizontales, puedes cambiar los coeficientes de las inecuaciones y con los deslizadores verticales, puedes cambiar el signo de la desigualdad.

Reflexiona

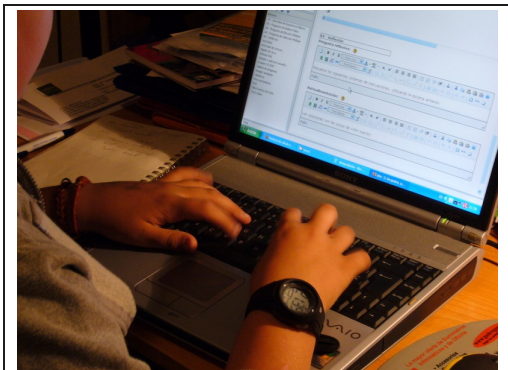
Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones, utilizando la escena anterior:

a)
$$\begin{cases} 2x+y>5 \\ 3x-y\geq 0 \end{cases}$$

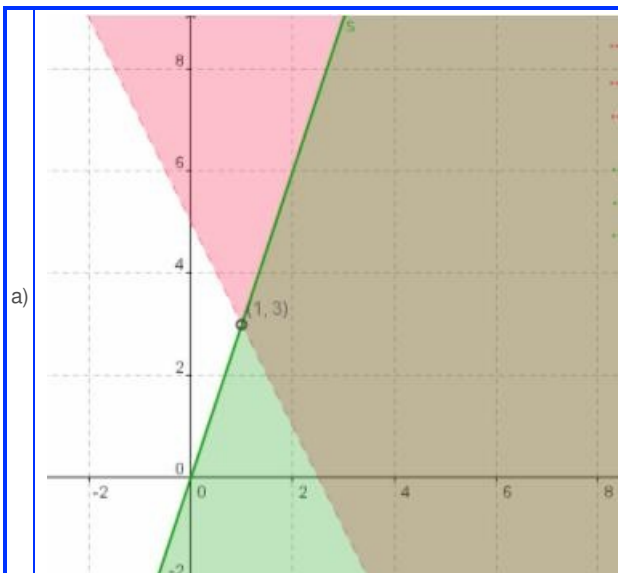
b)
$$\begin{cases} x-2y-3>0 \\ 2x-y-10\leq 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -x+4y<3 \\ 2x-3y\leq -1 \end{cases}$$

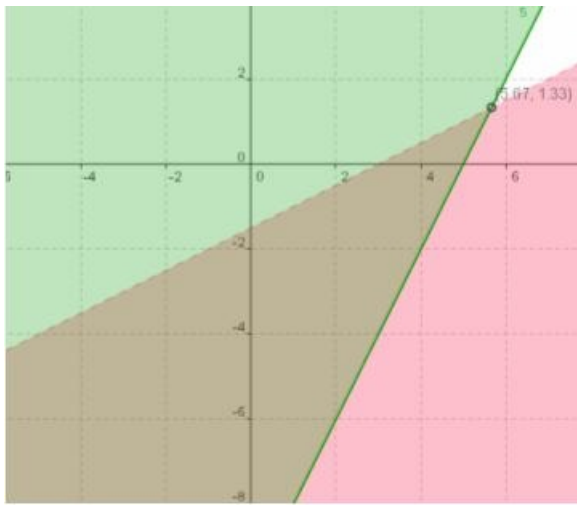
d)
$$\begin{cases} 3x-2y\leq 10 \\ x-5y\geq 0 \end{cases}$$



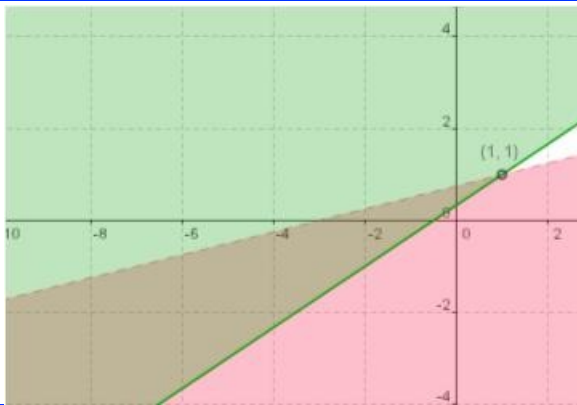
Las soluciones son las zonas de color marrón:



b)



c)



d)



3.1. Para el café, de forma relajada, sistemas con más de dos inecuaciones



Fotografía [en Flickr de Anvica](#) bajo licencia Creative Commons

Por último, veamos lo que vamos a utilizar más a menudo y que nos va a venir muy bien para el tema siguiente.

