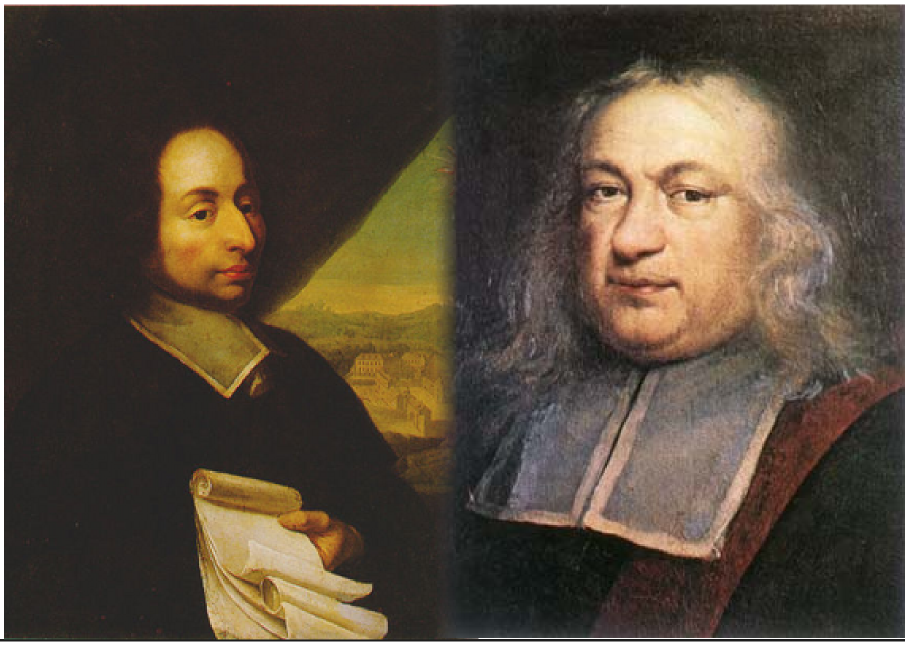
2º de Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

Cálculo de probabilidades: Probabilidades compuestas

1. Introducción



Blaise Pascal y Pierre de Fermat en Wikimedia Commons

Una de las ramas de la matemática más novedosas es la teoría de probabilidades, que estudia las probabilidades asociadas a sucesos aleatorios. Es posiblemente el área de las matemáticas que tiene una aplicación más directa y un efecto más importante en nuestra vida cotidiana.

El origen del cálculo de probabilidades está relacionado con la práctica de los juegos de azar.

Los antecedentes de la teoría de la probabilidad aparecen en la correspondencia entre nuestro príncipe de la matemáticas Pierre de Fermat y Blaise Pascal. Esta correspondencia comienza cuando en 1654, Antoine Gambod, conocido como Caballero de Méré planteó a Pascal el problema de cómo repartir la apuesta realizada en un juego de azar cuando éste se ve interrumpido por algún motivo y, en ese momento, uno de los jugadores lleva ventaja sobre el otro.

Este es el problema: Dos jugadores, que han depositado una apuesta inicial, lanzan repetidamente una moneda, el primero gana si sale cara y el segundo si sale cruz. Han decidido que el primero que gane **seis veces** (consecutivas o no) se llevará el total de la apuesta. En un momento dado han salido (en cualquier orden) cinco caras y tres cruces y el juego debe ser interrumpido. ¿Cómo deben repartirse la apuesta?

En la siguiente escena puedes ver la solución a este problema:

Podríamos llamar al estudio de las probabilidades como: las matemáticas de la incertidumbre. El primer libro sobre probabilidades fue escrito por Jakob Bernoulli en 1713 y se titulaba *Ars Conjectandi* (Arte de la conjetura). Bernoulli explicaba en su libro; "Definimos el arte de la conjetura como el arte de evaluar lo más exactamente posible las probabilidades de las cosas, de modo que en nuestros juicios y acciones podamos siempre basarnos en lo que se ha encontrado que es lo mejor, lo más apropiado,lo más seguro, lo más aconsejado; éste es el único objeto de la sabiduría del filósofo y la prudencia del gobernante".

Bernoulli nos indica como el estudio de las probabilidades de unos sucesos en un experimento concreto nos va a ayudar en la toma de decisiones, escogiendo siempre la más adecuada, la más probable.

En los juegos de azar, el conocimiento de las probabilidades asociadas a sucesos sobre los que se puede apostar en un juego concreto, nos pueden ayudar a tomar decisiones sobre como apostar para ganar con la mayor probabilidad posible.

¿Jugamos?

Curiosidad

Uno de los juegos con más arraigo en nuestro país es, sin duda, la lotería. Y la reina entre las loterías es la lotería de navidad. La lotería de navidad puede considerarse en España como un juego tradicional, que forma parte de la cultura popular.

En la Lotería de Navidad se extraen dos bolas de cada una de un bombo distinto. El primero corresponde a todos los números que participan en el sorteo. El segundo bombo corresponde a los premios. El juego consiste en sacar al mismo tiempo una bola de cada uno de los bombos. Así se obtiene un número y su premio correspondiente. El proceso se repite hasta que no hay bolas en el bombo de los premios. Es un experimento compuesto de otros dos experimentos simples.

Los orígenes de la lotería nacional que conocemos hoy se sitúan en plena Guerra de Independencia, el 18 de diciembre de 1812, aunque aún no se denominaba así. Hubo que esperar al año 1892 para que por primera vez fuera oficial la denominación Sorteo de Navidad, que se utilizó en la lista de premios. Entonces se celebraba el 23 de diciembre. En 1897 se incluyó por vez primera ese nombre en los décimos de la lotería.

Curiosidades:

En 32 veces el *gordo* ha terminado en 5, pero nunca ha sido en 25. Le sigue el 4, con 27 veces, y el 6 con 26. En esta clasificación ocupa el último puesto el 1, con solo ocho veces; el 2, con 13 y el 9 con 16.

Los números 15.640 y el 20.297 son *gordos* repetidos: el primero salió en 1956 y 1978, mientras que el segundo lo hizo en 1903 y 2006.

En cuatro ocasiones el primer premio ha correspondido a números terminados en tres cifras iguales: 25.444, 25.888, 35.999 y 55.666.

El número más bajo que ha obtenido el primer premio es el 00523, en el año 1828, mientras que el más alto fue el 78.294, en el sorteo de 2009.

Las ciudades en las que más veces ha tocado el *gordo* de la Navidad son: Madrid, en 72 ocasiones; Barcelona (37) y Sevilla (15).

2. Experimentos compuestos. Diagramas de árbol

Imagen de alvy con licencia Creative Commons

Gonzalo y Blanca están pensando ampliar las apuestas habituales de su peña "Los Improbables" comprando también un décimo de la lotería nacional todas las semanas. Deciden ir a ver a su amiga María José para conocer mejor este juego, ella se lo podrá explicar desde un punto de vista matemático.

