Aritmética: Números reales

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

1º Bachillerato

Contenidos

Aritmética

Números reales

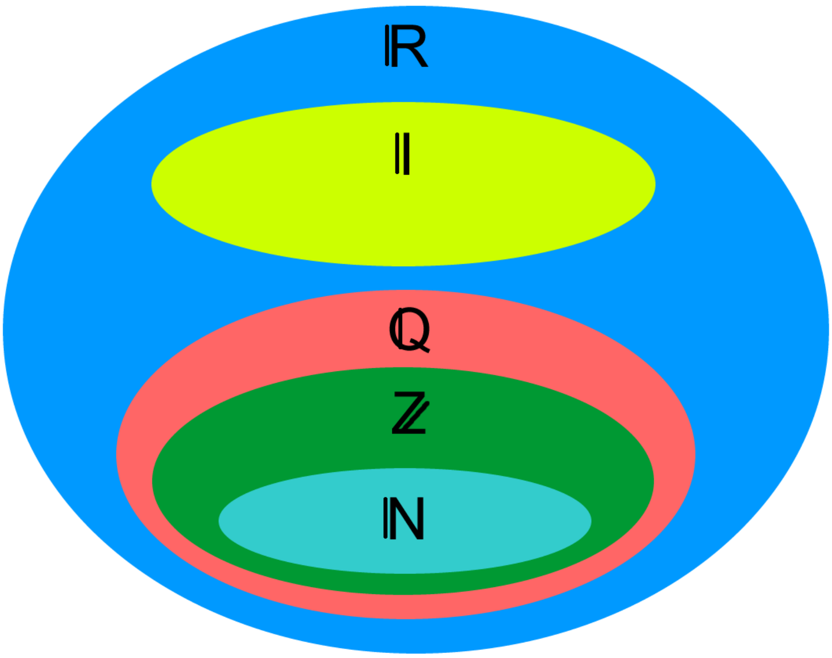
1. Números reales

Uno de los aspectos más sorprendentes de la historia de los números es que cada nueva invención es ampliación de las precedentes y de alguna manera las completa.

Los números enteros incluyen los naturales, y los números racionales incluyen los números enteros.

La idea de número es común a todos ellos. Mas por otra parte la historia de la invención de los números no es lineal, está llena de vicisitudes, y batallas encarnizadas. Hoy día sorprende leer lo que se dijo de los números negativos, los siglos que tuvieron que pasar para la introducción plena del sistema decimal en Occidente.

El viaje que empezamos con los números naturales, siguió con los números enteros, ¿habrá concluido con los números racionales? La respuesta a tal pregunta es NO.



1.1. De los irracionales a los reales

Fotografía en Pxhere. Licencia CC

Ya los antiguos griegos descubrieron que había objetos, cuyas dimensiones no podían expresarse con los números racionales, una vez elegida una unidad. Llamaron a tales magnitudes inconmensurables, que no pueden medirse.

La unión del sustantivo ‘magnitudes’ y el atributo ‘inconmensurables’ parece encerrar en sí misma una contradicción o paradoja. Constituyen el equivalente en lenguaje geométrico de lo que en lenguaje numérico se designa hoy día como número irracional.

Un número irracional contra lo que puede parece a simple vista no es un número absurdo, ilógico, sino un número que no es racional, que no puede expresarse como cociente de números enteros.

Importante

El conjunto de los irracionales, **I**, está formado por los números que **no pueden ser expresados como fracción**. Su expresión decimal tiene un número infinito de cifras que no se repiten de forma periódica.

Existen infinitos números irracionales. Algunos de ellos por su importancia histórica y práctica, han llegado a adquirir un nombre propio.

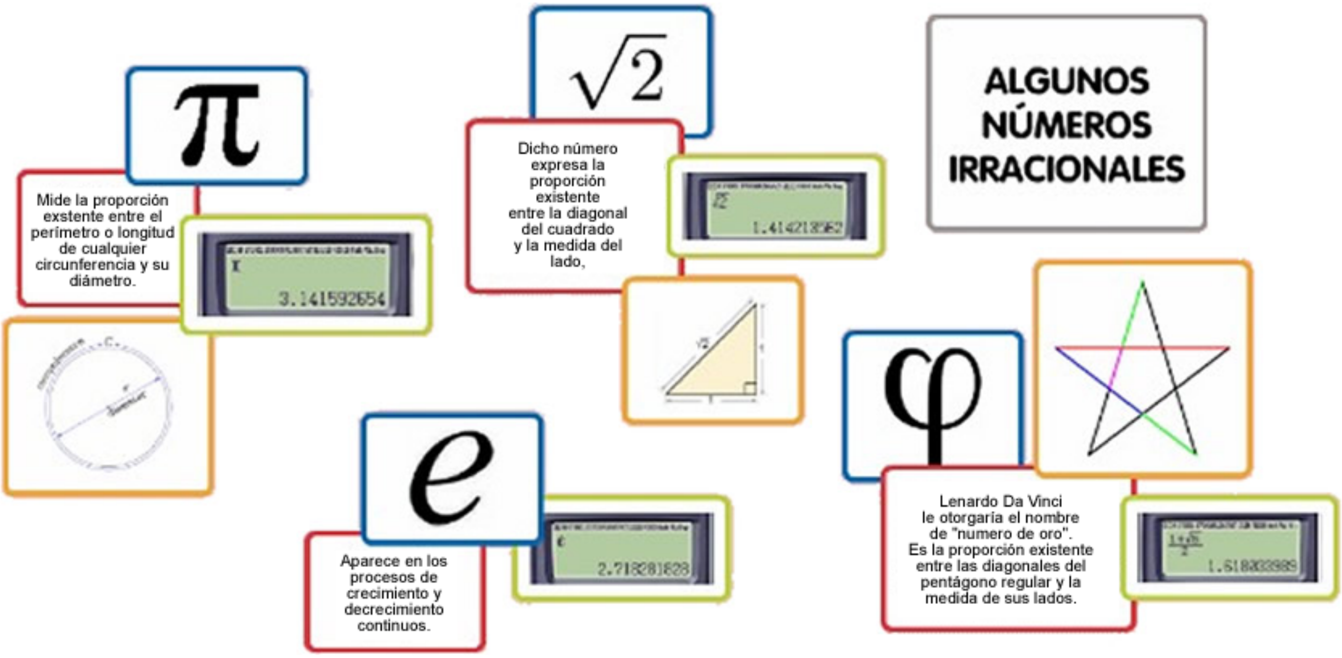


Imagen de elaboración propia.

¿Cómo escribir los números irracionales?

Si te fijas en la imagen anterior, el número de oro o número áureo phi (φ o ϕ), viene expresado a través de una suma y un cociente de un número irracional $\sqrt{5}$, con dos números racionales, pues bien, la irracionalidad de phi, no es casualidad.

Importante

Si a un número irracional le sumamos (restamos) o lo multiplicamos (dividimos) por un número racional, el resultado es un número irracional.

Según el importante anterior, en algunos casos podremos escribirlos de forma simbólica, basándonos en otros números irracionales. Pero en el caso en el que recurramos a su expresión decimal, escribimos el número hasta una determinada cifra e indicamos mediante puntos suspensivos que los decimales continúan. Esto nos permitirá no confundirlos con números decimales exactos.

Los números reales

Importante

Importante

Se llama número real a cualquier expresión decimal, ya tenga una cantidad finita o infinita de cifras.

El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$.

