2º de Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

Estadística inferencial: Intervalos de confianza I

1. Estimación puntual

¿Qué tal llevas el curso?

En el tema anterior aprendiste a elegir correctamente una muestra representativa de una población para estudiar alguna característica de ella, en el siguiente te vamos a enseñar como analizar los datos obtenidos y observar si estos valores se encuentran en unos determinados intervalos a los cuales llamaremos **"intervalos de confianza"**, además de eso llevarás un control del error que estas cometiendo en cada momento.

Todo esto lo estudiarás contando con la ayuda de la empresa TisBet Survey, especialista en realizar este tipo de estudios estadísticos.

Imagen en Wikimedia Commons
de Mu bajo Dominio público

Imagen de UvaFragola bajo licencia Creative Commons

A nuestros amigos de la empresa TisBet Survey les han encargado la Concejalía de Educación de su Ayuntamiento, un estudio sobre el Cociente Intelectual (C.I.) medio de los alumnos y alumnas del IES "Benito V.", ya que están elaborando un proyecto de atención a alumnado con altas capacidades.

Como no conocen la proporción de alumnos que tienen un C.I. superior a 130 (alta capacidad), toman una muestra aleatoria con alumnos y alumnas del instituto, a través de la cual calcularán una aproximación del número total de alumnos con alta capacidad en el Centro.

Esta aproximación es lo que llamamos **estimación**.

Junto a esta estimación, y dado que muy probablemente no coincida con el valor real del parámetro, acompañarán el error aproximado que se comete al realizarla.

¿Qué ocurre una vez calculado la proporción de alumnos en la muestra con C.I. superior a 130?

Supongamos que los trabajadores de TisBet Survey han seleccionado una muestra de 100 alumnos y alumnas y han obtenido que sólo 3 alumnos tienen un C.I. superior a 130, es decir, la proporción de alumnado con alta capacidad es del 3% ($\hat{p} = 0{,}03$).

Parece lógico estimar que la proporción de todo el alumnado del instituto con alta capacidad será aproximadamente igual que la proporción de la muestra, 3%. Pero, ¿cómo de aproximadamente?

El hecho de decir que el valor de ***p*** es aproximadamente $\hat{p}$, significa que estamos haciendo una **estimación puntual**.

Importante

Una **estimación puntual** del valor de un parámetro poblacional desconocido (como puede ser la proporción *p*), es un número que se utiliza para aproximar el verdadero valor de dicho parámetro poblacional.

A fin de realizar tal estimación, tomaremos una muestra de la población y calcularemos el parámetro muestral asociado ($\hat{p}$ para la proporción).

El valor de este parámetro muestral será la estimación puntual del parámetro poblacional.

Comprueba lo aprendido

Queremos saber cuál es la proporción de habitantes de una ciudad con edades de 10 a 70 años que participan en redes sociales en Internet diariamente.

Para ello, la empresa TisBet Survey se encarga de este estudio.

Lo primero que hace es seleccionar una muestra de 1000 personas entre los 2 millones de habitantes de la ciudad con edades comprendidas entre 10 y 70 años.

Zaryn Dentzel. Fundador y Consejero Delegado de Tuenti

Sobre la citada muestra estudian la proporción que participa en redes sociales a través de Internet; a esa proporción se le llama:

- [ ] Estimador
- [ ] Estadístico
- [ ] Estimador puntual

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto

En las encuestas se ha obtenido que de los 1000 entrevistados, participan en redes sociales 450 personas; es decir, el 45% de los entrevistados participan en redes sociales.

El valor 0,45 que toma el estimador puntual en esa muestra se llama:

- [ ] Inferencia estadística
- [ ] Media muestral
- [ ] Estimación puntual

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Correcto

Si la muestra está bien elegida, se puede inferir ese resultado sobre la población de todos los habitantes de la ciudad.

TisBet Survey podría afirmar, de forma un tanto superficial, que el 45% de los habitantes participan en redes sociales.