María José les aclara que en la Lotería nacional los jugadores apuestan por un número de 5 cifras, es decir, el espacio muestral son todos los números comprendidos entre 00.000 y 99.999. Durante el sorteo se extraen 5 bolas de 5 bombos diferentes, cada bola se corresponde con una cifra desde las decenas de millar a las unidades. Este juego por tanto está formado por más de un experimento aleatorio simple ya que es necesario realizar cinco extracciones de una bola de cada uno de los bombos, de manera consecutiva, para poder completar el juego. Es pues un claro ejemplo de lo que en teoría de probabilidades se conoce como experimento aleatorio compuesto.

Experimentos como el lanzamiento de un dado, el lanzamiento de una moneda, extraer una carta de una baraja e incluso extraer una bola de un bombo son experimentos simples, mientras que aquellos en los que fácilmente podemos distinguir dos o más etapas son experimentos compuestos; sería el caso del lanzamiento de dos dados, la extracción de varias cartas de una baraja o el lanzamiento de varias monedas.

Importante

Un **experimento compuesto** es aquel en el que cada prueba equivale a la realización conjunta de varias pruebas simples, ya sea simultánea o sucesivamente. La probabilidad de un suceso de un experimento compuesto se calcula a partir de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

Para calcular la probabilidad de un suceso de un experimento compuesto se pueden usar varios métodos. Una de estos métodos consiste en usar los diagramas en árbol. En el diagrama, en cada paso, vamos escribiendo las probabilidades de los experimentos simples que componen nuestro experimento compuesto.

Se observa el camino de las ramas que nos conducen a la solución. El producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino será la probabilidad del suceso solución.

En la siguiente escena estudiamos la probabilidad de que salga el número 61.731 en el próximo sorteo de lotería. La probabilidad de cada bola en cada bombo es de 1/10. Así pues la probabilidad de que salga el número 6 en el bombo de las decenas de millar es de 1/10. La probabilidad de que salga el número 1 en el siguiente bombo es de 1/10. Y así seguiríamos hasta el final.

En este caso la probabilidad buscada es:

$$P(Salga \quad 61731) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10^5} = 0{,}00001$$

Importante

La probabilidad de un camino, en un diagrama de árbol, es igual al producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino.

Ejercicio resuelto

Blanca y Gonzalo están pasando la tarde en el local que tiene su peña de "Los Improbables". Se plantean un juego, lanzar una moneda 3 veces

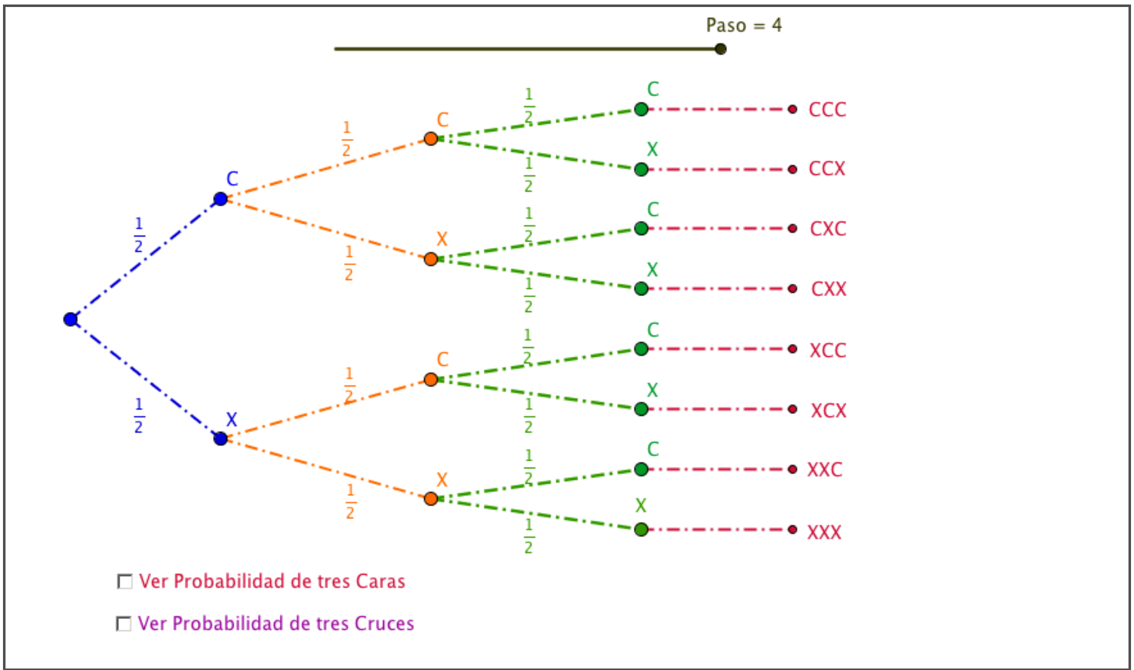
consecutivas. Se preguntan, ¿tiene la misma probabilidad sacar tres caras consecutivas de la moneda que sacar tres cruces?. Ayuda a nuestros amigos a responder la pregunta.

Imagen de MrB-MMX con licencia Creative Commons

Mostrar retroalimentación

En este caso se trata de un experimento compuesto. Lanzar tres monedas al aire simultáneamente, o una detrás de otra, y anotar si sale cara(C) o cruz(X) en cada una de ellas; es equivalente a realizar tres experimentos simples en los que lanzamos una moneda al aire y anotamos si ha salido cara(C) o cruz(X).

Vamos a resolverlo con ayuda de un diagrama en árbol:



Haz clic sobre la imagen para ver la animación

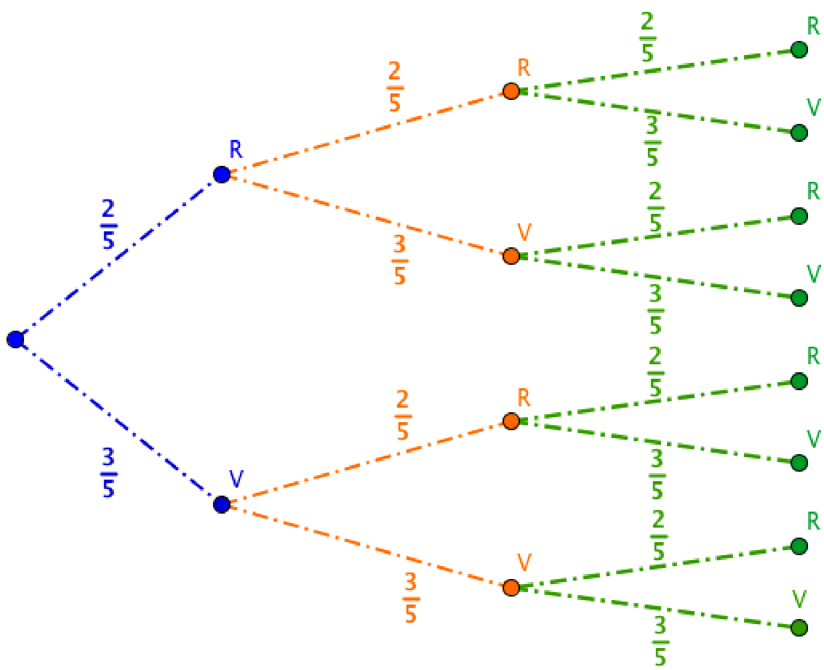
Como hemos podido observar, la P(CCC)=P(XXX)= 1/8

También puedes ver la solución de P(CCC) en el siguiente vídeo.