Se clasifican en:

- Racionales (pueden expresarse como cociente de números enteros)
- Irracionales (no racionales)

El conjunto de los números reales se puede representar como si de un cuadro de Mondrian se tratara:

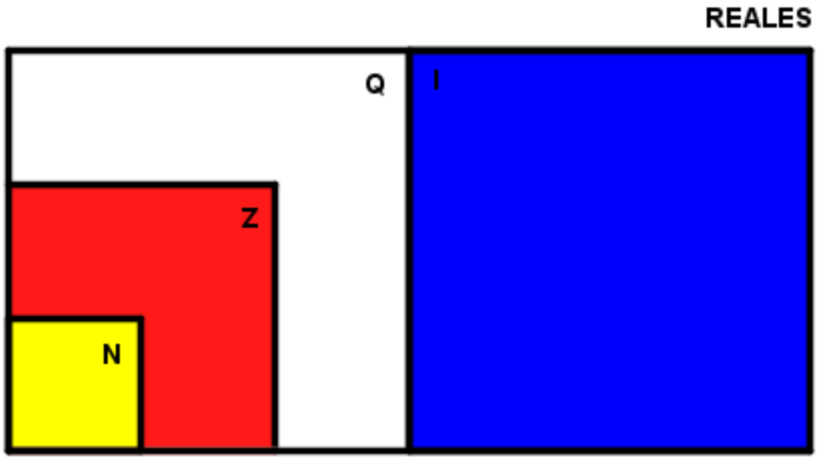


Imagen de elaboración propia.

Si te fijas, uno de los aspectos más sorprendentes de la historia de los números es que cada nueva invención es ampliación de las precedentes y, de alguna manera, las completa. Los números enteros incluyen los naturales, los números racionales incluyen los números enteros y los reales incluyen los racionales y los irracionales. En el siguiente vídeo puedes verlo con más claridad, además de practicar con algunos ejemplos de clasificación de números.

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/oOSEQgwXC5c

Vídeo de TutoMate alojado en Youtube.

Aunque parezca increíble la historia de los números no termina con los números reales. Existe otro conjunto de números llamado números complejos, que como no podía ser de otra forma, está repleto de números imaginarios.

Comprueba lo aprendido

Veamos si has entendido bien los conceptos de número racional, irracional y real. Responde si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $\sqrt{5}$ es racional.

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Ten en cuenta que es la raíz cuadrada de un número natural que no es cuadrado perfecto.

b. $\frac{5}{3}$ es racional.

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Fíjate bien, es una fracción de dos números enteros.

c. 3,242424... es un número irracional.

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Observa que es un número decimal con infinitas cifras periódicas.

d. Todos los números anteriores son reales.

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Los reales son todos los racionales e irracionales.

Curiosidad

Sobre el nombre de irracional

Los nombres de racionales e irracionales viene de las matemáticas griegas.

Racional tiene su origen en razón, que no tiene otro sentido mas que proporción o división. Un número racional es el que se puede expresar como proporción de dos números enteros. Por tanto, un irracional es el número que no se puede escribir como el cociente de dos enteros.

Para entender mejor la diferencia entre racionales e irracionales, veamos la imagen que propone el profesor Fernando Corbalán: "*si asignamos un sonido a cada cifra y hacemos sonar los decimales de un racional, escucharíamos una melodía que se va repitiendo, como el estribillo de una canción. En el caso de los números irracionales las notas sonarían sin ton ni son, y no podríamos obtener jamás una melodía*".

1.2. Potencias y raíces

Las potencias. ¿Una nueva operación?

Al igual que la multiplicación es la suma de varias veces de un mismo número, la potenciación es el producto resultante de multiplicar una o varias veces ese número.

Imagen por luctheo en Pixabay. Licencia CC

Por ejemplo, si sabemos que las cerezas vienen en racimos de 2 y tenemos 4 racimos, para saber el número de cerezas que tenemos en total, no tendríamos que contarlas una a una, podríamos recurrir a las potencias: $2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2=2^4=16$.

Importante

Las potencias se representan a^b donde a es el número que se multiplica (**base**) y b el número de veces que se hace el producto (**exponente**).

Mira el siguiente vídeo para hacerte una idea:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/yf6l5CmbSJk

Vídeo de childtopia alojado en Youtube

Comprueba lo aprendido

A continuación te dejamos un applet para que practiques estos conceptos:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_numeros_enteros-JS/1q3_ejercicios_resueltos_4a.htm

Escena de Rita Jiménes Igea en Proyecto Descartes. Licencia CC

Si observas detenidamente los ejemplos anteriores puedes sacar conclusiones dependiendo de si la potencia afecta al signo del número entero o no.

Importante

---

1. Si el signo está dentro del paréntesis, formará parte de la base y por consiguiente se repetirá tantas veces como nos indica el exponente.

2. Si el signo está fuera del paréntesis, no forma parte de la base y por consiguiente se añadirá al resultado de la potencia.

3. Si la base es positiva, el resultado será positivo.

4. Si la base es negativa y el exponente es par, el resultado será positivo.

5. Si la base es negativa y el exponente es impar, el resultado será negativo.

Raíces cuadradas exactas

La operación inversa a la potenciación es la radicación. En ella, conocidos el resultado de la potencia y su exponente, hemos de calcular la base.

Imagen de Anerma en [Pixabay](). Licencia [CC]()

La raíz cuadrada de un número a es otro número b tal que, al elevarlo al cuadrado, nos da a.

$$\sqrt{a} = b \rightarrow b^2 = a$$

Al número a se le llama **radicando**.

<u>Ejemplos:</u>

$$\sqrt{36} = 6 \rightarrow 6^2 = 36$$
$$\sqrt{100} = 10 \rightarrow 10^2 = 100$$

Al calcular raíces cuadradas hay que tener en cuenta lo siguiente:

Si el **radicando** es **positivo** hay **dos raíces**:

$$\sqrt{49} = 7 \quad \text{porque} \quad 7^2 = 49$$
$$\sqrt{49} = -7 \quad \text{porque} \quad (-7)^2 = 49$$

Se escribe $\mathbf{\sqrt{49} = \pm 7}$

Si el **radicando** es **negativo no hay raíz**:

$$\sqrt{-49} = b \qquad \mathbf{b^2 = -49 \;\; \text{no es posible}}$$

porque b^2 es positivo y -49 es negativo.

Importante

El cuadrado de un número entero se denomina **cuadrado perfecto**. La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es el mismo número:

$5^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} = 5$. En este caso se dice que la **raíz cuadrada es exacta**

Comprueba lo aprendido

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_numeros_enteros-JS/1q3_ejercicios_resueltos_4b.htm

En los próximos temas, veremos cómo calcular raíces cuadradas no exactas de forma aproximada.

Ejercicio resuelto

Calcula las siguientes potencias:

a. 2^2

b. $(2)^2$

c. $(-2)^2$

d. -2^2

e. $(-2)^3$

f. -2^3

a. $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

b. $(2)^2 = 2 \cdot 2 = 4$

c. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$

d. $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$

e. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

f. $-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$

Para saber más

Muchos son ya los usuarios de las redes sociales, y cada vez más son los que no solo las usan para estar en contacto con sus conocidos o amigos. Te proponemos que busques perfiles asociados a las curiosidades matemáticas, como Matesy+ o matematicascercanas, te ayudarán a ver el mundo desde otra perspectiva:

1.3. Radicales. Operaciones

Hemos llegado a uno de los apartados más importantes del tema: **la noción y el manejo de radicales**.

