Probabilidad: Variables aleatorias discretas. Distribución binomial

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

1.º Bachillerato

Contenidos

Probabilidad

Variables aleatorias discretas. Distribución binomial

1. Indroducción

Imagen de ryanmorrisonjsy en Pixabay. Dominio Público

El juego de los Chinos, se desarrolló en el Camino de Santiago, siendo un entretenimiento de los Peregrinos.

No tiene nada que ver con los chinos, procede de la piedrecitas o **"chinas"** que se usaban para jugar.

El material necesario para jugar es de 3 monedas o 3 piedrecillas.

¿Cómo se juega?
Cada jugador saca entre 0 ó 3 monedas en una mano, las no usadas en la partida pueden guardarse en la otra mano o en el bolsillo del pantalón.
Gana quien acierta la suma del total de monedas de los jugadores.
Quien pierde, decide que jugador empieza pidiendo.
Cuando un jugador acierta el número de monedas sale de la partida así hasta que pierde uno de los jugadores.
Suele jugarse a tres partidas perdidas.

¡Quién pierde, paga las consumiciones!

2. Distribución de probabilidad

Analicemos **El juego de los Chinos**, citado en la introducción.

Imagen de cafecoke.com bajo CC

Estudio para el caso de dos jugadores

jugador 1	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
jugador 2	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
Total monedas	0	1	2	3	1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5	6

Para entender mejor la tabla

Estudio para el caso de dos jugadores

jugador 1	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
jugador 2	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
Total monedas	0	1	2	3	1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5	6

Hemos marcado con un rectángulo en rojo una de las jugadas como ejemplo:

El jugador 1 saca una moneda y el jugador 2 saca dos monedas. en total hay 3 monedas.

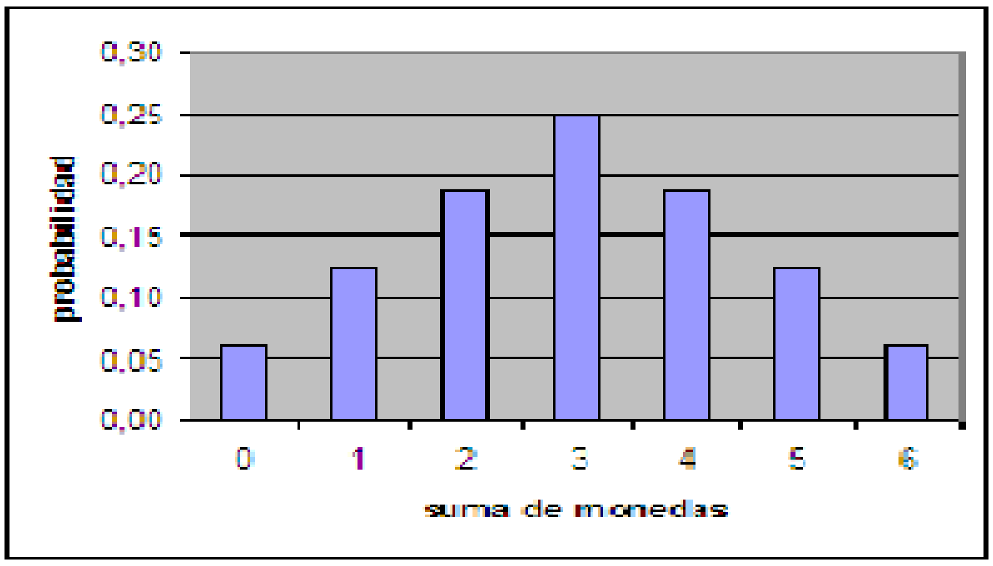
Observa que el número de monedas que suman varía entre 0 y 6. Llamemos X="n.º de monedas totales"
¿Todas las sumas tienen las mismas posibilidades de salir? Veamos que no.

X	0	1	2	3	4	5	6
frecuencia absoluta	1	2	3	4	3	2	1
frecuencia relativa	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

Parece claro según los datos que la suma 3 es la más probable. ¿Es por ello que cuando jugamos y pedimos primero siempre pedimos 3?

¡Bienvenido al mundo de las variables aletorias!

2.1. Variables aleatorias



En el gráfico de arriba se ha representado los datos del juego de los chinos como aparece en la tabla del apartado anterior (que abajo la reproducimos de nuevo). En el eje de abscisas (X) las posibles sumas entre los dos jugadores y en el de ordenadas (Y) la frecuencia relativa o probabilidad.

X	0	1	2	3	4	5	6
frecuencia absoluta	1	2	3	4	3	2	1
frecuencia relativa	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

Importante

Una **variable aleatoria** es una función que asocia a cada elemento del espacio muestral un número real. Por lo tanto, toma valores numéricos reales que vienen dados por el resultado de un experimento aleatorio.
Por ejemplo, el número de pacientes que atiende un médico en la consulta durante una semana, el tiempo que esperamos para pagar en la caja de un supermercado, el número de llamadas al 112 en el transcurso de una hora, ...
Las variables aleatorias se simbolizan con letras mayúsculas (X, Y, Z).

Importante

Las variables aleatorias, dependiendo de los valores que toman, pueden clasificarse en:

Variables discretas: Son aquellas que, aunque también puedan tomar valores infinitos, entre un valor y el siguiente no es necesario pasar por los puntos intermedios. Suelen estar asociadas a experimentos aleatorios en que se *cuenta* algo.

Ejemplo: El número de monedas en una mano de los chinos puede ser 2 y en otra 3, sin embargo, nunca tomará ningún valor entre 2 y 3.

Variables continuas: Pueden tomar todos los valores de un intervalo. Son aquellas en las que necesariamente, para pasar de un valor a otro, deben tomar los infinitos valores intermedios entre ellos. Suelen estar asociadas a experimentos aleatorios en que se mide algo.

Ejemplo: Si dos personas pesan exactamente 55 y 60 kg, entre ellas pueden haber personas que pesen 55,2 kg, otra que pese 57,4 kg, otra con 58 kg, ...

Comprueba lo aprendido

¿Las variables que a continuación se proponen, son discretas? (Si no lo son serán continuas).