Recuerda el problema de la gasolina y de la mezcla con otro producto. Si te pones a analizar, nos aparecen más de 2 inecuaciones. Ten en cuenta que casi siempre van a aparecer las inecuaciones $x > 0$ e $y > 0$, porque algún litro tendremos que echar, y así con multitud de situaciones que te vas a encontrar.

Y como ya estamos finalizando el tema y ya que mencionamos el café en el título de este último apartado, te voy a contar lo que le pasó a Luisa, la Directora General de TRANS VELOX con un pedido de café.

Resulta que la máquina de café se había quedado sin producto y un amigo de Luisa, le comentó que él hacía una mezcla de café muy bueno con café natural a 6 € el kg y con torrefacto a 3 € el Kg, y que en ese momento le quedaban en el almacén 400 kg de natural y 300 kg de torrefacto. Luisa le dijo, que no podía pagar más de 4 € el kg. ¿Cómo pudo hacer la mezcla el amigo de Luisa?

Ejercicio resuelto

Plantea el sistema de inecuaciones para ayudar al amigo de Luisa y escribe una posible solución.

Si llamamos x al número de kg de café natural e y al número de kg de café torrefacto, tenemos las siguientes inecuaciones:

1º) Si no puede superar la mezcla los 4 € el kg, tenemos $6x + 3y \leq 4(x + y)$, es decir, operando y despejando, $2x - y \leq 0$.

2º) Como mucho tenemos 400 kg de natural, es decir, $x \leq 400$.

3º) Tenemos como mucho 300 kg de torrefacto, es decir, $y \leq 300$.

El sistema que nos queda es:

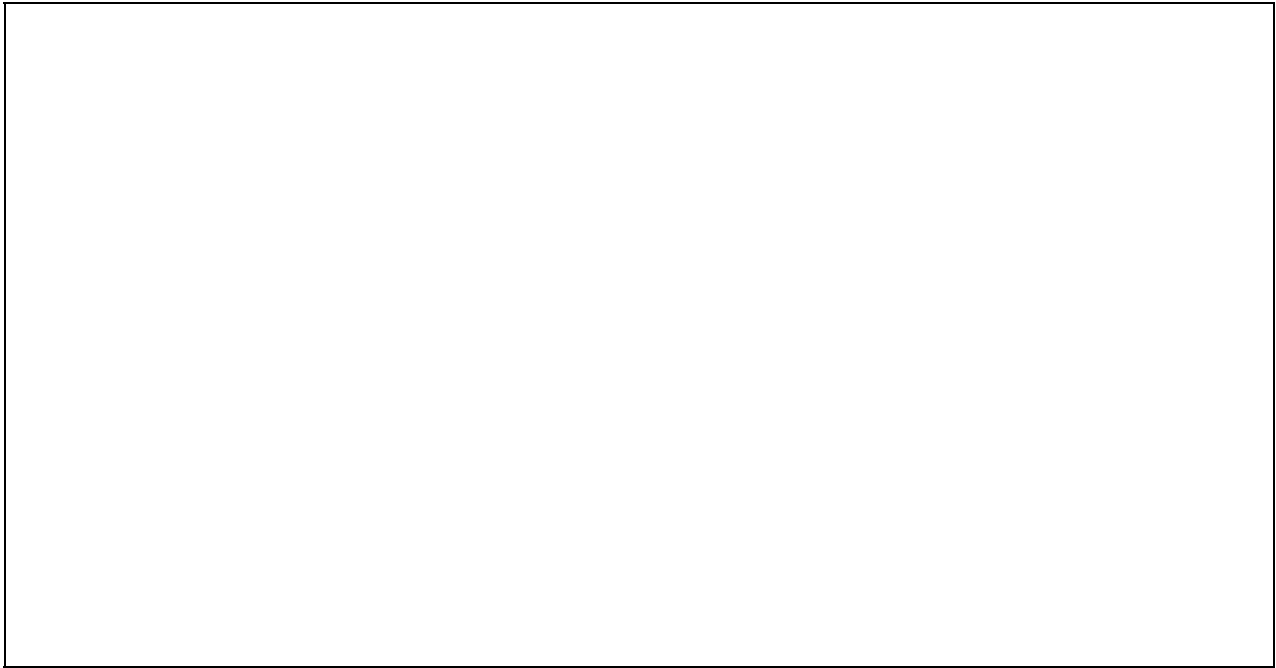
$$\begin{cases} 2x - y \leq 0 \\ x \leq 400 \\ y \leq 300 \end{cases}$$

Una posible solución, que verifica las tres inecuaciones sería $x=50$, $y=250$.