Su importancia para nosotros no sólo se debe al papel que jugaron en el descubrimiento de los números irracionales, sino también por la frecuencia con que aparecen en la prueba que estamos preparando.

Ya hemos estudiado en el tema anterior operaciones como la suma, y la multiplicación, así como sus inversas, la resta y la división. Pero no podemos dejarnos en el tintero la potenciación. Observa el siguiente cuadro:

Potenciación	Radicación
Conocemos la base, b, y el exponente, n, y calculamos la potencia: $b^n = a$	Conocemos la potencia, a, y el exponente, n y calculamos la base: $\sqrt[n]{a} = b$

La radicación es una operación relacionada con la potenciación, y se representa utilizando el símbolo √ que proviene de la inicial de la palabra en latín, radix. En muchas ocasiones da como resultado un número irracional (recuerda que la raíz cuadrada de 2 fue posiblemente el primer número irracional conocido).

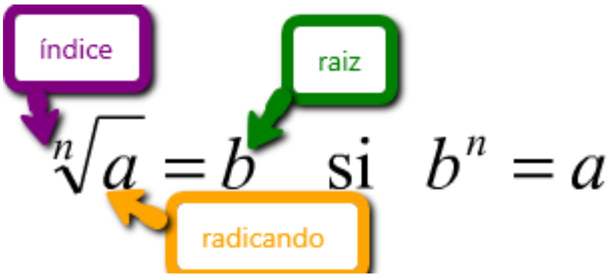
Importante

Una potencia de exponente fraccionario $a^{\frac{m}{n}}$ es un radical de índice n y radicando a^m, y se denota por: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

En consecuencia, las raíces pueden expresarse como potencias de exponente fraccionario. Y, por tanto, podemos efectuar los cálculos utilizando las propiedades de las fracciones y las reglas básicas de las potencias.

Importante

Decimos que la raíz **n-ésima** de un número a es b si cumple que b elevado a n es a. Es decir:



$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a$$

Imagen de elaboración propia.

Comprueba lo aprendido

La raíz cuadrada de 4:

- No tiene solución.
- Tiene una única solución y es 2.
- Tiene dos soluciones: 2 y -2.

Incorrecto

Incorrecto

Opción correcta

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

La raíz cuadrada de -6:

Carece de sentido dentro de los números reales.

- Tiene una única solución y es -3.
- Tiene dos soluciones.

Opción correcta

Incorrecto

Incorrecto

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

La raíz cúbica de un número negativo:

- No existe.
- Existe y tiene una única solución del mismo signo que el radicando.
- Tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa.

Incorrecto

Opción correcta

Incorrecto

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

3. Incorrecto

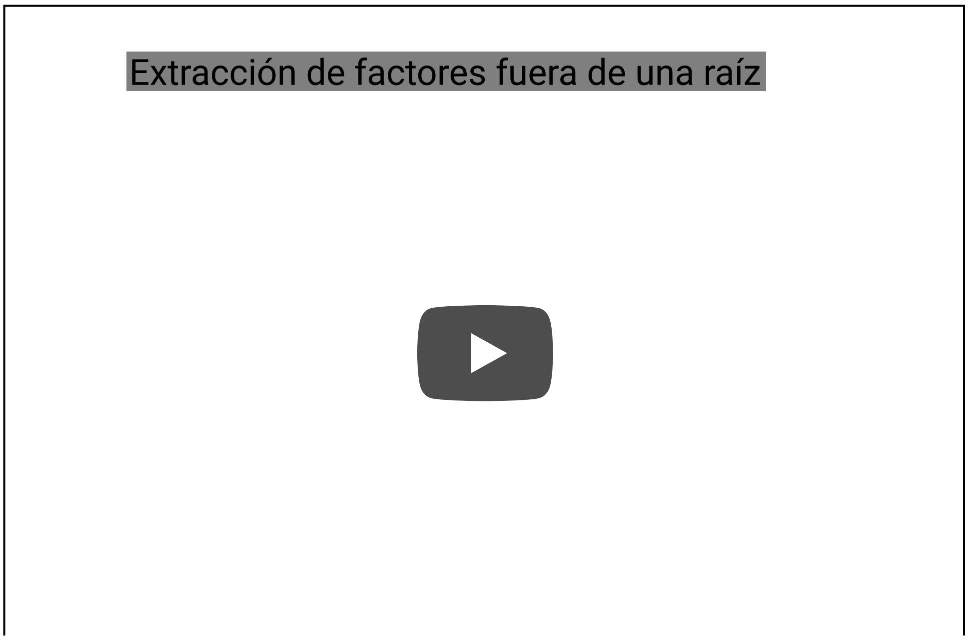
Simplificar radicales

Simplificar un radical es escribirlo en la forma más sencilla, de manera que:

- El índice y el exponente sean primos entre sí.
- No se pueda extraer ningún factor del radicando.
- El radicando no tenga ninguna fracción.

Veamos en un vídeo cómo hacerlo:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/W-c4eVRUrVE](https://www.youtube.com/embed/W-c4eVRUrVE)



Vídeo de TutoMate alojado en Youtube

Comprueba lo aprendido

En la siguiente escena del proyecto edad puedes practicar con la simplificación de radicales:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_radicales-JS-LOMCE/q2_resueltos3b.htm

Escena de Miguel Angel Cabezón Ochoa en Proyecto Descartes. Licencia CC

Suma y resta de radicales

En el siguiente vídeo puedes ver cómo sumar radicales:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/7ORaozkauxg

Vídeo de TutoMate alojado en Youtube

Comprueba lo aprendido

En la siguiente escena del proyecto edad puedes practicar con la suma y resta de radicales:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_radicales-JS-LOMCE/q2_resueltos4a.htm

Escena de Miguel Angel Cabezón Ochoa en Proyecto Descartes. Licencia CC

Producto y división de radicales

Para **multiplicar radicales o dividir radicales** se necesita que tengan el mismo índice, cuando esto ocurre el resultado:

- De la multiplicación es un radical del mismo índice y de radicando el producto de los radicandos.
- De la división es un radical con el mismo índice y radicando el cociente de los radicandos.

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/avy7Me0Vi1I

Vídeo de TutoMate alojado en Youtube

Ejercicio resuelto

Opera y simplifica:

a. $\sqrt{3}+3\sqrt{27}-\sqrt{75}$

Habrá que descomponer los radicandos en producto de factores primos, e intentar extraer factores de las raíces, para ver si se consiguen radicandos iguales y se puedan realizar las sumas y restas.

$$\sqrt{3}+3\sqrt{27}-\sqrt{75}=\sqrt{3}+3\sqrt{3^3}-\sqrt{3\cdot 5^2}=\sqrt{3}+3\sqrt{3^2\cdot 3}-5\sqrt{3}=\sqrt{3}+3\cdot 3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(1+9-5)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

En este caso al tener $\sqrt{3}$ en todos los sumandos, se pueden realizar las sumas y restas.

b. $2\sqrt{12}+5\sqrt{3}-10\sqrt{7}$

$$2\sqrt{12}+5\sqrt{3}-10\sqrt{7}=2\sqrt{2^2\cdot 3}+5\sqrt{3}-10\sqrt{7}=2\cdot 2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-10\sqrt{7}=4\sqrt{3}+5\sqrt{3}-10\sqrt{7}=9\sqrt{3}-10\sqrt{7}$$

En este caso, al ser distintos radicandos, no se puede realizar la resta.

c. $\sqrt[4]{\sqrt[9]{\frac{6^{11}}{3^{11}}}}$

En primer lugar habrá que intentar simplificar la fracción, utilizando propiedades de las potencias de exponente natural, y luego aplicar la propiedad de la raíz de una raíz.

$$\sqrt[4]{\sqrt[9]{\frac{6^{11}}{3^{11}}}}=\sqrt[4]{\sqrt[9]{\left(\frac{6}{3}\right)^{11}}}=\sqrt[4]{\sqrt[9]{2^{11}}}=\sqrt[36]{2^{11}}$$

Ejercicio resuelto

a. Pasa a radicales con índice común las raíces $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{2^3}$; $\sqrt[10]{7}$.