1.-El número de vehículos de una marca concreta

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

No conozco a nadie que tenga 2,12 coches.

2.- Contenido en mililitros de aceite en un envase de una cierta marca.

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Entre dos botellas puede no ser exactamente la misma cantidad

3.- Número de décimos premiados en la lotería de Navidad

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Sin comentarios, aunque el cero es lo que más se da.

2.2. Función de probabilidad

Si recuerdas, en la unidad anterior, cuando teníamos una variable estadística, también disponíamos de su distribución de frecuencias que presentamos en una tabla. Del mismo modo, para una variable aleatoria, tendremos su distribución de probabilidad. En este caso, en vez de con frecuencias trabajaremos con probabilidades.

Importante

Suponemos que tenemos una variable aleatoria discreta X con valores x_1, x_2, ..., x_k, y
conocemos las siguientes probabilidades $p(X= x_1) = p_1$, $p(X= x_2) = p_2$, ..., $p(X= x_k) = p_k$.
Se define su **función de probabilidad** como la ley o aplicación que asocia a cada valor x_i su probabilidad $p(X=x_i)=p_i$, verificando:

1) Son siempre positivas: $p_i > o$
2) La suma de todas, es igual a uno: $p_1+ p_2+ p_3+ ....+ p_K = 1$

Ejemplo:

Veamos cómo se concreta en el juego de los chinos las definiciones del "Importante" anterior.

La siguiente tabla recoge la distribución de frecuencias y la probabilidad que tiene cada uno de los números que resulta de sumar la monedas. A saber:

- **x_i** representa cada uno de los posibles valores que puede tomar la variable **X: "n.º de monedas totales"**
- **$p(x_i)$** es la probabilidad (frecuencia relativa) de que la variable **X** tome el valor **x_i**

X	0	1	2	3	4	5	6
frecuencia absoluta	1	2	3	4	3	2	1
$p(x_i)$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

Caso práctico

Consideremos la variable aleatoria **X="número de caras obtenidas al lanzar tres veces una moneda"**

(a) Indica los posibles valores **$X=x_i$** que puede tomar la variable **X**.

(b) Determina el espacio muestral, **E**.

(c) Calcula la función de probabilidad, **$p(X=x_i)$**, de la variable X.

Imagen de Jason Rogers en Flickr. Licencia CC

(a) Posibles valores de X:

$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$ o $x_4=3$ caras.

(b) El espacio muestral obtenido al lanzar 3 veces una moneda es:

E={CCC,CCX,CXC,XCC,XXC,XCX,CXX,XXX}

(c) Para calcular la función de probabilidad, $p(X=x_i)$, de la variable, debemos observar que:

$X=x_1=0$ cuando ocurre el suceso: {XXX}

$X=x_2=1$ cuando ocurre el suceso: {XXC,XCX,CXX}

$X=x_3=2$ cuando ocurre el suceso: {CCX,CXC,XCC}

$X=x_4=3$ cuando ocurre el suceso: {CCC}

Por tanto, la función de probabilidad es:

$p(X=x_1)=p(X=0)=1/8=0{,}125$

$p(X=x_2)=p(X=1)=3/8=0{,}375$

$p(X=x_3)=p(X=2)=3/8=0{,}375$

$p(X=x_4)=p(X=3)=1/8=0{,}125$

Importante

Dada una variable aleatoria discreta (X) se define su **función de distribución** como:

$F(x) = p(X \leq x)$, que asocia a cada número (x) la probabilidad acumulada hasta él.

Comprueba lo aprendido

Seguimos trabajando con la función de distribución de la variable **X="número de caras obtenidas al lanzar tres veces una moneda"**. Basándote en su función de probabilidad, **$p(X=x_i)$**, obtenida en el apartado **(c)** del ejercicio anterior, marca **Verdadero** o **Falso** en cada caso.

$p(X=x_1)=p(X=0)=1/8=0{,}125$
$p(X=x_2)=p(X=1)=3/8=0{,}375$
$p(X=x_3)=p(X=2)=3/8=0{,}375$
$p(X=x_4)=p(X=3)=1/8=0{,}125$

La probabilidad de que, al lanzar las tres monedas, salgan a lo sumo dos caras es igual a 0,5.

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso

$p(X\leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}875$

La probabilidad de que, al lanzar las tres monedas, salgan menos de dos caras es igual a 0,5.
Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

$p(X<2) = p(X=0) + p(X=1) = 0{,}125 + 0{,}375 = 0{,}5$

2.3. Parámetros

En la Unidad en la que se desarrolla el estudio de las variables estadísticas, se explica cómo calcular las medidas asociadas a una de estas variables: media, mediana, varianza o desviación típica. A las variables aleatorias (que estamos estudiando en esta unidad) también le calcularemos medidas. Incluso, coincidirán con los nombres de las medidas de las variables estadísticas. Es por ello que, para evitar confusiones, en vez de medidas, utilizaremos el nombre de **parámetros**.

Imagen de kreatikar en Pixabay. Dominio Público

¿Cuántas veces oímos en los medios de comunicación la esperanza de vida de los españoles es de...?

¿Qué son los parámetros de una variable aleatoria? ¿Para qué nos sirven?

Los parámetros en las variables aleatorias son como para las personas el DNI, nombre y apellidos. Sus parámetros las identifican, para bien o para mal, de las demás.

Importante

Dada una variable aleatoria discreta, X, que toma los valores: x_1, x_2, x_3, ... , x_k y dada su función de probabilidad asociada:

$p(X=x_i) = p_i$, podemos calcularle los siguientes **parámetros**, cuyas fórmulas se detallan:

Media o esperanza matemática: $\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_k \cdot p_k = \Sigma x_i \cdot p_i$ (También se representa como E(x))
Puede interpretarse como el valor esperado o medio que toma la variable o, tambien, como el valor central de la distribución.