Comprueba lo aprendido

ltiple

En la siguiente imagen tienes el diagrama de árbol del experimento: En urna donde hay dos bolas rojas y tres bolas verdes. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Realizamos este proceso tres veces.



1. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean iguales?

   Sugerencia

- (a) 35/125
- (b) 8/125
- (c) 27/125
- (d) 90/125

Correcto. P(Las tres bolas sean iguales) = P(sean tres bolas rojas o sean tres bolas verdes) = $P(R \cap R \cap R) + P(V \cap V \cap V) = 8/125 + 27/125 = 35/125$

verdes) = $P(R \cap R \cap R) + P(V \cap V \cap V) = 8/125 + 27/125 = 35/125$

Incorrecto. P(Las tres bolas sean iguales) = P(sean tres bolas rojas o sean tres bolas verdes) = $P(R \cap R \cap R) + P(V \cap V \cap V) = 8/125 + 27/125 = 35/125$

Incorrecto. P(Las tres bolas sean iguales) = P(sean tres bolas rojas o sean tres bolas verdes) = $P(R \cap R \cap R) + P(V \cap V \cap V) = 8/125 + 27/125 = 35/125$

Incorrecto. P(Las tres bolas sean iguales) = P(sean tres bolas rojas o sean tres bolas verdes) = $P(R \cap R \cap R) + P(V \cap V \cap V) = 8/125 + 27/125 = 35/125$

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

2. ¿Cuál es la probabilidad de que la última bola sea roja?
   Sugerencia

- (a) 42/125
- (b) 38/125
- (c) 50/125
- (d) 32/125

Incorrecto. P(La última bola sea roja) = $P(R \cap R \cap R) + P(R \cap V \cap R) + P(V \cap R \cap R) + P(V \cap V \cap R)= 8/125 + 12/125 + 12/125 + 18/125= 50/125$

Incorrecto. P(La última bola sea roja) = $P(R \cap R \cap R) + P(R \cap V \cap R) + P(V \cap R \cap R) + P(V \cap V \cap R)= 8/125 + 12/125 + 12/125 + 18/125= 50/125$

¡Muy bien! P(La última bola sea roja) = $P(R \cap R \cap R) + P(R \cap V \cap R) + P(V \cap R \cap R) + P(V \cap V \cap R)= 8/125 + 12/125 + 12/125 + 18/125= 50/125$

Incorrecto. P(La última bola sea roja) = $P(R \cap R \cap R) + P(R \cap V \cap R) + P(V \cap R \cap R) + P(V \cap V \cap R)= 8/125 + 12/125 + 12/125 + 18/125= 50/125$

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

3. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos primeras bolas sean verdes?
   Sugerencia

- (a) 18/125
- (b) 45/125
- (c) 27/125
- (d) 80/125

Incorrecto. P(Las dos primeras bolas sean verdes) = $P(V \cap V \cap R) + P(V \cap V \cap V) = 18/125 + 27/125= 45/125$

¡Muy bien! P(Las dos primeras bolas sean verdes) = $P(V \cap V \cap R) + P(V \cap V \cap V) = 18/125 + 27/125= 45/125$

Incorrecto. P(Las dos primeras bolas sean verdes) = $P(V \cap V \cap R) + P(V \cap V \cap V) = 18/125 + 27/125= 45/125$

Incorrecto. P(Las dos primeras bolas sean verdes) = $P(V \cap V \cap R) + P(V \cap V \cap V) =$

Incorrecto. P(Las dos primeras bolas sean verdes) = $P(V \cap V \cap R) + P(V \cap V \cap V)$ = 18/125 + 27/125= 45/125

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

2.1. Tablas de contingencia

Imagen de tonylanciabeta con licencia Creative Commons

En una empresa de seguros están realizando un estudio sobre 1000 motocicletas aseguradas según la marca para saber si han tenido un accidente serio (AS) o no (no AS). Después de un año los datos obtenidos los han ordenado en la siguiente tabla:

Motocicletas	Debi	Hoda	Llamaga	Total
AS	4	2	4	10
no AS	496	198	296	990
Total	500	200	300	1000

Esta tabla recibe el nombre de **tabla de contingencia**. El uso de este tipo de tablas es adecuado cuando clasificamos los datos de un grupo (motocicletas) referidos a dos características distintas (Marca y Accidente) que tienen más de una modalidad mutuamente excluyentes (Debi-Hoda-Yamaga y AS-no AS).

Consideremos los siguientes sucesos:

D={Marca Debi}   H={Marca Hoda}   L={Marca Llamaga}

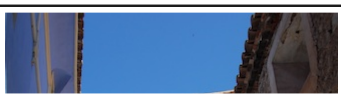
AS={Accidente Serio} noAS={no Accidente Serio}

En este caso es muy fácil calcular las probabilidades siguientes aplicando la regla de Laplace:

$$P(D)=\frac{500}{1000}=\frac{1}{2} \qquad P(AS)=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100} \qquad P(H\cap noAS)=\frac{198}{1000}=\frac{99}{500}$$

$$P(L\cap AS)=\frac{4}{1000}=\frac{1}{250} \qquad P(AS\cap D)=\frac{4}{1000}=\frac{1}{250} \qquad P(L)=\frac{300}{1000}=\frac{3}{10}$$

Comprueba lo aprendido Blanco



En Albarracín, provincia de Teruel, están realizando un estudio sobre los niños y niñas que hacen deporte y, además, van a un campamento. Los resultados del

Imagen de PePe García
con Licencia CC

estudio los podemos ver en la siguiente tabla:

	Deporte	No Deporte
Campamento	135	50
No Campamento	520	342

Sean los sucesos C= {El niño/a va al campamento}, NC={El niño/a no va al campamento}, D={El niño/a hace deporte} y ND={El niño/a no hace deporte}

Escogido un niño del pueblo al azar, calcula las siguientes probabilidades:

Escribe el resultado en forma de fracción sin simplificar, por ejemplo, 10 partido de 15 se escribe 10/15

P(C)= ______ P(NC)= ______ P(D)= ______ P(ND)= ______

P(C∩D)= ______ P(C∩ND)= ______ P(NC∩D)= ______ P(NC∩ND)= ______

Enviar

Recuerda la regla de Laplace:

$$P(Suceso) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}$$

y aplícasela a la tabla completa:

	Deporte	No Deporte	Total
Campamento	135	50	185
No Campamento	520	342	862
Total	655	392	1047

3. Probabilidad condicionada

Imagen de Bananaguay con licencia Creative Commons

Blanca ha introducido 10 bolas en una bolsa, 7 azules y 3 verdes. Saca una bola de la bolsa y es azul, a continuación, con la bola azul en la mano, le pregunta a Gonzalo, ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente bola sea verde?