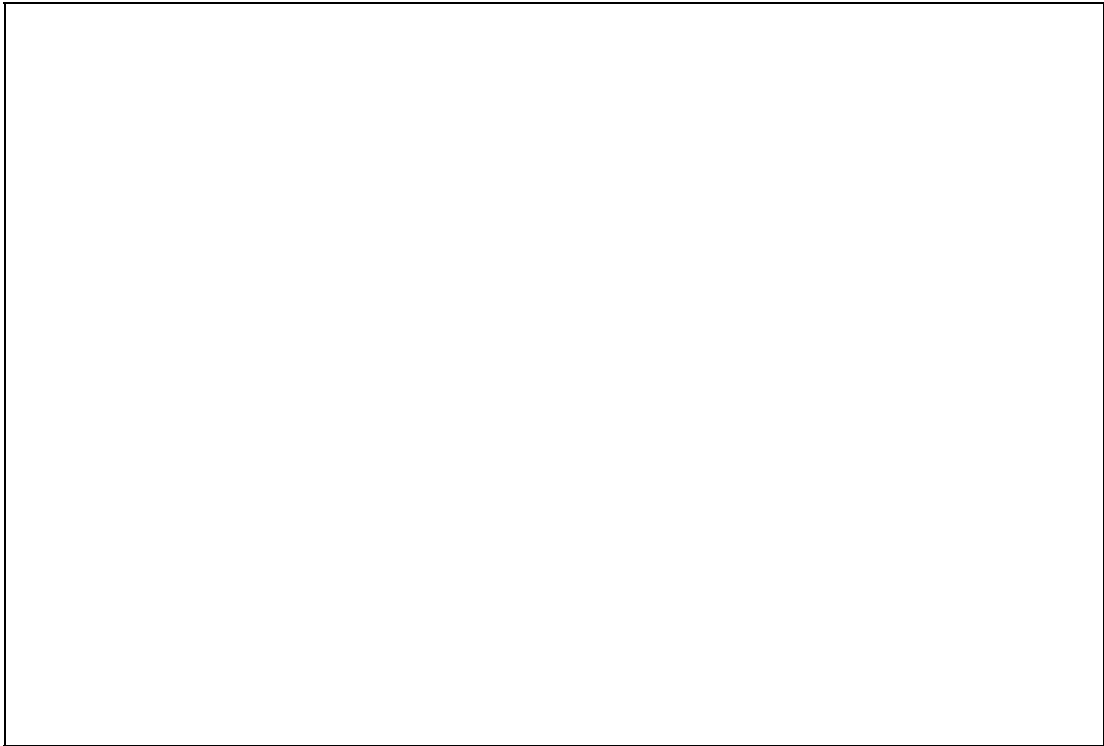
Puedes ver todas las soluciones en la siguiente escena creada con Geogebra.

Solución al problema del café realizada con Geogebra.

Desplaza el punto A para ver las posibles soluciones.



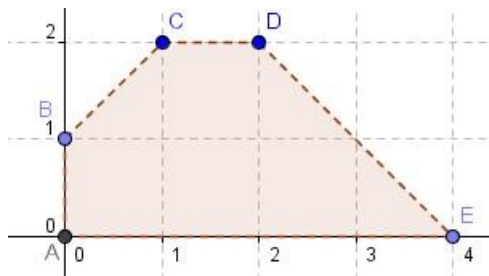
En la siguiente escena creada con Geogebra por José Álvarez, puedes ver cómo se resuelven sistemas con más de dos inecuaciones, con dos incógnitas.



Comprueba lo aprendido

Completa los espacios en blanco con los signos de menor ($<$) o mayor ($>$), según corresponda para que un punto que esté dentro de la región factible, verifique cada inecuación.

Región factible:



La inecuación asociada a la recta que pasa por B y C es $x - y \square -1$.

La inecuación asociada a la recta que pasa por C y D es $y \square 2$.

La inecuación asociada a la recta que pasa por D y E es $x + y \square 4$.

Enviar

La recta es $x - y = -1$ y si tomo el punto $(1,1)$, tenemos $1 - 1 > -1$. Solución: $x - y > -1$.

La recta es $y = 2$ y si tomo el punto $(1,1)$, tenemos $1 < 2$. Solución: $y < 2$.

La recta es $x + y = 4$ y si tomo el punto $(1,1)$, tenemos $1 + 1 < 4$. Solución: $x + y < 4$.

Para saber más

Para repasar todo lo visto en el tema aquí tienes una Web donde puedes ver los siguientes contenidos:

a) Inecuaciones de primer grado con una incógnita (haz clic en la imagen).