Varianza: $s^2 = \Sigma x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$ (También se representa con Var(X) o V(x))

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{s^2}$ (También se representa por DT(x))

Caso práctico

Usando los datos del juego de los Chinos:

X	0	1	2	3	4	5	6	Sumas
p_i	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16	$\Sigma p_i = 1$
$x.p_i$	0	2/16	6/16	12/16	12/16	10/16	6/16	$\Sigma x_i \cdot p_i = 3$
$x^2.p_i$	0	2/16	24/16	36/16	48/16	50/16	36/16	$\Sigma x_i^2 \cdot p_i = 196/16$

Vamos a calcular la esperanza, varianza y desviación típica del juego de los chinos.
Observa que se ha completado la tabla con dos filas y hemos calculado las sumas de las filas.
Aplicando las fórmulas para cada uno de los parámetros tendríamos:

Esperanza:

$\mu = \Sigma x_i \bullet p_i = 3$

Varianza:

$\sigma^2 = \Sigma x_i^2 \bullet p_i - \mu^2 = \frac{196}{16} - 3^2 = 12{,}25 - 9 = 3{,}25$

Desviación típica:

$\sigma = \sqrt{3{,}25} = 1{,}80$

Comprueba lo aprendido

Completa la tabla siguiente y responde a las cuestiones que se plantean posteriormente:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,1	0,25	0,35	p_5

¿Cómo es la variable?

○ 1a) La variable es continua

○ 1b) La variable es discreta

No es correcto

Muy bien

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

El valor de p_5 es:

Sugerencia

○ a) 1

○ b) 0,25

○ c) 0,20

No es correcto

No es correcto

Sí, p_5=0,20 pues la suma de la fila de p_i es 1

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

La media de esta variable es :

- a) 3,45
- b) 4,35
- c) 5,34

Correcto.

No es correcto

No es correcto

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

La desviación típica es:

- a) 2
- b) 2,1
- c) 1,2

No es correcto

No es correcto

Perfecto

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

Comprueba lo aprendido

Una compañía aérea ha vendido 153 billetes para un avión de 148 pasajeros, considerando que, finalmente algunos no acudirán al aeropuerto a realizar su viaje.

Si llamamos **X: "Número de pasajeros que acuden finalmente al aeropuerto para viajar en el avión"**, la distribución de esta variable se recoge en la siguiente tabla:

x_i	146	147	148	149	150	151	152	153
p_i	0,06	0,08	0,14	0,21	0,23	0,18	0,08	0,02

Observa que p_i es la probabilidad de que finalmente acudan x_i pasajeros para viajar en el avión. Por ejemplo, a la vista de los datos de la tabla, la probabilidad de que acudan finalmente 151 pasajeros es 0,18 (un 18%).

Responde a las siguientes cuestiones:

<u>Cuestión 1</u>: X es una variable aleatoria ...

(a) Discreta
(b) Continua

Has elegido la opción correcta.

No es correcto.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

Cuestión 2: La probabilidad de que todos los viajeros que acuden al aeropuerto tengan plaza en el avión vale ...

Sugerencia

(a) 0,14
(b) 0,32
(c) 0,28

No es correcto.

No es correcto.

Has elegido la opción **correcta**.

Para que todos tengan plaza, deben acudir 148 pasajeros o menos, **X≤148**

Por tanto, deberemos calcular: **p (X ≤ 148)**

p (X ≤ 148) = p (X=148) + p (X=147) + p (X=146) = 0,14 + 0,08 + 0,06 = 0,28

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

Cuestión 3: La probabilidad de que se quede sin plaza alguno de los viajeros que van al aeropuerto vale ...

Sugerencia

(a) 1
(b) 0,72
(c) 0,15

No es correcto, piénsalo mejor y, si es necesario, repasa de nuevo el tema.

Has elegido la opción **correcta**.

Para que alguno se quede sin plaza, deben acudir más de 148 pasajeros, **X > 148**

Por tanto, deberemos calcular: **p (X > 148)**

p (X > 148) = p (X=149) + p (X=150) + p (X=151) + p (X=152) + p (X=153) = 0,21 + 0,23 + 0,18 + 0,08 + 0,02 = 0,72

Tambien podíamos haber optado por calcularlo de la siguiente manera:

p (X > 148) = 1 - p (X ≤ 148) = 1 - 0,28 = 0,72

No es correcto.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

Cuestión 4: El número esperado de viajeros que acudirán al aeropuerto es ...

Sugerencia

- (a) 151,2
- (b) 154
- (c) 149,43

No es correcto.

No es correcto.

Has elegido la opción **correcta**.

$\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_k \cdot p_k = \Sigma x_i \cdot p_i$ = 146 · 0,06 + 147 · 0,08 + 148 · 0,14 + 149 · 0,21 + 150 · 0,23 + 151 · 0,18 + 152 · 0,08 + 153 · 0,02 = 149,43

Se espera, acudan al aeropuerto para viajar 149,43 pasajeros, para un avión de 148 plazas.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

Cuestión 5: La desviación típica de la variable X vale ...
Sugerencia

- (a) 9,8587
- (b) 2,2531

Has elegido la opción **correcta**.

Para calcular la desviación típica, primero obtendremos la varianza. Es recomendable que elabores una tabla como la que hicimos en el anterior ejercicio resuelto.

x_i	146	147	148	149	150	151	152	153
p_i	0,06	0,08	0,14	0,21	0,23	0,18	0,08	0,02
$x_i^2 \cdot p_i$	1278,96	1728,72	3066,56	4662,21	5175	4104,18	1848,32	468,18

Varianza

= (1278,96 + 1728,72 + 3066,56 + 4662,21 + 5175 + 4104,18 + 1848,32 + 468,18) - 149,43^2