- [ ] Verdadero
- [ ] Falso

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Correcto
2. Incorrecto

Importante

Las estimaciones puntuales son más precisas que las estimaciones por intervalos que veremos en el siguiente apartado, sin embargo, son menos fiables que éstas.

¿Qué propiedades debe cumplir todo buen estimador?

- **Insesgado**: Un estimador es insesgado cuando la proporción de su distribución muestral asociada coincide con la proporción de la población. Esto ocurre, por ejemplo, con el estimador $\hat{p}$ ya que coincide con p.
- **De varianza mínima**: La variabilidad de un estimador viene determinada por el cuadrado de su desviación estándar. En el caso de $\hat{p}$ el error estándar es $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

Como puedes observar, cuanto mayor sea el tamaño de la muestra **n**, menor será la variabilidad del estimador $\hat{p}$, por tanto, mejor serán nuestras estimaciones.

La diferencia entre el verdadero valor del parámetro que se estima y el muestral mide el error cometido al utilizar el estimador y se denomina **sesgo**.

Cuando en un estimador la varianza es mínima, decimos que el estimador es **eficiente**.

Ejercicio resuelto

Imagen de audio-collage bajo

licencia Creative Commons

A la empresa TisBet Survey le han encargado una encuesta para saber la proporción de familias que utiliza cierto tipo de detergente.

Para ello ha seleccionado a 900 familias, calculando que la proporción estimada es 0,35.

¿Cuál es el error estándar estimado?

Mostrar retroalimentación

Los datos que tenemos son:

$$\hat{p} = 0{,}35$$
$$1 - \hat{p} = 0{,}65$$
$$n = 900 \, .$$

El error estándar estimado será $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{900}} \simeq 0{,}016$

Comprueba lo aprendido

ltiple

Imagen de superturtle bajo licencia Creative Commons

En la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Nogara se desea conocer la opinión de los estudiantes acerca de ciertas medidas que ha tomado el Decano.

Para ello se escoge una muestra de 120 estudiantes, de los cuales 90 están a favor.

Estima la proporción de estudiantes de toda la Facultad que están a favor de las medidas.

- 25 %
- 50 %
- 75 %

No es correcta

No es correcta

Efectivamente ya que 90/120 = 0,75.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

En el campus universitario de la Universidad de Nogara, hay un conjunto residencial formado por 200 apartamentos para estudiantes.

Se seleccionaron 18 apartamentos y se observó que, en promedio, viven 4,5 personas por apartamento.

Estima el total de personas que viven en el conjunto residencial.

Imagen de superturtle bajo licencia Creative Commons

- 81
- 800
- 900

No es correcta

No es correcta

Efectivamente: 4,5 · 200 = 900.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

Comprueba lo aprendido

Blanco

La empresa farmacéutica de nuestra localidad quiere hacer un estudio sobre la proporción de estudiantes de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Nogara que visitan al dentista al menos una vez al año.

Para ello, la empresa TisBet Survey escoge una muestra de 120 estudiantes, resultando que sólo 36 lo hacen.

Estima la proporción de estudiantes que visitan al dentista al menos una vez al año.

La proporción es de ______ es decir podemos estimar que el ____ % de estudiantes de la Facultad de Matemáticas visitan al dentista al menos una vez al año.

Enviar

2. Intervalos de confianza

Como habrás podido comprobar en el apartado anterior, los estimadores puntuales sólo dan una idea aproximada del valor del parámetro a estimar, no conociéndose cómo de buena es la aproximación; ellos simplemente proporcionan el mejor número que pueda proponerse como valor del parámetro.

Por ejemplo decir que $\hat{p} = 0{,}75$ en el IES "Benito V." respecto al estudio de utilización de redes sociales, significa que aproximadamente el 75% de todos los alumnos y alumnas del instituto participan en redes sociales a través de internet, pero el término "aproximado" no se sabe si alude a un 1% arriba o abajo, o a un 10% arriba o abajo. De hecho, no puede esperarse gran cosa de un estimador.