Calculamos el mínimo común múltiplo de los índices: m.c.m.(2, 4, 10) = 20, luego las raíces $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{2^3}$; $\sqrt[10]{7}$ se transforman respectivamente en $\sqrt[20]{5^{10}}$, $\sqrt[20]{2^{15}}$ y $\sqrt[20]{7^2}$.

b. Pasa a radicales con índice común, y ordena de menor a mayor, las raíces $\sqrt{3^3}$, $\sqrt[6]{3^4}$, $\sqrt[12]{3^7}$

Como m.c.m.(2, 6, 12) = 12, las raíces $\sqrt{3^3}$, $\sqrt[6]{3^4}$, $\sqrt[12]{3^7}$ se convierten respectivamente en $\sqrt[12]{3^{18}}$, $\sqrt[12]{3^8}$ y $\sqrt[12]{3^7}$, luego $\sqrt[12]{3^7} < \sqrt[12]{3^8} < \sqrt[12]{3^{18}}$ y por tanto:

c. Calcula $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{15}$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{15} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3\cdot 5} = \sqrt[6]{2^3}.\sqrt[6]{3^2.5^2} = \sqrt[6]{2^3.3^2.5^2} = \sqrt[6]{8\cdot 9\cdot 25} = \sqrt[6]{1800}$$

d. Calcula $\sqrt{6}\ :\ \sqrt[4]{3}$

$$\sqrt{6}\ :\ \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{6^2}\ :\ \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{36:3} = \sqrt[4]{12}$$

2. La ordenación de los números reales

La recta real

A estas alturas ya habrás descubierto que todos los tipos de números los hemos podido ir representando en una recta. Pues bien, a este objeto matemático mitad numérico y mitad geométrico se le llama recta real. Además, nos permite ordenar los números, puesto que diremos que un número ***a*** es menor que otro ***b***, ***a* < *b***, si al representarlos ***a*** está a la izquierda de ***b***.

Los números reales llenan completamente la recta, de tal forma que todo punto de la recta real tiene una expresión entera o decimal (exacta, periódica o no periódica). Recuerda además que según el tipo de número con el que estemos trabajando utilizamos un método u otro de representación. En **este enlace** te recordamos la forma de representar los números reales.

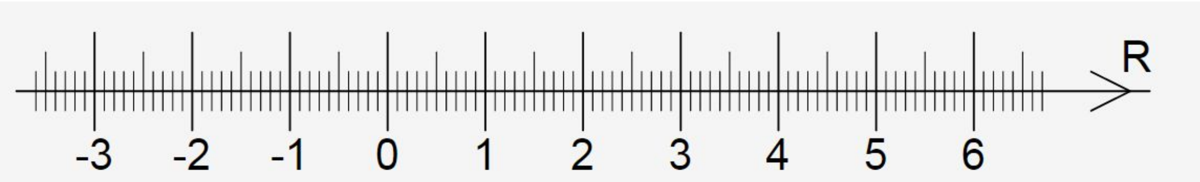


Imagen de Dnu72 en CC search. Licencia CC

2.1. Intervalos y semirrectas

Intervalos

Observa la siguiente imagen, referida a la calificación de las películas según su contenido y su adecuación al público según la edad.

a) Apta para todos los públicos

b) No recomendada para menores de 7 años

c) No recomendada para menores de 12 años

d) No recomendada para menores de 16 años

e) No recomendada para menores de 18 años

Imagen de elaboracion propia

Si te fijas, no hablamos de que un determinado film es apto para personas de exactamente 12 años, sino para personas mayores de o menores de. Dicho de otra forma, la cinta no está recomendada para personas menores de 12 años, o para edades comprendidas de los 0 a los 12.

Importante

Si $a < b$ se llama **intervalo** de extremos a y b al conjunto de números que están entre a y b en la relación de orden. Según contengan o no los extremos los intervalos se llaman cerrados, abiertos o semicerrados o semiabiertos si contienen solamente uno de los extremos.

Es decir, los intervalos son "trozos" de la recta real.

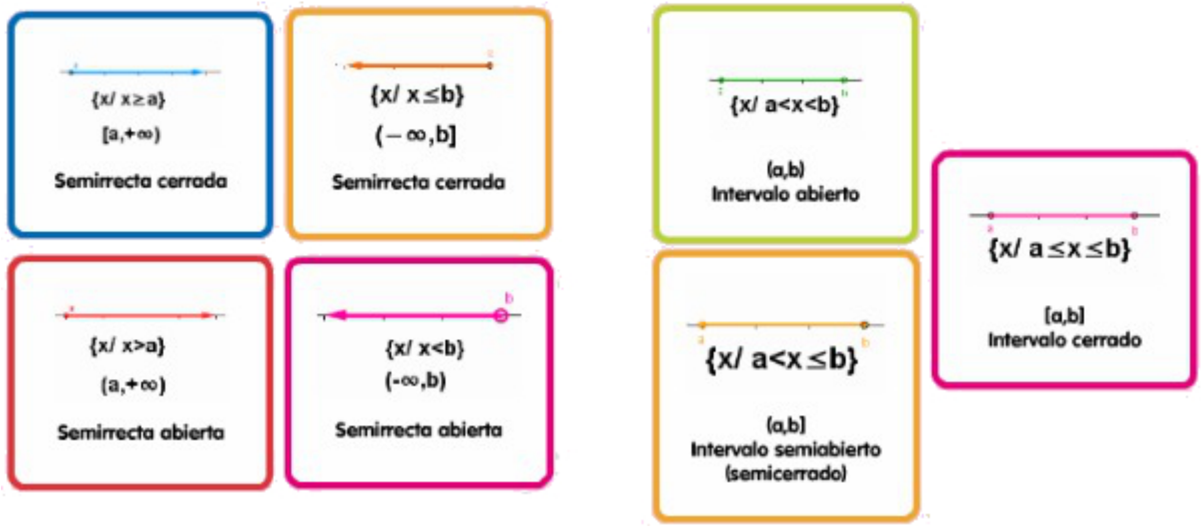


Imagen de elaboración propia

Si observas la imagen anterior, tenemos distintas formas de expresar un intervalo:

- Gráficamente: utilizando la recta real, e indicando los extremos del intervalo.
- A través de conjunto y desigualdades
- Notación de intervalo. En este caso observa que en el caso de las semirrectas, el infinito nunca está contenido.

En el siguiente vídeo, puedes ver los diferentes tipos.

Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/f8byoi_6NG4

Vídeo de Tuto Mate alojado en Youtube.