= 22232,13 - 22329,3249 = 97,1949

<u>Desviación típica</u>

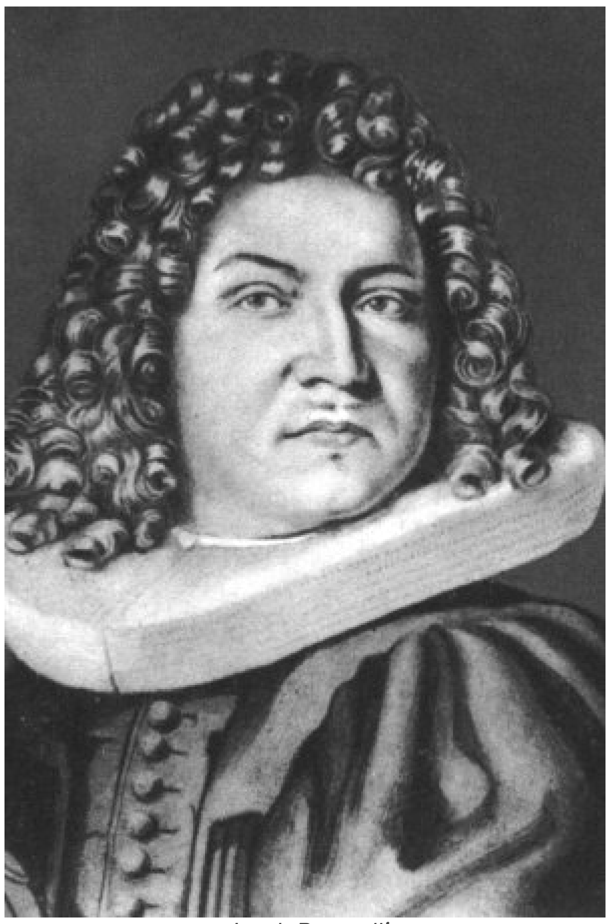
$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{97{,}1949} = 9{,}8587$

No es **correcto**.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

3. Distribución binomial



Jacob Bernoulli
Imagen en Wikimedia Commons bajo CC

Una de las distribuciones de probabilidad discretas mas utilizadas en la práctica es la **distribución binomial o de las pruebas de Bernoulli.** Enunciada por Jacob Bernoulli hacia el año 1700.

Veamos algunos ejemplos de variables que siguen esta distribución:

Número de chicos en una familia con "n" hijos
Número de clientes que anulan la reserva de un hotel, vuelo, restaurante, etc. con "n" habitaciones, asientos, mesas, etc.
Número de piezas defectuosas en un lote de "n" piezas.
Número de preguntas falladas en un test con "n" preguntas.

Importante

Una variable aleatoria discreta sigue una **binomial** si:

1°) Hay un experimento aleatorio que se repite **n** veces con independencia (Tener n=6 hijos, el sexo de cada uno es independiente del anterior, contestar un test de n=30 preguntas el acierto o no, no depende de la cuestión anterior).

2°) En cada prueba solo puede darse dos situaciones: éxito o fracaso (ser varón o no, acertar o no). Las probabilidades de ambos suman uno pero no tienen que ser la misma.

p= probabilidad de obtener éxito

1-p= probabilidad de no obtener éxito (fracaso).

3°) La variable se define como el número de éxitos conseguidos: X = número de éxitos conseguidos en los n experimentos.

Para simplificar, en adelante designamos por **B(n,p)** a la distribución binomial de parámetro n (veces que se repite el experimento) y p (probabilidad de éxito)

Ejemplo:

¿ Cómo viene dada la función de probabilidad de una B(n,p)?

El 10% de los turismos que se vendieron en el 2009 fueron destinados a taxis (según fuentes de una revista nacional de motor). En un día la marca de automóviles TOMOYA de cierta ciudad vendió 3 turismos. Vamos a describir la variable aleatoria X=n.° de turismos destinados a taxis de la marca TOMOYA. Designemos por T (taxi) y F si es para uso particular.

Las probabilidades de que al elegir un coche al azar, éste sea dedicado a taxi o a uso particular serán 0,1 y 0,9 respectivamente:

$$p(T)=0,1 \text{ y } p(F)=0,9$$

Es decir, la variable X se trata de una B(3; 0,1). En la tabla siguiente desarrollamos las probabilidades de X.

Resultados	Probabilidad	n° de éxitos (X)
FFF	(0,9)(0,9)(0,9)=0,729	X=0

FFT	(0,9)(0,9)(0,1)=0,081	X=1
FTF	(0,9)(0,1)(0,9)=0,081	X=1
TFF	(0,1)(0,9)(0,9)=0,081	X=1
FTT	(0,9)(0,1)(0,1)=0,009	X=2
TFT	(0,1)(0,9)(0,1)=0,009	X=2
TTF	(0,1)(0,1)(0,9)=0,009	X=2
TTT	(0,1)(0,1)(0,1)=0,001	X=3

Agrupando los datos por los valores de X la distribución de probabilidad quedaría:

X	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

Si observamos con atención los resultados podemos expresar estos como sigue:

$$p(X=0)=1\bullet(0.10)^0\bullet(0.9)^3$$
$$p(X=1)=3\bullet(0.10)^1\bullet(0.9)^2$$
$$p(X=2)=3\bullet(0.10)^2\bullet(0.9)^1$$
$$p(X=3)=1\bullet(0.10)^3\bullet(0.9)^0$$

Es decir, para el caso de **n** coches y probabilidad **p**:

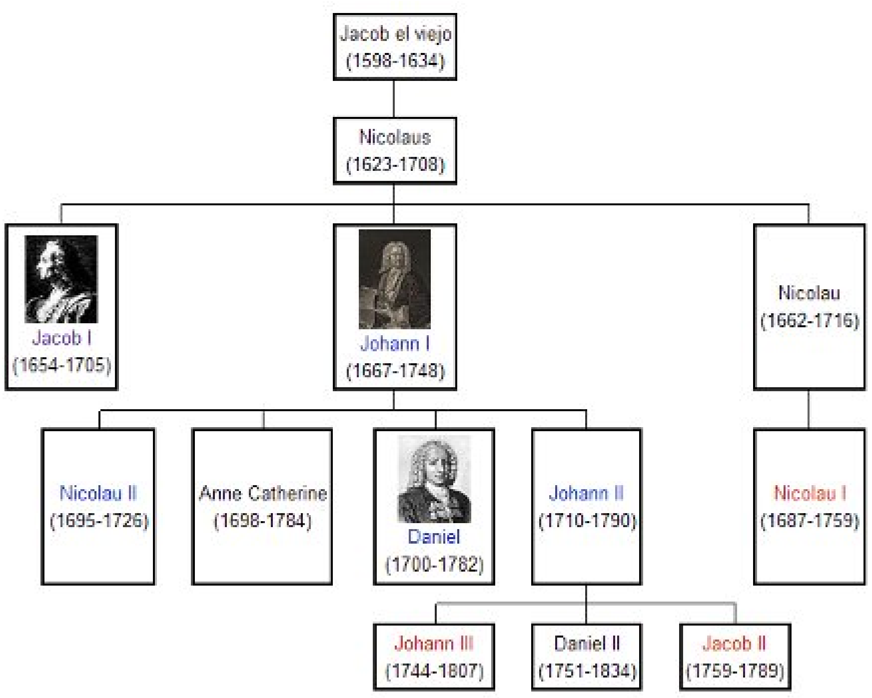
$$p(X=k)=\ (numero\ de\ casos)\bullet p^k\bullet(1-p)^{n-k}$$