Los problemas anteriores eran de esperar pues realmente es demasiado pedir que a partir de una muestra pueda calcularse el valor del parámetro tan exactamente como si se tomara toda la población. En realidad lo que importa es que el valor de la proporción muestral $\hat{p}$,por ejemplo, no esté demasiado alejado de p , y esto se comprueba con los intervalos de confianza.

El objetivo es realizar afirmaciones del tipo: "la proporción media de todos los alumnos y alumnas no sé exactamente cuanto es, pero es casi seguro alguno de los valores $0{,}7 \le p \le 0{,}8$, con una cierta seguridad".

La seguridad alude a la probabilidad de que la afirmación sea cierta, con lo que el problema de obtener intervalos de confianza para un parámetro radica en encontrar dos valores a y b tales que ***P (a ≤ p ≤ b) = 1-α***, donde **(a,b) es el intervalo de confianza** para *p*, ***1-α* el coeficiente de confianza** (c) del intervalo (usualmente próximo a 1) y **α el *nivel de error*** del intervalo (usualmente próximo a 0).

Aquí tienes un curioso vídeo donde se explica la estimación por intervalos de confianza de una proporción.

Importante

A la hora de estimar un parámetro poblacional, un **intervalo de confianza** es un rango de valores (calculado en una muestra) en el cual se encuentra el verdadero valor del parámetro, con una probabilidad determinada.

parámetro, con una probabilidad determinada.

El **nivel de confianza**, C, indica, en porcentaje, con qué proporción el intervalo de confianza contiene el parámetro estimado.

El **coeficiente de confianza, c=1-α**, es la misma proporción en tanto por uno, c = C/100. En otras palabras, c es la probabilidad de que el intervalo de confianza contenga el parámetro estimado.

Al valor de **α** lo llamamos **nivel de significación** o de riesgo.

Al valor que resulta de restar el extremo superior del inferior del intervalo de confianza, lo llamamos **margen de error**.