Gonzalo piensa que antes de sacar la primera bola, la probabilidad de sacar bola azul (A) y de sacar bola verde (V) son: P(A)=7/10 y P(V)=3/10.

Después de la primera extracción, como Blanca no ha devuelto la bola azul a la bolsa, quedan 6 azules y 3 verdes, un total de nueve bolas. Por lo tanto la probabilidad que le está pidiendo Blanca será:

P(2ª bola sea verde si la 1ª bola fue azul)=3/9=1/3.

En este caso la segunda extracción está condicionada por el resultado de la primera. En matemáticas cuando ocurre esto se representa P(V/A), es decir, cual es la probabilidad de que salga bola verde si ya ha salido una azul. Veamos en la siguiente escena este ejemplo de probabilidad condicionada. Mueve los deslizadores 1ª Extracción, 2ª Extracción y Probabilidad para ver el resultado.

Importante

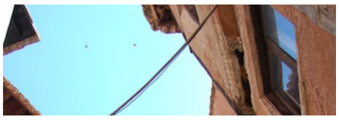
Un suceso **A** está **condicionado** por otro **B** y se expresa **A/B** cuando el hecho de haber ocurrido B influye en la probabilidad de que ocurra A.

Se llama **probabilidad condicionada** del suceso **A** respecto del **B** y se denota **P(A/B)** al siguiente cociente:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad si\, P(B)\neq 0$$

Ejercicio resuelto

Recuerdas el ejercicio de los niños deportistas de Albarracín. Veamos cual es la probabilidad de que un niño vaya al campamento si hemos escogido a uno que hace deporte.



	Deporte	No Deporte	Total
Campamento	135	50	185

No Campamento	520	342	862
Total	655	392	1047

Imagen de PePe García con licencia CC

Mostrar retroalimentación

En este ejemplo habíamos definido los siguientes sucesos: C= {El niño/a va al campamento}, NC={El niño/a no va al campamento}, D={El niño/a hace deporte} y ND={El niño/a no hace deporte}

En el ejercicio me están pidiendo P(C/D), es decir, la probabilidad de que un niño vaya al campamento si sabemos que hace deporte.

Vamos a hacerlo aplicando la fórmula:

$$P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{135}{1047}}{\frac{655}{1047}}=\frac{135\cdot 1047}{655\cdot 1047}=\frac{135}{655}=\frac{27}{131}=0{,}2061$$

Cuando tenemos una tabla de contingencia es más fácil calcular esta probabilidad condicionada, aplicando la regla de Laplace:

Casos favorables: niños que hacen deporte y van al campamento:135

Casos Totales: como sé que el niño escogido hace deporte: 655, es decir, el número de niños totales que hacen deporte.

$$P(C/D)=\frac{135}{655}=\frac{27}{131}=0{,}2061$$

Reflexiona

En un experimento se sabe que P(A)=0,4, P(B)=0,8 y P(A ∪ B)=0,85. Calcula las siguientes probabilidades:

a) P(A ∩ B)

b) P(A/B)

c) P(B/A)

Mostrar retroalimentación

a) P(A ∩ B)

Sabemos que P(A ∪ B)= P(A) + P(B) − P(A ∩ B). Despejamos:

P(A ∩ B)= P(A) + P(B) − P(A ∪ B)=0,4 + 0,8 − 0,85= 0,35

b) P(A/B)

Aplicamos la fórmula:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,35}{0,8}=0,4375$$

c) P(B/A)

Volvemos a aplicar la fórmula:

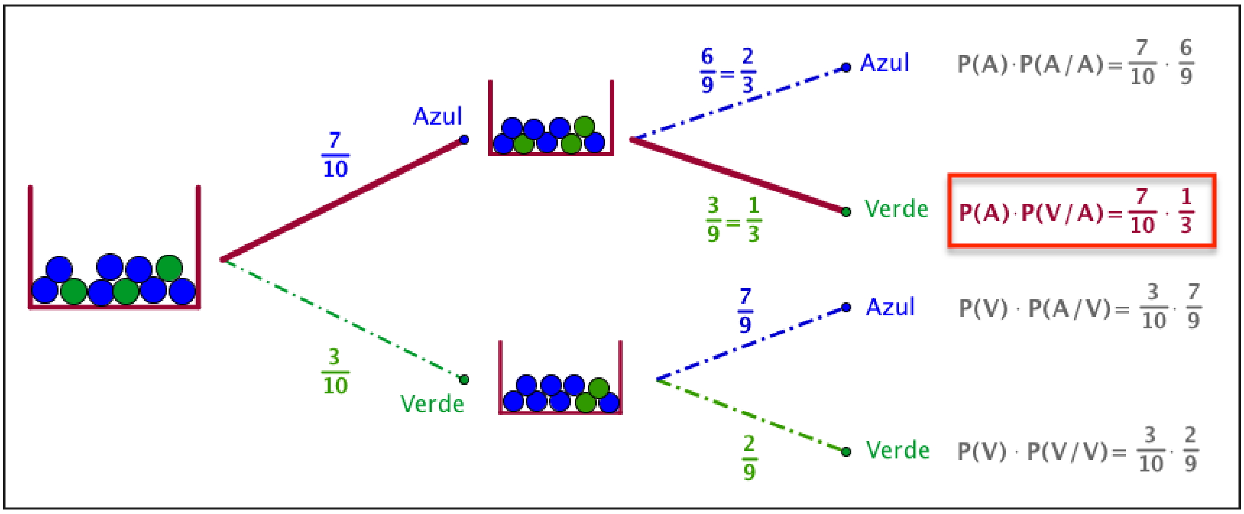
$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0,35}{0,4}=0,875$$