1. Inecuaciones de 1^{er} grado con una incógnita

Una **desigualdad** es cualquier expresión en la que se utilice alguno de los siguientes símbolos:

- $<$ (menor que)
- $>$ (mayor que)
- \leq (menor o igual que)
- \geq (mayor o igual que)

Por ejemplo:

$2 < 3$ dos es menor que 3

$7 > \pi$ siete es mayor que pi

$x \leq 5$ x es menor o igual que 5

Definiciones

Una inecuación es una **desigualdad** entre expresiones algebraicas. Aquí estudiamos sólo las de primer grado.

Una **inecuación de primer grado** es una inecuación en la que sus dos miembros son polinomios de grado menor o igual a 1.

Las **soluciones** de una inecuación son todos los números reales que hacen que dicha inecuación sea cierta.

b) Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas (haz clic en la imagen).

3. Inecuaciones de 1^{er} grado con dos incógnitas

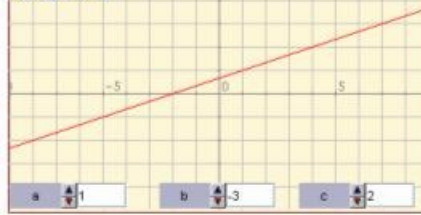
RECUERDA:

$$ax + by + c = 0$$

es la **ecuación general de una recta** en el plano.

Usaremos este hecho para resolver las inecuaciones de primer grado con dos variables. Ahora practica un poco con esta escena para recordar la relación entre los coeficientes de la ecuación y su gráfica.

$$x - 3y + 2 = 0$$



Definiciones

Una **inecuación de primer grado con dos incógnitas** es cualquier inecuación equivalente a alguna de éstas:

$$ax + by + c < 0$$

$$ax + by + c \leq 0$$

$$ax + by + c > 0$$

$$ax + by + c \geq 0$$

En este caso, las soluciones no son conjuntos de números, sino conjuntos de parejas de números, por lo que no pueden representarse sobre una línea recta: deben representarse como subconjuntos del plano.

c) Problemas con inecuaciones (haz clic en la imagen).

4. Problemas con inecuaciones

PROBLEMA INICIAL

Un vinatero dispone en su almacén de dos tipos de vino: uno a 4€/l y otro a 7€/l. Quiere mezclarlos para llenar un tonel de 500 litros y quiere que la mezcla cueste entre 5 y 6 €/l. Averigua entre qué valores debe estar la cantidad de litros del primer tipo de vino para que el precio final de la mezcla esté en el intervalo deseado.

ASIGNACIÓN DE VARIABLES:

x = nº de litros del primer tipo
 $500 - x$ = nº de litros del segundo tipo

PLANTEAMIENTO:

$$4x + 7(500 - x) \geq 5 \cdot 500$$

$$4x + 7(500 - x) \leq 6 \cdot 500$$

RESOLUCIÓN: (distinta de inec. de grado 1 con una variable)

$$4x + 3500 - 7x \geq 2500 \Rightarrow -3x \geq -1000 \Rightarrow x \leq \frac{1000}{3} = 333,3...$$

$$4x + 3500 - 7x \leq 3000 \Rightarrow -3x \leq -500 \Rightarrow x \geq \frac{500}{3} = 166,6...$$

SOLUCIÓN:

x puede tomar cualquier valor entre 167 y 333 litros.

Pulsa la flecha para comprobar los resultados.



Planteamiento y resolución

Para resolver un problema con inecuaciones debemos seguir los siguientes pasos:

1. **Asignación de variables:** poner nombre a los términos desconocidos.
2. **Planteamiento:** establecer relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos, planteando una o varias inecuaciones (de primero o de segundo grado, con una o con varias incógnitas).
3. **Resolución:** de entre los métodos explicados aplicar el que se ajuste a nuestro planteamiento.

En la escena seguimos este esquema para resolver el problema planteado al principio. En el botón de abajo encontrarás problemas diversos para resolver en tu cuaderno.

Pulsa sobre el botón para hacer unos ejercicios



inicio



En el próximo tema tendrás la oportunidad de comprobar que las inecuaciones con dos incógnitas son mucho más útiles de lo que parecen, y que el problema no se reduce únicamente a representar la región factible. Por eso, en esta ocasión, te planteamos un apartado de un ejercicio de programación lineal que apareció en el examen de junio del 2010.

Ejercicio resuelto

Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes

$$x + y \leq 15; x \leq 2y; 0 \leq y \leq 6; x \geq 0$$

Represente gráficamente dicho recinto.

Las inecuaciones :

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Nos indican que la región se encuentra en el primer cuadrante. Observa que para representar las inecuaciones, primero hay que representar la ecuación y luego elegir la región del plano adecuada.