El número de casos que se pueden dar con **k** éxitos en **n** experimentos se designa por $\binom{n}{k}$ y en el siguiente apartado veremos cómo se calcula.

Importante

Función de probabilidad de una Binomial B(n,p)

Curiosidad



Los Bernoulli (o Bernouilli) son una familia de matemáticos y físicos suizos procedentes de la ciudad de Basilea, que irrumpió en el mundo científico a finales del siglo XVII.

El fundador de esta familia fue Jacob el viejo, nacido en Amberes (Bélgica), un hugonote que se trasladó a Basilea en 1622 por motivos de persecución religiosa. Se casó tres veces y sólo tuvo un hijo, Nikolaus. Éste se casó y tuvo una docena, de los cuales cuatro llegaron a edad adulta; dos de ellos se convirtieron en matemáticos de primer orden: Jakob, nacido en 1654, y Johann, nacido en 1667. Ambos estudiaron la teoría del cálculo infinitesimal de Leibniz y desarrollaron aplicaciones de la misma.

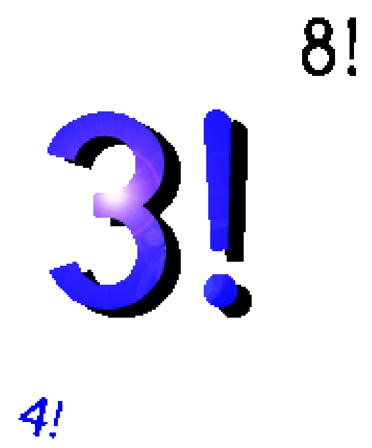
Jakob Bernoulli (Basilea, 27 de diciembre de 1654 - 16 de agosto de 1705), también conocido como Jacob, Jacques o James Bernoulli, fue un matemático y científico. Siendo joven, su padre lo envió a la Universidad de Basilea para estudiar filosofía y teología, con el ánimo de que se convirtiera en teólogo. Pero Jakob continuó, a escondidas, las que eran sus auténticas aficiones la física y las matemáticas, según confiesa en su diario.

Su obra maestra fue Ars Conjectandi (el Arte de la conjetura), un trabajo pionero en la teoría de la probabilidad. La publicó su sobrino Nicholas en 1713, ocho años tras su muerte. Los términos ensayo de Bernoulli y números de Bernoulli son resultado de su trabajo. También existe un cráter en la Luna bautizado cráter Bernoulli en honor suyo y de su hermano Johann.

Para saber más

Existen otras muchas distribuciones de probabilidad de variables discretas basadas en las mismas condiciones de la distribución binomial, es decir, en repetir una serie de veces un experimento con sólo dos posibles resultados, éxito y fracaso. Por ejemplo, en la distribución Geométrica, la variable aleatoria X mide el número de repeticiones del experimento hasta obtener el primer éxito, o la distribución Binomial Negativa, en la que X mide el número de intentos hasta obtener el éxito k-ésimo.

3.1. Números combinatorios



Factorial de un número natural

Se define factorial de **n** y lo denotamos por **n!** al producto de todos los números naturales positivos menores o iguales que **n.** $n! = n(n-1)(n-2)....3.2.1$ En el dibujo observarás tres ejemplos: 3!=3.2.1=6; 4!=4.3.2.1=24 y 8!=8.7.6.5.4.3.2.1=40.320Prueba en tu calculadora (tecla !) y verás como caso curioso que 0!=1.

Número combinatorio Se define número combinatorio $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \bullet (n-k)!}$ y representa, como bien sabes por el apartado anterior, el número de casos distintos de k éxitos en n experimentos.

En el ejercicio del apartado anterior, "Taxis de la marca TOMOYA", el número de casos que la variable toma el valor 2 es de tres. Calculándolo con el número combinatorio sería:

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \bullet (2-1)!} = \frac{3.2.1}{2.1.1} = \frac{6}{2} = 3$

Importante

El número combinatorio:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Es el número de combinaciones distintas de **k** elementos que se pueden formar con **n** elementos.

Propiedades:

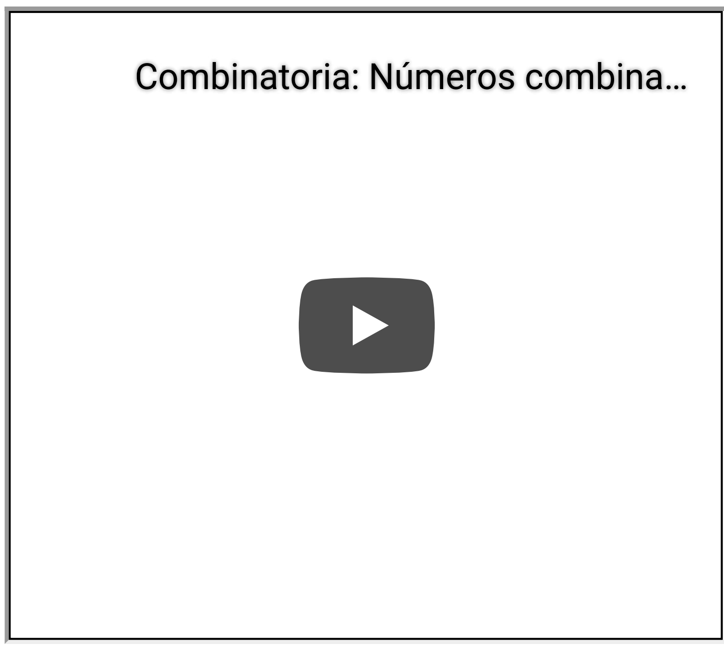
1) $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Ejemplos:

En los siguientes vídeos puedes ver ejemplos de cálculo de números combinatorios.