Ejercicio resuelto

Ejercicio resuelto

Escribe como intervalo los siguientes conjuntos de números reales:

a) Los números que están entre 3 y 10:

Como no nos indican que el 3 y el 10 sean parte del conjunto, nuestro intervalo es **(3 , 10)**. Es decir, son los números x que cumplen: $3 < x < 10$.

b) Los números mayores que 0 y menores o iguales que 8.5:

El 0 no está incluido, pero el 8.5 sí. Por tanto el intervalo estará abierto en 0 y cerrado en 8.5: **(0 , 8.5]**. Este intervalo está formado por los números x que cumplen: $0 < x \leq 8.5$.

c) Los números menores que 2/3:

La fracción 2/3 no está incluida, y recuerda que $+\infty$ y $-\infty$ siempre van abiertos, luego será el intervalo **($-\infty$, 2/3)**. Este intervalo está formado por los números x que cumplen: $x < 2/3$.

Comprueba lo aprendido

¿Cuál es el intervalo que representa los números que cumplen $2 \leq x < 5$?

- ○ [2 , 5]
- ○ (2 , 5)
- ○ [2 , 5)

Incorrecto

Incorrecto

Opción correcta

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

Indica qué intervalo representa a los números mayores que -2:

- (-2 , +∞)
- (-2 , +∞]
- (-∞ , -2)

Opción correcta

Incorrecto

Incorrecto

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Indica cuál de los siguientes números pertenecen al intervalo [3.26 , 3.42):

- 3.423
- 3.31
- 3.2

Incorrecto

Opción correcta

Incorrecto

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

Al igual que operábamos con números, con los intervalos podemos hacer algunas operaciones:

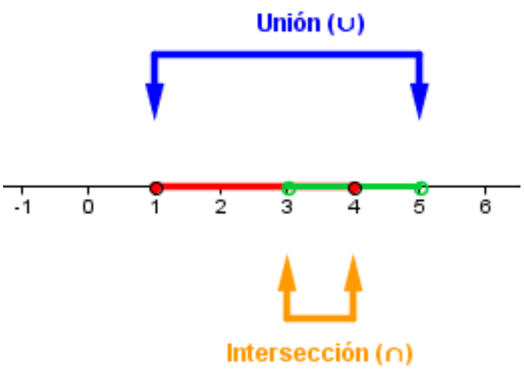


Imagen de elaboración propia

a. **Unión** (U): al unir dos intervalos, consideramos los números que están en uno u otro intervalo:

$$[1,4] \cup (3,5) = [1,5)$$

b. **Intersección** (∩): la intersección de dos intervalos consiste en quedarse con los números que están en los dos a la vez:

$$[1,4] \cap (3,5) = (3,4]$$

En los siguientes vídeos, puedes ver la unión y la intersección.

Enlace a recurso reproducible >>
https://www.youtube.com/embed/gmmWvru8Uo1

Vídeo de Tuto Mate alojado en Youtube.

Enlace a recurso reproducible >>
https://www.youtube.com/embed/ogRfOqjKq6k

Vídeo de Tuto Mate alojado en Youtube.

2.2. Aproximación y errores

Aproximación

Fotografía de tarostatic en Flickr. Licencia CC

Si lo piensas bien, existen muchas situaciones en nuestra vida cotidiana donde utilizamos los números de manera aproximada:

- Cuando vamos a comprar frutas o verduras y pedimos un kilo o tres cuartos de algún producto, si nos fijamos bien en la cantidad que marca la balanza, casi nunca el frutero coloca la cantidad exacta de la mercancía que hemos solicitado. "Pasa un poco del kilo", nos dice el comerciante; o "le faltan 35 gramos para los tres cuartos".
- "Nos vemos a las siete y media en la puerta del cine", y nadie llega a la hora exacta a la cita. Muy pocos llegarán unos minutos antes, y casi todo el mundo con algo de retraso.

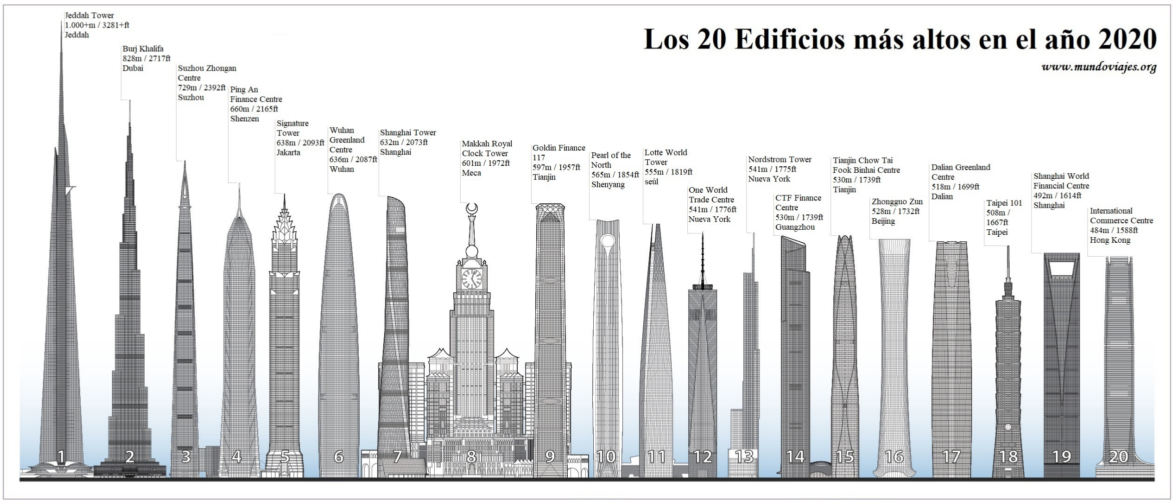
Que los números reales se expresen en el sistema decimal mediante expresiones decimales finitas o infinitas plantea problemas no menores de cálculo. ¿Cómo manejar expresiones decimales infinitas de las que no conocemos todas sus cifras? ¿Cómo manejar de forma aceptable números decimales con un número grande de cifras? Tales consideraciones llevan a los conceptos de aproximación y error.

Importante

Si en un número decimal, a partir de un determinado orden, sustituimos todas las cifras de orden inferior por ceros, obtendremos otro número decimal que se dice una **aproximación** del primero (hasta el orden fijado).

La siguiente imagen está tomada de una infografía de Mundo Viajes, (pulsa en la imagen para verla completa) en los que se comparan los edificios más altos del mundo en el 2020.

Te planteamos la siguiente reflexión, ¿crees que todos estos edificios miden exactamente los valores recogidos aquí? ¿No variará ni un centímetro? ¿Tendría sentido recoger en esta infografía los posibles decimales? La respuesta probablemente sea no, ya que las diferencias entre unos y otros son de metros.



Esto puede llevarnos a otro planteamiento… ¿existe un orden de aproximación establecido de antemano para hacer una aproximación? La respuesta es NO. Dependerá de lo que se desea medir. Así, carecería de sentido fijar el mismo orden de aproximación para medir la distancia entre dos ciudades o el diámetro de una pelota de tenis de mesa.

En el día a día no es necesaria mucha precisión, basta con 2 ó 3 decimales. Eso sí, la cosa cambia si manejamos datos científicos.