VALORES CRÍTICOS

Imagen de Guadalupe Cervilla bajo licencia Creative Commons

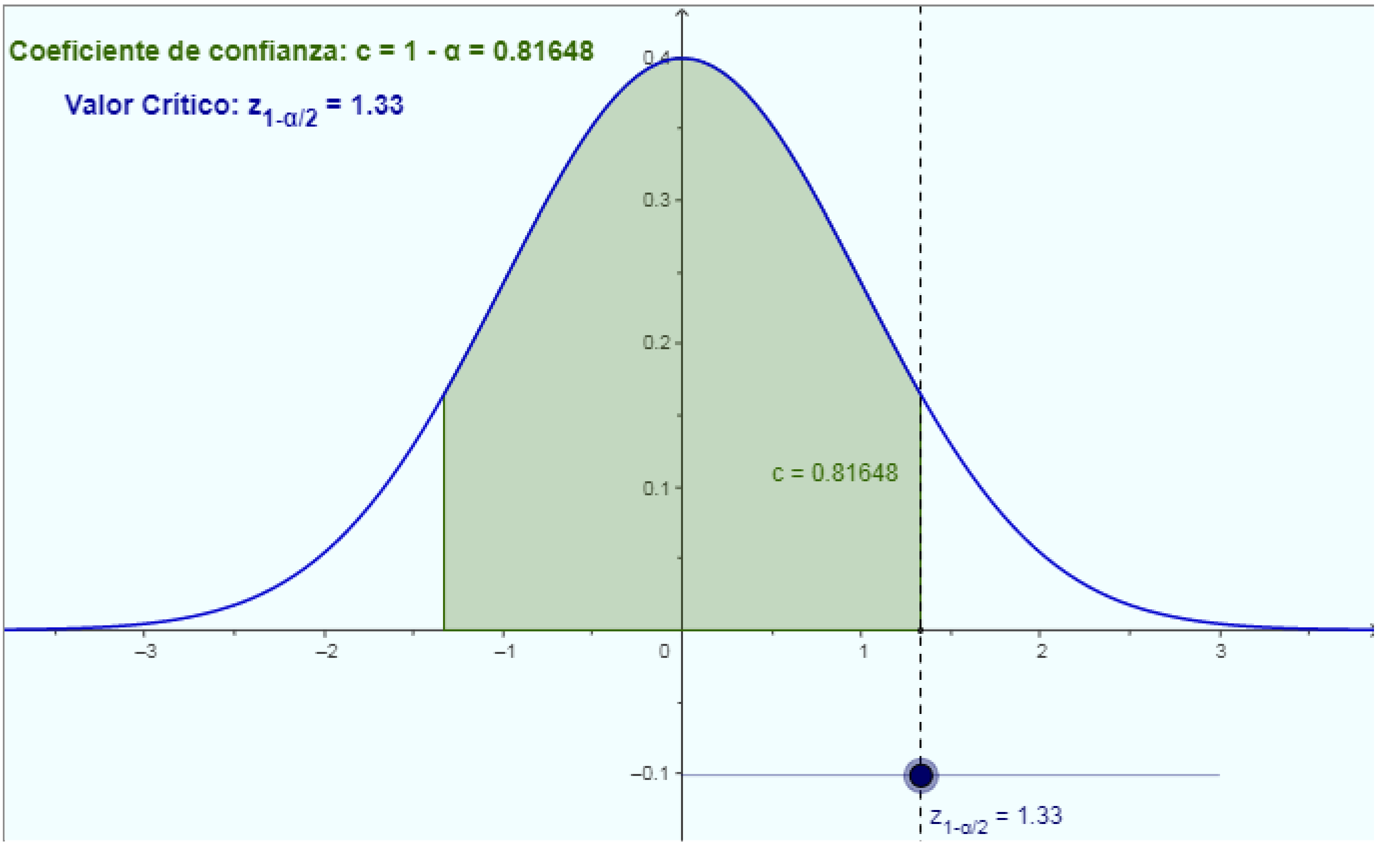
Recuerda que cuando una distribución seguía una normal N(0,1), a veces no interesa calcular la probabilidad de que un parámetro esté en un intervalo, sino encontrar un intervalo que tenga cierta probabilidad.

Para ello necesitamos conocer los valores críticos $\mathbf{Z_{1-\alpha}}$, $\mathbf{-Z_{1-\alpha}}$, $\mathbf{Z_{1-\alpha/2}}$ y $\mathbf{-Z_{1-\alpha/2}}$ mirando el valor de la probabilidad en la tabla de la Normal.

Aquí tienes una escena de Descartes de Juan Jesús Cañas Escamilla para que repases el sentido que tiene el valor de Z.

Escena desarrollada por Juan Jesús Cañas Escamilla (RED Descartes)

Con la ayuda de esta escena de GeoGebra creada por José Álvarez y modificada por José María Vázquez de la Torre, seguro que comprenderás mucho mejor el significado de nivel de confianza, intervalo de confianza y valor crítico.



Comprueba lo aprendido

ltiple

Con la ayuda de la escena anterior o bien de la tabla de la Normal, contesta a las siguientes preguntas:

a) El valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 90% es ...

- -1,64
- 1,64
- 1,645

No es correcto

No es correcto

Muy bien

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

b) El intervalo de confianza que encierra a un 97% de los datos es...

- (-2,2)
- (-2,17 , 2,17)
- (-2,15 , 2,15)

No es correcto

Muy bien

No es correcto

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

c) A un valor crítico $Z_{1-\alpha/2}$ = 1,51 le corresponde un nivel de confianza del ...

- 1, 51 %
- 0,86896 %
- 86,9 %

No es correcto

No es correcto

Muy bien

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

d) El intervalo de confianza (−1,9 , 1,9), ¿qué porcentaje de la población comprende?