3.1. Sucesos dependientes e independientes

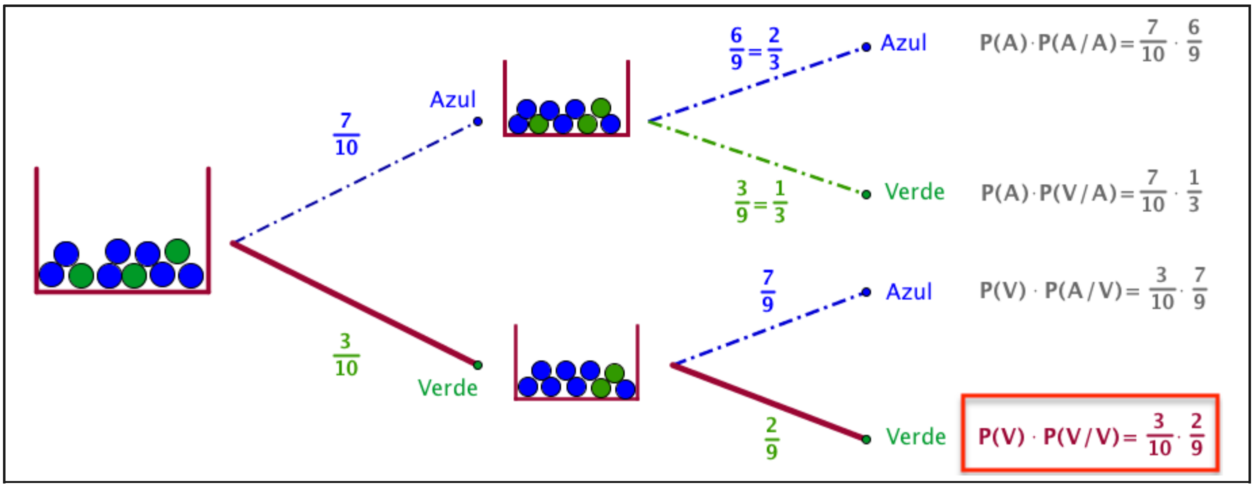
Recuerdas el juego de Blanca y Gonzalo con la bolsa y las 10 bolas, 7 azules y 3 verdes. Gonzalo, después de resolver el juego que le había propuesto Blanca, pregunta: ¿qué es más probable, que saque dos bolas verdes en una sola extracción o que saque una bola verde, la vuelva a introducir en la bolsa y vuelva a sacar otra bola verde?

María José que estaba atenta a la conversación, les pregunta si puede intervenir en el juego. Blanca asiente con la cabeza. El juego que propone Gonzalo, les dice María José, me va a servir para explicaros lo que es un suceso dependiente e independiente.

En el juego que proponía Blanca al principio, al realizar la segunda extracción, ésta estaba condicionada a una extracción anterior en la que ya había sacado una de las bolas de un determinado color, en este caso el color azul. Como no había devuelto la bola dentro de la bolsa, la segunda extracción dependía de la primera.



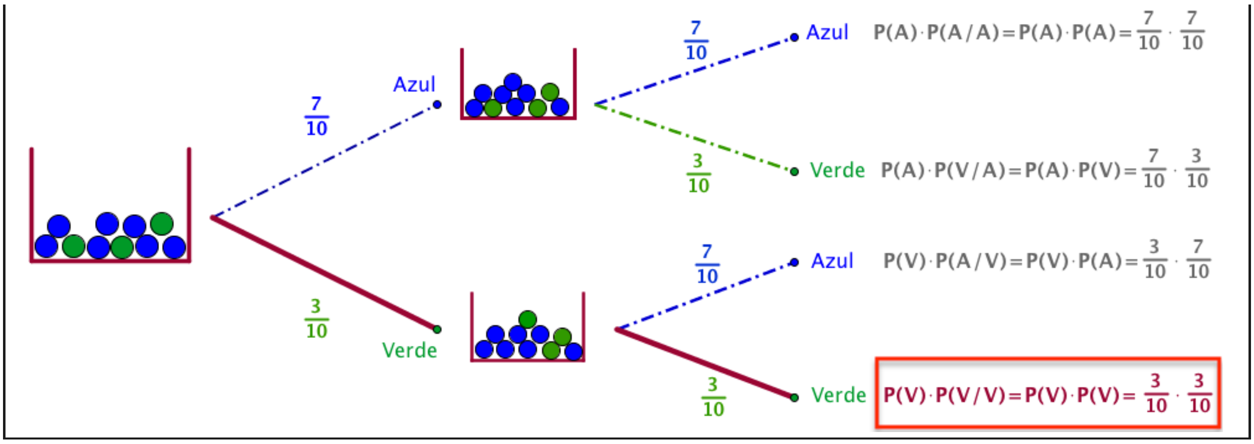
En el juego que propone Gonzalo tenemos dos partes. En la primera parte sacar dos bolas en una sola extracción equivale a realizar dos extracciones sucesivas sin reemplazamiento, es decir, sacamos una bola y, sin devolver ésta a la bolsa realizamos una segunda extracción. En este caso la segunda extracción dependerá de lo que haya salido en la primera. Es decir, serán dos sucesos dependientes.



Para calcular la probabilidad de sacar dos bolas verdes: P(Sacar dos bolas verdes)= P(Sacar la 1ª bola verde) · P(Sacar la 2ª bola verde / 1ª bola es verde), es decir

$$P(V) \cdot P(V/V) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} = 0{,}0667$$

En la segunda parte nos pide que saquemos una bola, apuntemos su color y la devolvamos a la bolsa. A continuación, sacamos una segunda bola y anotamos su color. En este caso lo que ocurra en la segunda extracción no depende de lo que haya ocurrido en la primera, ya que hemos devuelto la bola a la bolsa y en el momento de realizar la segunda extracción estamos en las mismas condiciones que estábamos al realizar la primera. En este caso los sucesos son independientes ya que lo que ocurra en la primera extracción no influye en lo que pasará al realizar la segunda extracción.



Ahora la probabilidad de sacar dos bolas consecutivas verdes es P(Sacar dos bolas verdes)=P(sacar la primera bola verde)·P(sacar la segunda bola verde/1ª bola es verde), es decir:

$$P(V)\cdot P(V/V)=P(V)\cdot P(V)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{100}=0{,}09$$

Podemos ver que cuando hay reemplazamiento es más probable sacar dos bolas verdes de forma consecutiva.

Dos sucesos **A** y **B** son **dependientes** si la realización de **A** condiciona la probabilidad de **B.**

Si dos sucesos son dependientes:

P(A ∩ B) = P(A/B) · P(B)

Dos sucesos **A** y **B** son **independientes** si la realización de **A** no condiciona la probabilidad de **B.**

Si dos sucesos A y B son independientes si P(A)=P(A/B), es decir, la realización del suceso B no influye en la probabilidad de A, y la fórmula anterior queda como

P(A ∩ B) = P(A) · P(B)

En estos dos vídeos puedes ver un ejemplo de probabilidad de sucesos dependientes y otro de probabilidad de sucesos independientes.

	
Probabilidad de sucesos dependientes	Probabilidad de sucesos independientes

Comprueba lo aprendido

Marca la respuesta correcta aplicando lo que has aprendido sobre sucesos dependientes e independientes.

En un experimento se sabe que $P(A)=0,4$, $P(B)=0,8$ y $P(A \cup B)=0,85$. ¿Son A y B independientes?