Hay distintos métodos de aproximación:

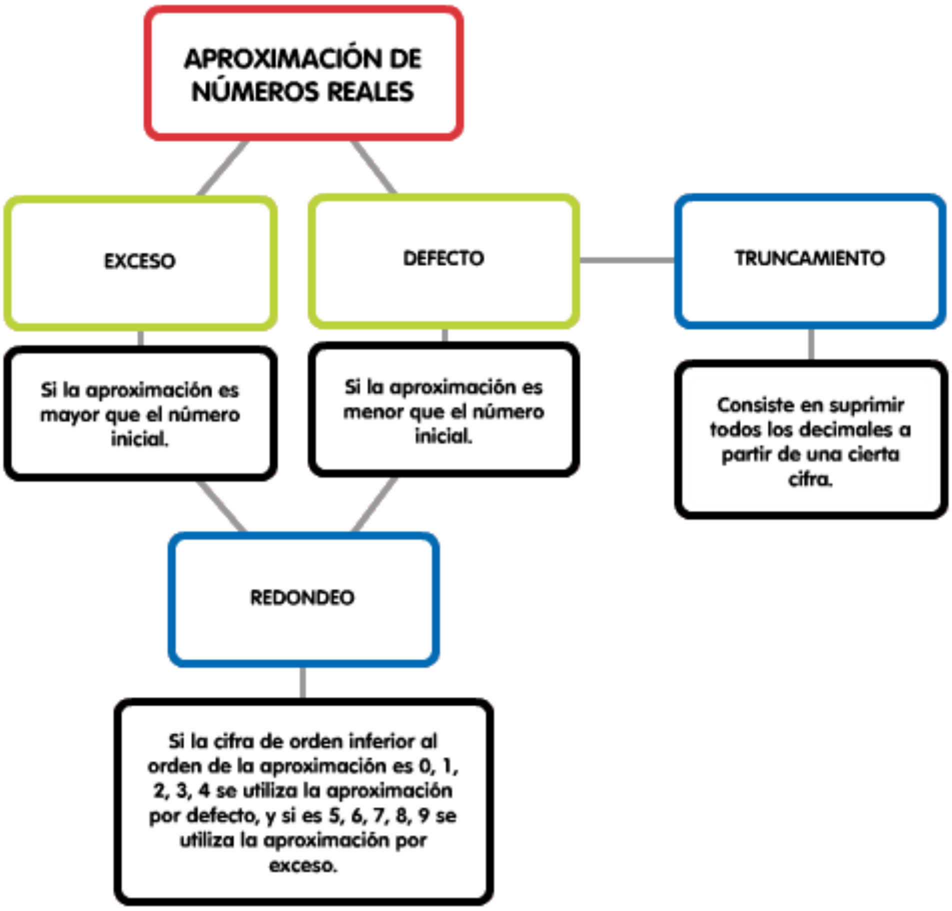


Imagen de elaboración propia

Si te paras a pensar, hay veces que aproximamos por exceso y por defecto, sin darnos cuentas. Por ejemplo, la duración del año solar medio no contiene un número exacto de días. Se usan dos tipos de años: el de 365 días (aproximación por defecto) y el de 366 (año bisiesto, aproximación por exceso).

Importante

Se llaman **cifras significativas** a aquellas con las que se expresa un número aproximado. Solo debemos utilizar aquellas cuya exactitud nos conste.

Comprueba lo aprendido

Recordemos las diez primeras cifras decimales de nuestro querido número de oro φ = 1,6180339887.

Completa en la siguiente tabla los espacios en blanco correspondiente a las **aproximaciones de** φ que se indican.

Aproximación	Truncamiento	Redondeo
a la 3ª cifra decimal	1,	1,
a la 6ª cifra decimal	1,	1,
a la 8ª cifra decimal	1,	1,

Recuerda, truncar es suprimir el resto de cifras decimales. Redondear aumenta una unidad la última cifra de la aproximación si la primera que se suprime es mayor o igual que 5.

Las aproximaciones nos ayudan a representar los números irracionales en la recta real sin tener que recurrir a complejos métodos geométricos. Observa el siguiente applet de Geogebra, en él se representan las raíces de los primeros 50 números enteros, dando sus aproximaciones hasta el máximo de cifras decimales que permite el programa:

https://tube.geogebra.org/material/iframe/id/1385171/width/606/height/527/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/true/s

Errores

Al sustituir un valor por su aproximación evidentemente se comete un error.

ELPAIS.com > Deportes

"Un error de 10 centímetros te mata"

El lituano Stankevicius se convierte en el central más sólido del Valencia

CAYETANO ROS - Valencia - 22/04/2011

Titular en ELPAIS.com (22/04/2011)

En este reportaje al central del Valencia Marius Stankevicius, en la semana que se enfrentaban al Real Madrid, comentaba:

"El peor momento para un defensa es cuando tu equipo ataca: todos piensan en atacar y tú debes pensar en defender". Y la otra: "10 centímetros de error en el fútbol actual es suficiente. Te matan. No hace falta que el error sea grave".

Pero... ¿cuándo un error empieza a ser grave?

Caso práctico

Veamos un caso práctico. En el prospecto de unas cápsulas se indica que cada gramo del medicamento contiene 0,00285 gramos de **ácido bórico** y 0,00015 gramos de **tetraborato de sodio**.

En un control de calidad farmacéutico, se toma una muestra de una de las cápsulas y se detecta que cada gramo de la medicina contiene 0,0031 gramos de ácido bórico y 0,00013 gramos de tetraborato.

Imagen de OpenClipart-Vectors en Pixabay. Licencia CC

a. En uno de los casos el error es por exceso, supera a la cantidad fijada, y en el otro es por defecto, está por debajo. ¿cuál es uno y cuál es el otro?
b. ¿En cuál de los dos componentes la diferencia entre la cantidad indicada en el prospecto y la detectada en el tubo es mayor?

a. En el caso del ácido bórico el error es por exceso, puesto que 0,0031>0,00285. Y para el tetraborato es por defecto, ya que

0,00013<0,00015.

b. Hallamos en ambos casos la diferencia entre la cantidad indicada y la detectada:

|0,0031-0,00285| = 0,000250

|0,00013 - 0,00015| = |-0,00002| = 0,00002

Para poder comparar, se considera el valor absoluto de la diferencia. En nuestro caso, es mayor la diferencia del ácido bórico.

Importante

Se denomina **error absoluto** a la diferencia entre el valor real de un número y su aproximación. Se suele tomar el valor absoluto de dicha diferencia.

Error absoluto =|valor real - aproximación|

Los errores absolutos cometidos en las muestras detectadas de la pomada son 0,000250 para el ácido bórico y 0,00002 en el tetraborato.

Observa la siguiente noticia:


GALICIA

Una alcaldía a cara o cruz

En el municipio ourensano de Os Blancos el bastón de mando de la alcaldía sigue sin dueño a causa de un error en el recuento de votos. La resolución puede depender ahora de una moneda lanzada al aire

A. R. / OURENSE

COMENTARIOS

Día 26/05/2011

Un fallo en el recuento de votos ha dejado en el aire la alcaldía del municipio ourensano de Os Blancos, que por el momento sigue en empate técnico entre el PP y Alternativa Popular Galega (APG), ambos con 393 votos.

Noticia en ABC.es (26/05/2011)

Efectivamente, es un error muy grande pues había más votos que votantes.

Ignoramos si eran 10, 15 o 20, pero... ¿qué hubiera ocurrido si en vez de ser unas elecciones municipales hubieran sido unas autonómicas o unas generales? ¿Crees que habría salido en los periódicos? ¿Estaríamos hablando de error?

La respuesta a estas preguntas podría ser que el error es relativo dependiendo de la proporción de equivocación que haya en el total.

No es lo mismo una equivocación de 10 papeletas en 1.000 habitantes que de 10 papeletas en 35 millones.