- 94 %
- 19 %
- 0,94257

Muy bien

No es correcto

No es correcto

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Para saber más

2.1. Intervalo de confianza para la proporción

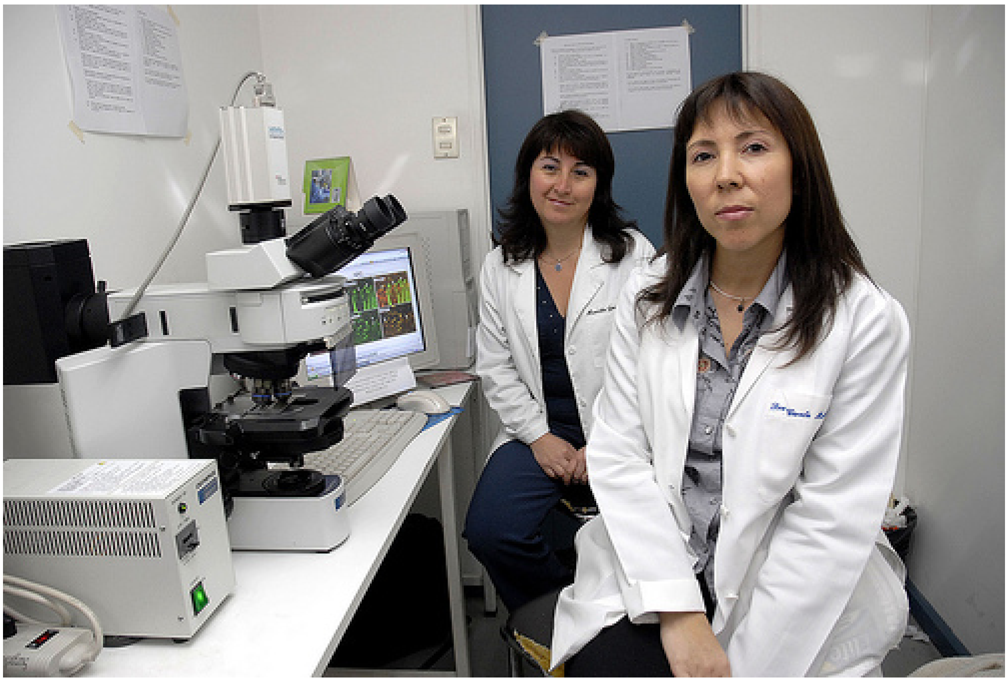


Imagen de universidadcatolica bajo licencia Creative Commons

¿Qué tal vamos? ¿Qué te parece esto de los intervalos de confianza? ¿Sabías que estos estudios se utilizan mucho en los laboratorios farmacéuticos para comprobar tratamientos médicos?

Como ya te habrás dado cuenta, el hecho de calcular intervalos de confianza, es una técnica que nos permite hacer afirmaciones sobre qué valores podemos esperar para un parámetro, en este caso para la proporción.

Este intervalo que calculamos depende de varios factores:

- Del parámetro que estimemos en la muestra (proporción media, etc.)
- Del tamaño de la muestra. Cuanto mayor sea el tamaño muestral, menor será la diferencia entre el valor estimado y el valor real desconocido.
- De la probabilidad con la que el método dará una respuesta correcta, es decir, el nivel de confianza. Los niveles de confianza habituales son el 95% y el 99%.

Importante

Recuerda que si el tamaño de la muestra era mayor o igual que 30, el estimador de una proporción seguía una distribución normal $N(p,\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$, donde *p* es el parámetro poblacional que se quiere estimar, aproximando su valor mediante el valor del estadístico $\hat{p}$ obtenido de la muestra.

Ejercicio resuelto

Imagen de ruurmo bajo licencia Creative Commons

Nuestra empresa farmacéutica quiere probar una nueva vacuna destinada a jóvenes de entre 12 y 18 años. Para ello, piensan hacer una prueba y aunque creen que los efectos secundarios (dolor de cabeza, vómitos, etc.) son mínimos, antes de sacarla al mercado encargan a Tisbet Survey que seleccione una muestra y aplique el tratamiento.

La muestra está formada por 500 jóvenes, produciendo efectos secundarios en el 5 % de ellos.