Vídeo de lasmatematicas.es alojado en Youtube



Vídeo de childtopia alojado en Youtube

Reflexiona

¿Cuántas combinaciones posibles tiene la primitiva? (Te recuerdo que hay en el bombo 49 bolas y que cada combinación consta de 6 bolas.)

Se trata de una combinación de 49 bolas tomadas 6 a 6, es decir:

$$\binom{49}{6}=\frac{49!}{6!\bullet(49-6)!}=13.983.816$$

¡Casi 14 millones de combinaciones!

Curiosidad

Triángulo de Tartaglia

Hoy en día, con la utilización de la calculadora, es fácil calcular cualquier número combinatorio, sin embargo, resulta bastante interesante el cálculo de números combinatorios con el siguiente triángulo, conocido entre otros nombres como Triángulo de Tartaglia, en la que cada número combinatorio se obtiene sumando los dos que tiene encima. En la siguiente imagen aparecen las siete primeras filas.

7 primeras filas del triángulo de Tartaglia

Por ejemplo, para calcular el número combinatorio , sumamos el valor de los números combinatorios que están sobre él, esto es, .

Comprueba lo aprendido

Señala la respuesta correcta:

1.- 5!=

- a) 120
- b) 12
- c) 24

Correcto

Repasa bien

No , vuelve a intentarlo.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

2.- $\binom{5}{3}=$

- a) 12
- b)10

○ c) 8

No es correcto

Correcto

No es correcto

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

3.- Al lanzar un dado 6 veces el número de casos en que puede aparecer 4 doses es:

Sugerencia

○ a) $\binom{6}{2}=15$
○ b) $\binom{6}{4}=15$
○ c) $\binom{6}{5}=6$

Los casos si coinciden pero el número combinatorio no

Efectivamente

No es correcto

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

3.2. Parámetros de la distribución binomial

En el apartado 2.3, ya se ha comentado que cada variable aleatoria se caracteriza por sus parámetros. La B(n, p) no va ha ser distinta a las demás.

¿Recuerdas la tabla de la variable aleatoria que designaba el número de vehículos destinados a taxis?

X	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

Recordando las fórmulas de la esperanza, varianza y la desviación típica, tendremos:

$$E(x) = \Sigma x_i \bullet p_i = 0\cdot(0{,}729) + 1\cdot(0{,}243) + 2\cdot(0{,}027) + 3\cdot(0{,}001) \ = \ 0{,}3$$

Observa que E(x)= 3·(0,1) = **n·p**

De la misma forma para la varianza:

$$\sigma^2 = \Sigma x_i^2 \bullet p_i - E(X)^2 = 0^2\cdot(0{,}729) + 1^2\cdot(0{,}243) + 2^2\cdot(0{,}027) + 3^2\cdot(0{,}001) \ - \ 0{,}3^2 \ = \ 0{,}27$$

También, la varianza depende de **n** y **p,** es decir **,** $\sigma^2 =$ **n·p·(1-p)**=3·(0,1)·(0,9) = 0,27.

El resultado de estas conclusiones lo vamos a ver en el siguiente cuadro resumen de la Binomial. (Recuerda q=1-p)

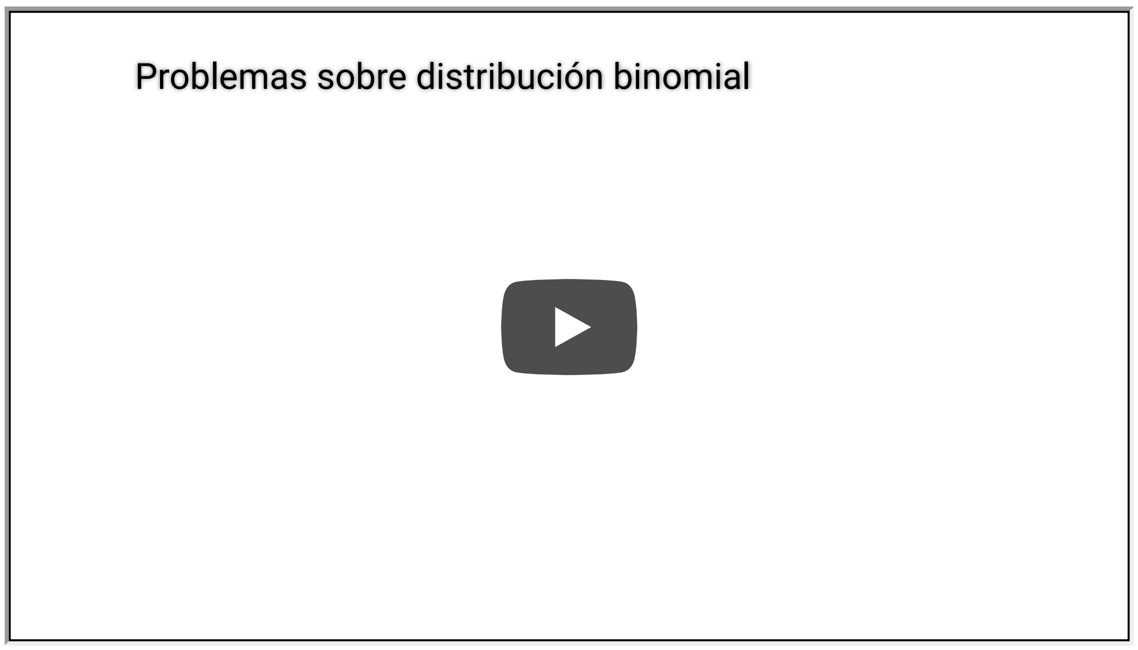
Media o esperanza matemática	**μ=n·p**
Varianza	**σ^2=n·p·q**
Desviación típica	**σ=√σ^2**