Importante

Se define **error relativo** de una aproximación a un número como el cociente entre el error absoluto y el valor del número. El error relativo se puede expresar en tanto por uno o en tanto por ciento.

$$Error\ relativo = \frac{Error\ absoluto}{Valor\ real}$$

Observa la diferencia entre el error absoluto y el error relativo:

- Si hablamos de error absoluto siempre podemos indicar las unidades. Por ejemplo, hay 100 papeletas erróneas.
- Si lo hacemos en términos de error relativo la cosa cambia. Hacemos referencia al total, dando el resultado en porcentajes. Por ejemplo, un 1% de las papeletas son erróneas.

Comprueba lo aprendido

¿Es distinta la significación de un error de un milímetro al medir al ancho de un folio de 21 cm o al medir el ancho de una habitación de 4 metros?

- ○ No
- ○ Sí

No es correcto

Correcto

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

¿Cuál es el error relativo de ambos?

- ○ 0,48 % y 0,25% (folio, habitación)
- ○ 0,48 % y 0,025% (folio y habitación)

No es correcto

En efecto, para el folio 1/210= 0,0048 (0,48%). En el caso de la habitación 1/4.000=0,00025 (0,025%). El error de medir el folio es 19 veces más grande.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

Caso práctico

Para vallar mi cortijo de Níjar (Almería) estimé que necesitaba 400 metros. Cuando la empresa VALLAS INDALO me la instaló cobraron 401 metros, cabe pensar que con mi cinta métrica de casa cometiera un error de 1 metro.

Cuando se lo comenté a mi vecino Pablo, que trabaja en la empresa CARRETERAS RURALES S.A, me explicó que a su encargado le había pasado algo parecido en la carretera que une los pueblos de Macael y Olula del Río (3 km de distancia). Con sus aparatos de medida cometieron el mismo error, 1 metro.

Para ambos casos el error de medición es de 1 metro.

¿Pero es distinta la significación de un error de un metro al medir 3 km que al medir 401 metros?

Para la valla

$$E_r = \frac{1}{401} = 0{,}0025 (0{,}25\,\%)$$

Para la carretera

$$E_r = \frac{1}{3000} = 0{,}00033 (0{,}033\,\%)$$

Por tanto, si comparamos ambos resultados, el error de medida de la valla es más grande que el de la carretera, por tener mayor error relativo (Dividiendo 0,25/0,033≈8. El error en la medida de la valla es 8 veces mayor que el de la carretera).

Curiosidad

Aproximaciones de π

La Tierra donde vivimos, la Luna que gira a nuestro alrededor, el balón alrededor del que giran la mirada y el ocio de millones de aficionados en todo el mundo y multitud de objetos tanto de la naturaleza como creados por el ser humano tienen forma esférica o, utilizando un lenguaje coloquial, son redondos. La rueda, sin duda uno de los grandes inventos de la humanidad, es una circunferencia. El uso de la rueda para el transporte, para girar en las norias y elevar el agua o batir las semillas en los molinos. No nos puede extrañar que desde muy pronto el ser humano se fijara en la circunferencia y se preguntara por la relación que existe entre el perímetro y el diámetro. De esa relación surgió uno de los números más famosos y conocidos por todas las civilizaciones: π. Para convencerte de que es cierto lo que hemos dicho, disfruta de este vídeo:

[Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/49twx8iaTyw](http://www.youtube.com/embed/49twx8iaTyw)

Vídeo de Belén Sepúlveda alojado en [Youtube](https://www.youtube.com)

3. Notación científica

En la novela "Los viajes de Gulliver" de **Jonathan Swift**, el protagonista se traslada desde un país poblado de seres diminutos hasta las tierras en donde viven gigantes.

Fotografía de mutantMandias en Flickr. Licencia CC

A imitación suya, nosotros, vamos a realizar un viaje desde los números muy pequeños a los inmensamente grandes.

El vehículo que nos va a transportar a esos territorios es la **notación científica**. Ella nos ayudará a movernos por el mundo de los números cercanos a cero y, en un suspiro, nos elevará hasta las cantidades enormes de los valores astronómicos.

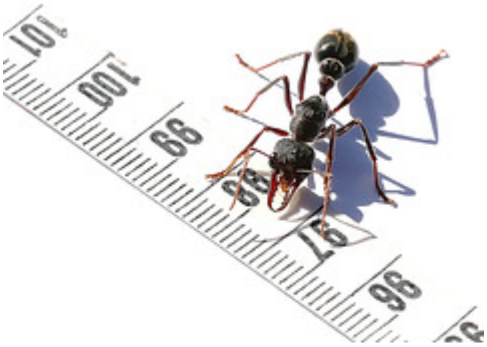
En la época de Hipaso las cantidades que utilizaba la gente corriente e incluso los matemáticos y pensadores no eran ni muy grandes ni muy pequeñas. Y así ocurrió a lo largo de la historia: décimas, centésimas, milésimas como máximo; unidades de mil, de diez mil, o de millón a lo sumo.

En el siglo XIX y sobre todo a lo largo del XX, al desarrollarse con más fuerza las ciencias experimentales, surgió la necesidad de expresar cantidades muy pequeñas en la física de partículas o microbiología, o muy grandes en astronomía o química.

Las potencias de 10, tanto negativas como positivas se muestran como un estupendo soporte donde apoyarnos y nos resultan muy útiles para poder comparar números pequeños o grandes entre sí.

3.1. De lo pequeño a lo grande

Notación científica



Fotografía de young_einstein en Flickr. Licencia CC

El tamaño de una hormiga varía entre $7{,}5 \cdot 10^{-4}$ y $5{,}2 \cdot 10^{-2}$ metros. ¿Qué indican -4 y -2 en el exponente? Pues que el tamaño de la hormiga se encuentra entre las décimas de milímetro y los decímetros. Además, esa diferencia de 2 unidades entre los exponentes de 10 nos indica que la hormiga de mayor tamaño puede ser hasta 10^2 veces más grande que la de menor envergadura, es decir, 100 veces.

Una de las ventajas de la notación científica es que muestra a través del exponente de la potencia de 10 el orden de magnitud decimal del número. Con ello facilita la comparación de magnitudes.

Importante

Un número escrito en notación científica se compone de de tres partes:

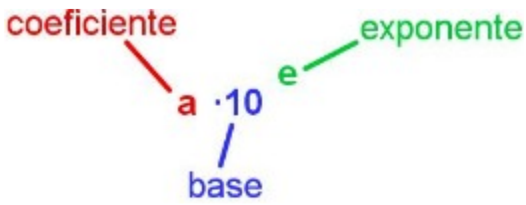


Imagen de elaboración propia

El **coeficiente**es un número decimal con una única cifra entera distinta de cero y dos o tres cifras decimales significativas.

La **base**es siempre el número 10.

Y el **exponente**, que indica el número al que se eleva la base, es un número entero.

Para expresar un número en notación científica debemos seguir el siguiente esquema:

Imagen de elaboración propia

Por ejemplo:

- 121,14 se expresaría en notación científica como $1,2114 \cdot 10^2$
- 0,00894 se expresaría en notación científica como $8,94 \cdot 10^{-3}$

Para calcular el exponente de la potencia de 10 basta con averiguar el orden decimal de la primera cifra que no es cero. Los órdenes decimales de las cifras se calculan recorriendo el número a partir de la coma hacia la izquierda (sentido creciente) y hacia la derecha (sentido decreciente). El orden de la cifra de las unidades es 0

En las siguientes presentaciones puedes ver otros ejemplos:

https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vR8eRoEYKOR2clJ-XgTHlSThXEjkb-jHCyLjIv9mfE_ymySX0OijSUrBvgUaNPSQqDHeHVa... start=false&loop=false&delayms=5000

https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vRO... z2uDtIrYO_MwxPhAOoHmYPVh2sWN start=false&loop=false&delayms=5000

Recurso de elaboración propia.