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Sabemos que $P(A \cup B)= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Despejamos:

$P(A \cap B)= P(A) + P(B) - P(A \cup B)=0,4 + 0,8 - 0,85= 0,35$

Por otro lado $P(A)\cdot P(B)=0,4\cdot 0,8 = 0,32$.

Como $P(A \cap B) \neq P(A)\cdot P(B)$, A y B son dependientes.

En un experimento se sabe que $P(A)=0,5$, $P(B)=0,7$ y $P(A \cup B)=0,85$. ¿Son A y B independientes?

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Sabemos que $P(A \cup B)= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Despejamos:

$P(A \cap B)= P(A) + P(B) - P(A \cup B)=0,5 + 0,7 - 0,85= 0,35$

Por otro lado $P(A)\cdot P(B)=0,5\cdot 0,7 = 0,35$.

Como $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$, A y B son independientes.

Para saber más

En esta página tienes 18 ejercicios de probabilidad condicionada resueltos.

Ejercicios de probabilidad condicionada

4. Teorema de la probabilidad total

Imagen de oskay con licencia Creative Commons

En la fábrica de tuercas "MITORNILLO, S.A." han hecho un estudio sobre las tres máquinas que hacen tuercas de 6/17 pulgadas. Se sabe que la máquina A produce el 25% de las tuercas; la segunda máquina B produce el 45% de las tuercas y la máquina C, el 30% restante. Han calculado las tuercas defectuosas que produce cada máquina. A produce un 2% , B un 3% y C un 1%.

Si cogemos una tuerca al azar de entre todas las fabricadas en la última hora. ¿Qué probabilidad existe de que sea defectuosa?

Vamos a plantear el problema. Empezaremos definiendo los sucesos:

D={tuerca defectuosa} noD={tuerca no defectuosa} A={tuerca fabricada por la máquina A} B={tuerca fabricada por la máquina B} C={tuerca fabricada por la máquina C}

En nuestro caso tenemos que calcular $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$.

Aplicando la fórmula de la probabilidad condicionada a las intersecciones:

$P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C)$

Veamos el valor de cada una de estas probabilidades con el siguiente diagrama. Fíjate que en este caso el total de las tuercas está producido por las máquinas A, B y C y cada una de ellas tiene la característica tuercas defectuosas o tuercas no defectuosas:

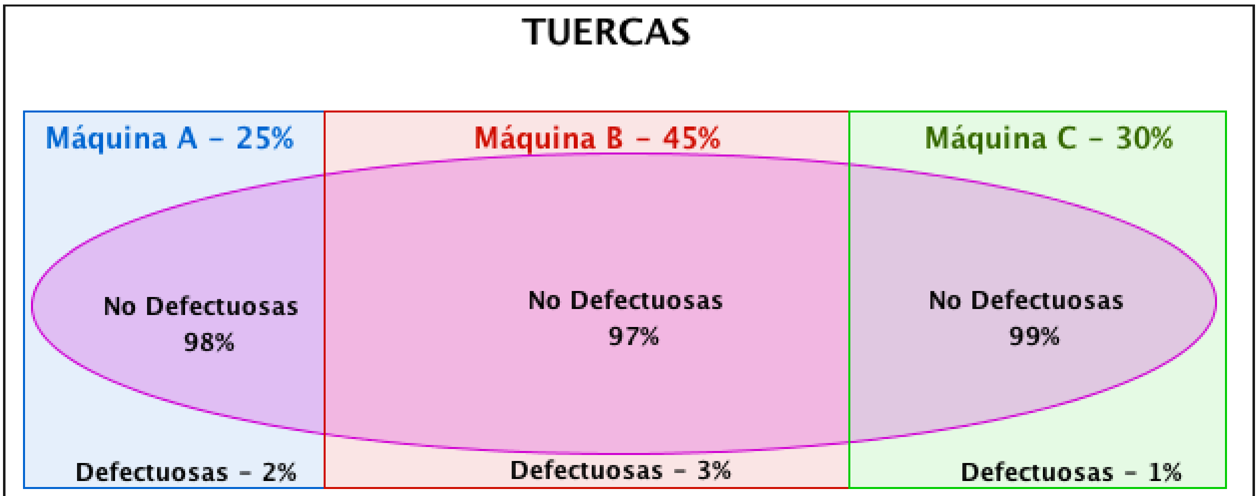


Imagen de PePe García con licencia CC

Por lo tanto sustituyendo en nuestro problema tendremos:

$P(D)=0,02 \cdot 0,25 + 0,03 \cdot 0,45 + 0,01 \cdot 0,30 = 0,005 + 0,0135 + 0,003 = 0,0215$

Es decir, existe una probabilidad del 0,0215 de que una tuerca escogida al azar sea defectuosa.

Importante

Dado un experimento aleatorio E y un conjunto de sucesos A_1, A_2, ...,A_n asociados a E tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, son incompatibles dos a dos y $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = E$ (Suceso cierto) y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades de B/A_i. Entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la siguiente expresión :

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+...+P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

Este resultado se conoce con el nombre de **teorema de la probabilidad total**.

Ejercicio resuelto

En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas y entre las sillas sin respaldo hay 7 nuevas.

Si entro en el aula y me siento en una silla al azar , ¿cuál es la probabilidad de que la silla sea nueva?

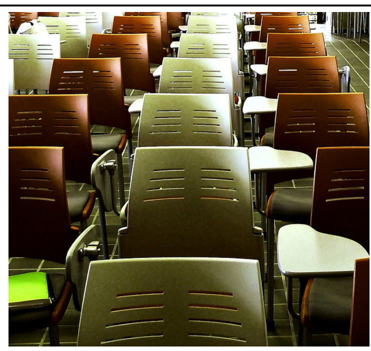
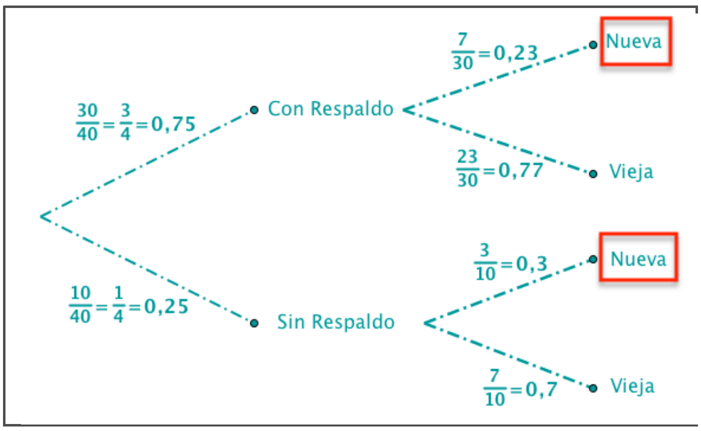


Imagen de Olga Díez (Caliope)
con licencia Creative Commons

Mostrar retroalimentación



Vamos a aplicar el teorema de la probabilidad total. Vamos a describir los sucesos.