Importante

Resumen de una Binomial
Si una variable aleatoria X sigue una binomial de parámetros n y p; B(n, p) podemos decir:
1) **n** es el **número de pruebas** independientes.
2) **p** es la **probabilidad** de obtener un **éxito** y por tanto 1-p la probabilidad de fracaso.
3) X = número de éxitos obtenidos en las n pruebas.
4) La función de probabilidad es $p(X=k) = \binom{n}{k} \bullet p^k \bullet (1-p)^{n-k}$
5) La media E(X)=n·p
6) La varianza
7) La desviación típica $\sigma = \sqrt{n.p.(1-p)}$

Ejemplos:

A continuación te ofrecemos un vídeo. En él encontrarás problemas sobre la binomial:



Vídeo de lasmatematicas.es alojado en [Youtube](#)

Caso práctico

Imagen de OpenClipart-Vectors en [Pixabay](#). [Pixabay License](#)

La probabilidad de que un avión llegue con retraso a un determinado aeropuerto es de 0,012. En una hora llegan al aeropuerto 8 aviones. ¿Cuál es la probabilidad que ninguno llegue con retraso? ¿Cuál es la probabilidad de que alguno llegue con retraso? ¿y cuál es la probabilidad de que lleguen dos o menos con retraso?

Si en un día se esperan la llegada de 120 aviones ¿qué media de aviones llegarán con retraso? ¿Cuál sería en este caso la desviación típica?

En el primer caso se trata de una Binomial B(8; 0,012); su función de probabilidad es:

$p(X=k)=\binom{8}{k}\bullet(0{,}012)^k\bullet(0{,}988)^{n-k}$

La probabilidad de que ninguno llegue con retraso será

$$p(X=0)=\binom{8}{0}\bullet(0{,}012)^0\bullet(0{,}988)^8=0{,}908$$

La que alguno llegue es la complementaria de ninguno;

$$P(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-0{,}908=0{,}092$$

La probabilidad de que lleguen dos o menos con retraso:

$p(X\leq 2)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=\binom{8}{0}\bullet(0{,}012)^0\bullet(0{,}988)^8+\binom{8}{1}\bullet(0{,}012)^1\bullet(0{,}988)^7+\binom{8}{2}\bullet(0{,}012)^2\bullet(0{,}988)^6=0{,}999$

Para la segunda parte tendríamos una B(120; 0,012); n=120, p=0,012, 1-p=0,988 .

La media de aviones que llegarán con retraso ese día será:

$$E(X)= n\cdot p = 120\cdot 0{,}012 = \mathbf{1{,}44}$$

La desviación típica será:

$$\sigma = \sqrt{120\cdot(0{,}012)\cdot(0{,}988)} = 1{,}19$$

Comprueba lo aprendido

El 3% de la población tiene el grupo sanguíneo B^- . ¿Cuántas personas se esperan tener en España (Población 44.000.000 aprox.)?

- a) Ninguna por que es muy raro ese grupo
- b)1.320.000
- c) 1.320

Pobrecitos los que lo tengan y tengan que hacerse una transfusión. Importamos sangre China

¡Correcto! n=44.000.000 p=0,03 E(X)=n·p=1.320.000

¿No te faltan ceros?. Menos mal que el mío es B^+, que si no lo tengo crudo.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

En las mismas condiciones ¿qué probabilidad hay de que en una clase de 30 alumnos al menos uno tenga ese grupo sanguíneo?

- a) 0,60
- b) 0
- c) 0,3

¡Correcto!

No es correcto

No es correcto

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

¿Qué probabilidad hay de encontrar dos con ese mismo grupo sanguíneo en una reunión de 4 amigos?

- a) 0,0051
- b) 0,051
- c) 0,51

Muy poca, pero ¡correcto!

No es correcto

No es correcto

Solución

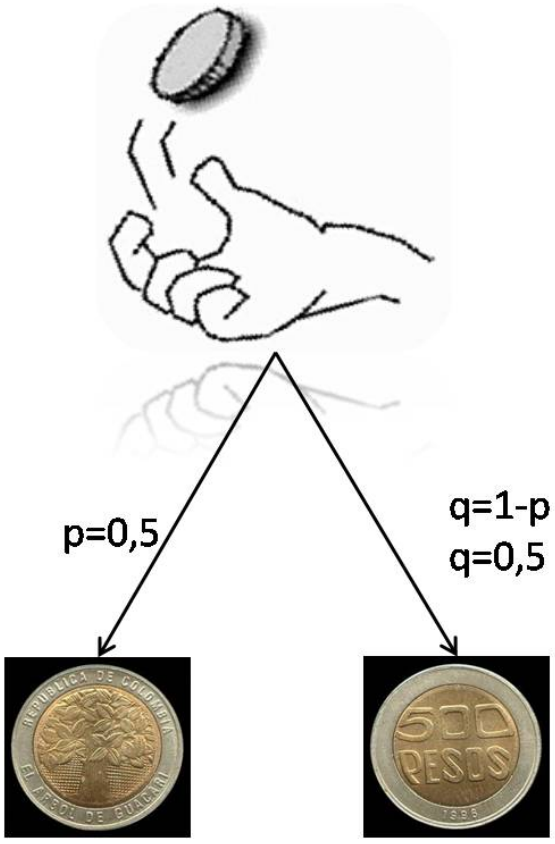
1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Para saber más

A modo de resumen, siguiendo el enlace verás y repasarás todo lo que hay que saber sobre distribución binomial.

En la siguiente página aparecen varios ejemplos resueltos y puedes practicar el cálculo de probabilidades en una binomial.