Comprueba lo aprendido

Vamos a pasar las cantidades que comentamos en la introducción a **notación científica**. Rellena los huecos en blanco con los números adecuados.

- La distancia media entre el Sol y Plutón es de 5.913.520.000 km, que en notación científica son 5,91352 · 10 ____ km.
- La distancia de la Tierra a las Pléyades es de 4.162.400.000.000.000 km, es decir, 4,1624 · 10 ____ km.
- El diámetro de un glóbulo rojo mide 0,0075 mm. En notación científica sería ____ $\cdot 10^{-3}$ km.
- Un protón mide 0,000000000001 mm de diámetro, es decir, 1 · 10 ____ mm.

Usando las propiedades de las potencias que viste en la Unidad 1, podemos hacer operaciones con números escritos en notación científica. Mira los siguientes ejemplos antes de resolver la actividad propuesta.

Ejercicio resuelto

$(4 \cdot 10^5) \cdot (2{,}1 \cdot 10^9) =$

$= 4 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^9 = 8{,}4 \cdot 10^{14}$

$(6{,}1 \cdot 10^{12}) \cdot (3{,}2 \cdot 10^{-4}) =$

$= 6{,}1 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-4} = 19{,}52 \cdot 10^8 = 1{,}952 \cdot 10^9$

En el último paso hemos pasado el número a notación científica, pues 19,52 no es válido por tener dos cifras en la parte entera.

$(5{,}85 \cdot 10^{-4}) : (1{,}5 \cdot 10^6) =$

$= (5{,}85 : 1{,}5) \cdot (10^{-4} : 10^6) = 3{,}9 \cdot 10^{-10}$

Comprueba lo aprendido

Elige si las siguientes igualdades o afirmaciones son verdaderas o falsas.
La notación científica de 154000 es $1{,}54 \cdot 10^5$

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Es verdadero porque tenemos que avanzar 5 cifras a la derecha desde la coma para conseguir nuestro número inicial.

La notación científica de 0,0024 es $0{,}24 \cdot 10^{-2}$

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Es falso, porque para que un número esté escrito en notación científica, la parte entera debe ser un número de 1 a 9, y en este caso es 0.

$(4{,}5 \cdot 10^{6}) \cdot (2 \cdot 10^{-10}) = 9 \cdot 10^{-4}$

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

$(8{,}1 \cdot 10^{78}) : (2{,}7 \cdot 10^{14}) = 3 \cdot 10^{92}$

Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso

La respuesta correcta es $3 \cdot 10^{64}$

Resumen

Importante

Los **números irracionales** son aquellos que poseen un desarrollo decimal con infinitas cifras decimales no periódicas. Un número irracional **nunca** se puede expresar como una fracción o cociente de números enteros. Por ejemplo π, $\sqrt{2}$ y en general cualquier raíz cuadrada de un número natural que no sea cuadrado perfecto, son números irracionales.

Los **números racionales** son aquellos que tienen un desarrollo decimal finito, o infinito periódico. Es decir, en algún momento las cifras decimales se repiten. Un número racional **siempre** se puede escribir como una fracción o cociente de números enteros. Por ejemplo, la aproximación tan buena que dio Francoise Vieta de π 3,1415926536 o la de los chinos $\frac{385}{113}$, son números racionales.

Al conjunto de los racionales e irracionales es lo que denominamos números **reales**. Que para simplificar se expresa con una **R**.

Para repasar y ofrecerte una visión más general de los conjuntos numéricos vistos hasta ahora, puedes ver el siguiente vídeo.

[Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/oOSEQgwXC5c](http://www.youtube.com/embed/oOSEQgwXC5c)

Vídeo de Tuto Mate alojado en [Youtube]()

Importante

Radicales equivalentes. Simplificar y operar con radicales.

En la siguiente presentación encontrarás un pequeño repaso a la teoría de radicales, cómo operar con ellos y muchos ejemplos. Pero no te preocupes, por si no es suficiente, algo más abajo entraremos en detalle de algunos de estos aspectos.

http://www.slideshare.net/slideshow/embed_code/10157875

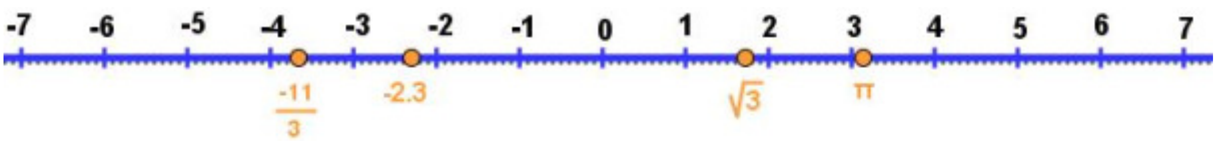
Elaboración propia.

Además te enlazamos un pdf con un detallado resumen de la página 3con14. Para verlo haz clic en la siguiente imagen:

Importante

Llamaremos **recta real** a una recta graduada en la que se fija como origen el número 0, se determina una unidad y se van colocando los números positivos hacia la derecha y los negativos a la izquierda.

Cada número real ocupa un lugar en la recta real, y viceversa, cada punto de la recta real está ocupado por un número real.



Si ***a* < *b*** se llama **intervalo** de extremos ***a*** y ***b*** al conjunto de números que están entre *a* y *b* en la relación de orden. Según contengan o no los extremos los intervalos se llaman cerrados, abiertos o semicerrados o semiabiertos si contienen solamente uno de los extremos.

Importante

Aproximación y errores

Dos maneras de aproximar un número decimal son el **truncamiento** y el **redondeo**.

Una aproximación por **truncamiento** consiste en suprimir todos los decimales a partir de una cierta cifra.

Es decir, si el truncamiento se hace a la cuarta cifra decimal, a partir de ella suprimimos el resto del desarrollo decimal. Por ejemplo, aproximar π como 3,1415 es realizar un truncamiento a la cuarta cifra decimal.

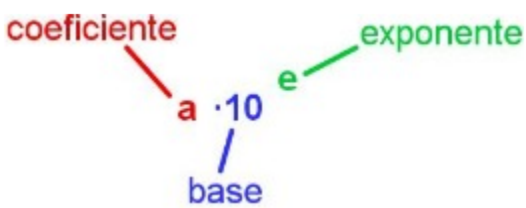
Una aproximación por **redondeo** consiste en suprimir todos los decimales a partir de una cierta cifra, teniendo en cuenta que si la primera cifra que se suprime es mayor o igual que 5, se aumenta en una unidad la última cifra de la aproximación.

Se denomina **error absoluto** a la diferencia entre el valor real de un número y su aproximación. Se suele tomar el valor absoluto de dicha diferencia.

Se define **error relativo** de una aproximación a un número como el cociente entre el error absoluto y el valor del número. El error relativo se puede expresar en tanto por uno o en tanto por ciento.

Importante

Un número escrito en **notación científica** se compone de de tres partes:



El **coeficiente** es un número decimal con una única cifra entera distinta de cero y dos o tres cifras decimales significativas.

La **base** es siempre el número 10.

Y el **exponente**, que indica el número al que se eleva la base, es un número entero.

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space