N={Silla Nueva} V={Silla que no es nueva} R={Silla con respaldo} noR={Silla sin respaldo}

P(N)=P(N ∩ R) + P(N ∩ noR)= P(N\R)·P(R) + P(N oR)·P(noR)

Fíjate en el diagrama en árbol para ver el valor de las probabilidades.

P(N)=P(N\R)·P(R) + P(N oR)·P(noR)= 0,23 · 0,75 + 0,3 · 0,25 = 0,2475

Luego la probabilidad de sentarme en una silla nueva es casi el 25% .

Reflexiona

Imagen de Wikimedia Commons

En la Comunidad de Aragón, la distribución de población activa por provincias y sexo viene dada en % la siguiente tabla.

Provincia	Hombres	Mujeres
Huesca	61%	39%
Teruel	60%	40%
Zaragoza	56%	44%

Datos del INE

Dentro de la comunidad autónoma el porcentaje de población activa viene dado por los siguiente valores:

Provincia	Población activa
Huesca	16%
Teruel	10,5%
Zaragoza	73,5%

Datos del INE

Si escogemos una persona al azar que pertenece a la población activa de la comunidad autónoma, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer trabajadora?

Mostrar retroalimentación

En este caso vamos a definir los sucesos:

H={población activa de la provincia de Huesca}, T={población activa de la provincia de Teruel}, Z={población activa de la provincia de Zaragoza}

Ho={Es un trabajador}, Mu={Es una trabajadora}

Por lo tanto nos están pidiendo la siguiente porbabilidad **P(Mu).**

H, T y Z son tres sucesos que forman una partición de todas las personas de Aragón, es decir, si una persona es de Aragón o es H, o es T o es Z. Es decir, Aragón =H ∪ T ∪ Z. además H, z y T son incompatibles dos a dos, sólo se puede ser de un lugar.

Además conocemos todas las probabilidades de Mu/H, Mu/Y y Mu/Z. Por lo que podemos aplicar el Teorema de la probabilidad Total.

$$P(Mu)=P(Mu/H)\cdot P(H)+P(Mu/T)\cdot P(T)+P(Mu/Z)\cdot P(Z)$$

Sustituyendo por los valores que nos dan en las tablas:

P(Mu)=0,39·0,16 + 0,4·0,105 + 0,44·0,735=0,43

5. Teorema de Bayes

Así se hacen los tornillos y las tuercas

Recuerdas la fábrica MITORNILLO, SA. En su estudio sobre la producción de tuercas quieren saber si una vez escogida una pieza defectuosa, cuál es la probabilidad de que provenga de la máquina A.

Veamos como realizar el estudio, los datos conocidos eran:

- Máquina A: 25% de producción y 2% de tuercas defectuosas.
- Máquina B: 45% de producción y 3% de tuercas defectuosas.
- Máquina C: 30% de producción y 1% de tuercas defectuosas.

Nos están pidiendo P(A/D)= Probabilidad de que la tuerca provenga de la máquina A dado que la es defectuosa. En este caso nosotros conocemos las probabilidades condicionadas contrarias. P(D/A)=0,02; P(D/B)=0,03; P(D/C)=0,01.

Para el cálculo de P(A/D) vamos a utilizar la definición de la Probabilidad Condicionada y el Teorema de la Probabilidad Total. Mueve el deslizador para ver como hacerlo:

Importante

Dado un experimento aleatorio E y un conjunto de sucesos A_1, A_2, ..., A_n asociados a E tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, son incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$, para cualquier otro suceso B de E con P(B)>0 se cumple que:

$$P(A_i/B)=\frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B/A_1)\cdot P(A_1)+P(B/A_2)\cdot P(A_2)+...+P(B/A_n)\cdot P(A_n)}$$

Este resultado se conoce con el nombre de **Teorema de Bayes**

La probabilidad $P(A_i /B)$ recibe el nombre de probabilidad a posteriori. En nuestro ejemplo será la probabilidad de que una pieza provenga de la máquina A si sabemos que es defectuosa. Es la propiedad después de haber realizado un experimento, escoger una pieza defectuosa.

La probabilidad $P(A_i)$ recibe el nombre de probabilidad a priori. Son las probabilidades que conocemos antes de realizar el experimento. En nuestro caso la probabilidad de que una pieza provenga de la máquina A, B o C.

Por lo que el cálculo de nuestra probabilidad,aplicando lo anterior, quedará como:

$$P(A/D)=\frac{P(D/A)\cdot P(A)}{P(D/A)\cdot P(A)+P(D/B)\cdot P(B)+P(D/C)\cdot P(C)}=\frac{0{,}02\cdot 0{,}25}{0{,}02\cdot 0{,}25+0{,}03\cdot 0{,}45+0{,}01\cdot 0{,}30}=0{,}232$$

Reflexiona

Imagen de velkr0 con licencia Creative Commons

En una clase el 55% son chicos y el 45% son chicas. En el último examen de Matemáticas, han aprobado el 80% de los chicos y el 90% de las chicas.

(1) Calcula la probabilidad de que al elegir un estudiante al azar, haya aprobado.

(2) Sabiendo que un estudiante ha aprobado, calcula la probabilidad de que sea chica.

Mostrar retroalimentación

Puedes ver la solución de este problema en el siguiente vídeo.

Para saber más

En las siguientes páginas puedes encontrar ejercicios con soluciones para practicar.

Página de J. Joaquín Seda en Thales.

Página vadenúmeros.es

Otra página en Slideshare de Luis Felipe Hernández

Aún más problemas en Gacetilla Matemática

Por último otro vídeo de juanmemol en YouTube, por si no nos ha quedado muy claro.

Thomas Bayes en Wikimedia Commons

6. Ejemplos de selectividad

Ejercicio resuelto

JUNIO 2010 ANDALUCÍA

Selectividad

Una persona lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas del 1 al 6.

a) **(0.5 puntos)** Determine el número de resultados del espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) **(1.5 puntos)** Sea A el suceso "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4" y B el suceso "la primera puntuación es impar". Halle la probabilidad de A y la de B.

c) **(0.5 puntos)** ¿Son independientes A y B?

Ejercicio tomado de http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Mostrar retroalimentación

Solución

(a)

Determine el número de resultados del espacio muestral de este experimento aleatorio.

El número de resultados del espacio muestral es 6x6 =36 (6 de cada dado)

(b)

Sea A el suceso "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4" y B el suceso "la primera puntuación es impar". Halle la probabilidad de A y la de B.

A = "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4" = { 1-1,1-2, 2-1, 1-3, 3-1, 2-2, 2-3, 3-2, 3-3}, donde el primer número es el resultado del primer dado y el segundo el resultado del segundo dado. Vemos que hay 9 resultados posibles

Para calcular la probabilidad utilizaremos la fórmula de Laplace.

p(A) = (nº de casos favorables)/(nº de casos posibles) = 9/36 = 1/4 = 0'25.