3.3. Variable de Bernouilli



Un caso a destacar en las variables aleatorias es la **variable de Bernouilli**. Si lanzamos una vez una moneda, un dado, etc. Y designamos por 1 el éxito y 0 el fracaso, tendríamos la variable aleatoria mencionada. Ésta queda determinada por la siguiente tabla:

X	0	1
p_i	1-p	p

Si observamos con atención se trata de un caso particular de la binomial, en este caso B(1,p) y por tanto su distribución quedaría:

$P(X=0)=1-p$

$P(X=1)=p$

Caso práctico

¿Qué probabilidad hay que el primer vehículo que pase por un determinado punto sea de la marca AA, si el porcentaje de vehículos vendido de esa marca es de un 15%?¿ Y que no sea de esa marca?

Se trata de una B(1; 0,15). La probabilidad de éxito p(X=1)=0,15 y la de que no sea de la marca AA será p(X=0)=0,85

Comprueba lo aprendido

El 55% de los habitantes de una ciudad son mujeres. ¿qué probabilidad hay que la primera persona que pase por mi puerta sea mujer?

- a) Depende si vivo en un barrio de hombres
- b) 0,45
- c) 0,55

¡Venga no me lo pongas difícil!

¡Lee de nuevo el apartado!

¡Bien! Así se las ponían a Fernando VII

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

En mi casa vivimos 4 personas . El porcentaje de llamadas que son para mí es de un 1%. Si suena el teléfono una vez ¿qué probabilidad tengo de que no sea para mí?

- a) 0,99
- b) 0,1
- c) 1,6

¡Muy bien! Por eso no contesto cuando suena.

¡No me lo creo!

Es evidente que esa cifra no es una probabilidad.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Resumen

Importante

Una **variable aleatoria** es una función que asocia a cada elemento del espacio muestral un número real. Por lo tanto, toma valores numéricos reales que vienen dados por el resultado de un experimento aleatorio.
Por ejemplo, el número de pacientes que atiende un médico en la consulta durante una semana, el tiempo que esperamos para pagar en la caja de un supermercado, el número de llamadas al 112 en el transcurso de una hora, ...
Las variables aleatorias se simbolizan con letras mayúsculas (X, Y, Z).

Las variables aleatorias, dependiendo de los valores que toman, pueden clasificarse en:

Variables discretas: Son aquellas que, aunque también puedan tomar valores infinitos, entre un valor y el siguiente no es necesario pasar por los puntos intermedios. Suelen estar asociadas a experimentos aleatorios en que se *cuenta* algo.

Ejemplo: El número de monedas en una mano de los chinos puede ser 2 y en otra 3, sin embargo, nunca tomará ningún valor entre 2 y 3.

Variables continuas: Pueden tomar todos los valores de un intervalo. Son aquellas en las que necesariamente, para pasar de un valor a otro, deben tomar los infinitos valores intermedios entre ellos. Suelen estar asociadas a experimentos aleatorios en que se mide algo.

Ejemplo: Si dos personas pesan exactamente 55 y 60 kg, entre ellas pueden haber personas que pesen 55,2 kg, otra que pese 57,4 kg, otra con 58 kg, ...

Importante

Suponemos que tenemos una variable aleatoria discreta X con valores $x_1, x_2, ..., x_k$, y
conocemos las siguientes probabilidades $p(X= x_1) = p_1$, $p(X= x_2) = p_2$, ..., $p(X= x_k) = p_k$.
Se define su **función de probabilidad** como la ley o aplicación que asocia a cada valor x_i su probabilidad $p(X=x_i)=p_i$,
verificando:
1) Son siempre positivas: $p_i > o$
2) La suma de todas, es igual a uno: $p_1+ p_2+ p_3+ ....+ p_K = 1$

Dada una variable aleatoria discreta (X) se define su **función de distribución** como:

$F(x) = p(X \leq x)$, que asocia a cada número (x) la probabilidad acumulada hasta él.

Importante

Dada una variable aleatoria discreta, X, que toma los valores: $x_1, x_2, x_3, ... , x_k$ y dada su función de probabilidad asociada:

$p(X=x_i) = p_i$, podemos calcularle los siguientes **parámetros**, cuyas fórmulas se detallan:

Media o esperanza matemática: $\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_k \cdot p_k = \Sigma x_i \cdot p_i$ (También se representa como E(x))
Puede interpretarse como el valor esperado o medio que toma la variable o, tambien, como el valor central de la distribución.

Varianza: $s^2 = \Sigma x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$ (También se representa con Var(X) o V(x))

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{s^2}$ (También se representa por DT(x))

Importante

Una variable aleatoria discreta sigue una **binomial** si:

1°) Hay un experimento aleatorio que se repite **n** veces con independencia (Tener n=6 hijos, el sexo de cada uno es independiente del anterior, contestar un test de n=30 preguntas el acierto o no, no depende de la cuestión anterior).

2°) En cada prueba solo puede darse dos situaciones: éxito o fracaso (ser varón o no, acertar o no). Las probabilidades de ambos suman uno pero no tienen que ser la misma.

p= probabilidad de obtener éxito

1-p= probabilidad de no obtener éxito (fracaso).

3°) La variable se define como el número de éxitos conseguidos: X = número de éxitos conseguidos en los n experimentos.

Para simplificar, en adelante designamos por **B(n,p)** a la distribución binomial de parámetro n (veces que se repite el experimento) y p (probabilidad de éxito)

Función de probabilidad de una Binomial B(n,p)

Importante

El número combinatorio:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
Es el número de combinaciones distintas de **k** elementos que se pueden formar con **n** elementos.

Propiedades:
1) $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$
2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Importante

Resumen de una Binomial
Si una variable aleatoria X sigue una binomial de parámetros n y p; B(n, p) podemos decir:
1) **n** es el **número de pruebas** independientes.
2) **p** es la **probabilidad** de obtener un **éxito** y por tanto 1-p la probabilidad de fracaso.
3) X = número de éxitos obtenidos en las n pruebas.
4) La función de probabilidad es $p(X=k) = \binom{n}{k} \bullet p^k \bullet (1-p)^{n-k}$
5) La media E(X)=n·p
6) La varianza: σ^2=n·p·(1-p)
7) La desviación típica $\sigma = \sqrt{n.p.(1-p)}$