B = "la primera puntuación es impar" =
= { 1-1,1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 3-1,3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 5-1,5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6}. Vemos que hay 18 resultados posibles

Para calcular la probabilidad utilizaremos la fórmula de Laplace.
p(B) = (nº de casos favorables)/(nº de casos posibles) = 18/36 = 1/2 = 0'5

Nota: El apartado (c) lo podrás realizar tras estudiar el tema 2 de la unidad. Deberás obtener que los sucesos A y B no son independientes.

Ejercicio resuelto

Selectividad

JUNIO 2011

Un examen consta de una parte teórica y una parte practica. La probabilidad de que se apruebe la parte teórica es 0'7 y la de que se apruebe la parte practica 0'75. Se sabe que el 50% de los alumnos ha aprobado ambas.
(a) (0'75 puntos) Calcule la probabilidad de aprobar alguna de las dos partes.
(b) (0'75 puntos) Calcule la probabilidad de aprobar la parte practica sabiendo que no se ha aprobado la parte teórica.
(c) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos "aprobar parte teórica" y "aprobar parte practica"?

Ejercicio tomado de http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Mostrar retroalimentación

Llamemos T y P a los sucesos "apruebe parte teórica" y "apruebe parte práctica", respectivamente

De la probabilidad de que se apruebe la parte teórica es 0'7, tenemos p(T) = 0'7.
De la probabilidad de que se apruebe la parte práctica es 0'75, tenemos p(P) = 0'75.
De el 50% de los alumnos ha aprobado ambas, tenemos p(T y P) = $p(T\cap P)$ = 50% = 0'5.

(a)
Calcule la probabilidad de aprobar alguna de las dos partes.
Me están pidiendo p(T ó P) = $p(T\cup P) = p(T) + p(P) - p(T\cap P) = 0'7 + 0'75 - 0'5 = 0'95$.

(b)
Calcule la probabilidad de aprobar la parte practica sabiendo que no se ha aprobado la parte teórica.

Me están pidiendo $p(P/noT) = p(P/T^C) = \dfrac{p(P\cap T^C)}{p(T^C)} = \dfrac{p(P)-p(P\cap T)}{1-p(T)} = (0'75-0'5)/(1-0'7) \cong 0'8333$

Ejercicio resuelto

Selectividad

SEPTIEMBRE 2011

En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es 0'1. Si este se produce, la probabilidad de que la alarma suene es 0'95. La probabilidad de que suene la alarma sin que haya incidente es de 0'03.
(a) (1'5 puntos) ¿,Cual es la probabilidad de que suene la alarma?
(b) (1 punto) Si ha sonado la alarma, calcule la probabilidad de que no haya habido incidente.

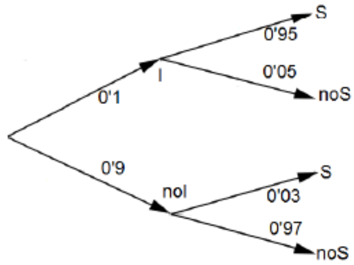
Ejercicio tomado de http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Mostrar retroalimentación

Llamemos I, I^C = noI, S y S^C = noS a los sucesos "incidente", "no incidente", suene la alarma" y " no suene".

De "la probabilidad de que haya un incidente es 0'1", tenemos p(I) = 0'1, y por suceso contrario p(noI) = 0'9.
De "si hay incidente, la probabilidad de que la alarma suene es 0'95", tenemos p(S/I)=0'95, y por contrario p(noS/I)= 0'05.
De "suene la alarma sin que haya incidente es de 0'03", tenemos p(S/noI)=0'03, y por contrario p(noS/noI) = 0'93.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



(a)
¿Cual es la probabilidad de que suene la alarma?
Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que suene la alarma es:

$$p(S) = p(I).p(S/I) + p(noI).p(S/noI) = (0'1)(0'95) + (0'9)(0'03) = 0'122.$$

(b)
Si ha sonado la alarma, calcule la probabilidad de que no haya habido incidente.
Aplicando el teorema de Bayes, la probabilidad de que si ha sonado la alarma, no haya habido incidente es:

$$p(noI/S) = \frac{p(noI \cap S)}{p(S)} = \frac{p(noI).p(S/noI)}{p(S)} = \frac{0'9.0'03}{0'122} \cong 0'2213.$$

Resumen

Importante

La probabilidad de un camino, en un diagrama de árbol, es igual al producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino.

Importante

Un **experimento compuesto** es aquel en el que cada prueba equivale a la realización conjunta de varias pruebas simples, ya sea simultánea o sucesivamente. La probabilidad de un suceso de un experimento compuesto se calcula a partir de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

Importante

Un suceso **A** está **condicionado** por otro **B** y se expresa **A/B** cuando el hecho de haber ocurrido B influye en la probabilidad de que ocurra A.

Se llama **probabilidad condicionada** del suceso **A** respecto del **B** y se denota **P(A/B)** al siguiente cociente:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad si\, P(B) \neq 0$$

Importante

Dos sucesos **A** y **B** son **dependientes** si la realización de **A** condiciona la probabilidad de **B.**

Si dos sucesos son dependientes:

P(A ∩ B) = P(A/B) · P(B)

Dos sucesos **A** y **B** son **independientes** si la realización de **A** no condiciona la probabilidad de **B.**

Si dos sucesos A y B son independientes si P(A)=P(A/B), es decir, la realización del suceso B no influye en la probabilidad de A, y la fórmula anterior queda como

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Importante

Dado un experimento aleatorio E y un conjunto de sucesos A_1, A_2, ...,A_n asociados a E tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, son incompatibles dos a dos y $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = E$ (Suceso cierto) y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades de B/A_i. Entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la siguiente expresión :

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+...+P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

Este resultado se conoce con el nombre de **teorema de la probabilidad total**.

Importante

Dado un experimento aleatorio E y un conjunto de sucesos A_1, A_2, ..., A_n asociados a E tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, son incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$, para cualquier otro suceso B de E con $P(B)>0$ se cumple que:

$$P(A_i/B)=\frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B/A_1)\cdot P(A_1)+P(B/A_2)\cdot P(A_2)+...+P(B/A_n)\cdot P(A_n)}$$

Este resultado se conoce con el nombre de **Teorema de Bayes**

La probabilidad $P(A_i /B)$ recibe el nombre de probabilidad a posteriori. En nuestro ejemplo será la probabilidad de que una pieza provenga de la máquina A si sabemos que es defectuosa. Es la propiedad después de haber realizado un experimento, escoger una pieza defectuosa.

La probabilidad $P(A_i)$ recibe el nombre de probabilidad a priori. Son las probabilidades que conocemos antes de realizar el experimento. En nuestro caso la probabilidad de que una pieza provenga de la máquina A, B o C.