¿Entre qué valores debe encontrarse la proporción de la población de todos los jóvenes de la localidad donde tendrá efectos secundarios con un 99% de probabilidad?

Mostrar retroalimentación

Como la muestra está formada por 500 jóvenes, produciendo efectos secundarios en el 5 % de ellos, el estadístico $\hat{p}$, proporción en la muestra, toma el valor de **0,05**.

Como n=500 es mayor que 30, tienes que $\hat{p}$ sigue una distribución normal:

$$N\left(\hat{p},\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = N\left(0{,}05\ ;\ \sqrt{\frac{0{,}05\cdot 0{,}95}{500}}\right) = N(0{,}05\ ;\ 0{,}01)$$

Para poder comercializar la vacuna, la empresa farmacéutica tiene que analizar con una probabilidad del 99%, entre qué valores se encontrará la proporción poblacional de los jóvenes que tendrán efectos secundarios.

Tipificando la variable $\hat{p}$, tienes que $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}=\dfrac{\hat{p}-0{,}05}{0{,}01}\sim N(0{,}1)$.

Si miras en la tabla de la Normal, verás que *P(-2,58 < Z ≤ 2,58) = 0,99.*

Si sustituyes Z por su valor, tienes: $P\left(-2{,}58<\dfrac{\hat{p}-0{,}05}{0{,}01}\leq 2{,}58\right)=0{,}99$.

Si haces operaciones con la expresión anterior obtienes lo siguiente:

P(-2,58·0,01 < $\hat{p}$ - 0,05 ≤ 2,58·0,01) = 0,99 → *P(0,05 - 2,58·0,01 <* $\hat{p}$ ≤ 0,05 + 2,58·0,01) = 0,99 → *P(0,02 <* $\hat{p}$ ≤ 0,07).

Una vez hechas estas operaciones, ¿qué conclusión puedes sacar?

La conclusión es que la proporción de jóvenes con efectos secundarios estará en el intervalo (0,02;0,07) con una probabilidad del 99%, es decir, con probabilidad del 99% habrá entre un 2% y un 7 % de jóvenes que tendrán efectos secundarios, con un margen de error del 5%, ya que el margen de error viene dado por la amplitud del intervalo (margen de error=0,07-0,02=0,05=5%).

Importante

El **intervalo de confianza** para la proporción $\hat{p}$ es:

$$\left(\hat{p}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\quad,\quad\hat{p}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el valor crítico para el **coeficiente de confianza** $1-\alpha$.

α es el **nivel de significación** o de **riesgo**.

El **margen de error** es la diferencia entre los extremos superior e inferior del intervalo de confianza.

Comprueba lo aprendido

ltiple

La empresa farmacéutica elabora una revista mensual donde informa de nuevos avances médicos y la reparte por los centros educativos del pueblo.

En el IES "Benito V." se ha tomado una muestra de 80 alumnos y ha dado como resultado que 32 alumnos leen la revista.

Imagen de the italian voice bajo licencia Creative Commons

a) Calcula la proporción muestral de lectores de la revista.

- 0,2
- 0,4
- 0,8

Falso.

Efectivamente. $\frac{32}{80}=0{,}4$

Falso.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

b) Si el nivel de confianza es del 95 %, el valor crítico $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es:

- 0,68
- 1,96
- 2,58

Falso. Este valor sería para un nivel de confianza del 50 %

Verdadero. P(-1,96<Z≤1,96)=0,95

Falso. Este valor sería para un nivel de confianza del 99 %.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

c) El intervalo de confianza para la proporción de lectores de la revista médica en los centros educativos, tomando una muestra de 80 alumnos y con un nivel de confianza del 95% es (0,29 ; 0,51)

- Verdadero.
- Falso

$$\left(0{,}4-1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{80}}\ ;\ 0{,}4+1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{80}}\right)=(0{,}4-0{,}11\ ;\ 0{,}4+0{,}11)=(0{,}29\ ;\ 0{,}51)$$

No es correcto

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto

d) Calcula el margen de error.

- 2 %
- 22 %
- 29 %

Falso.

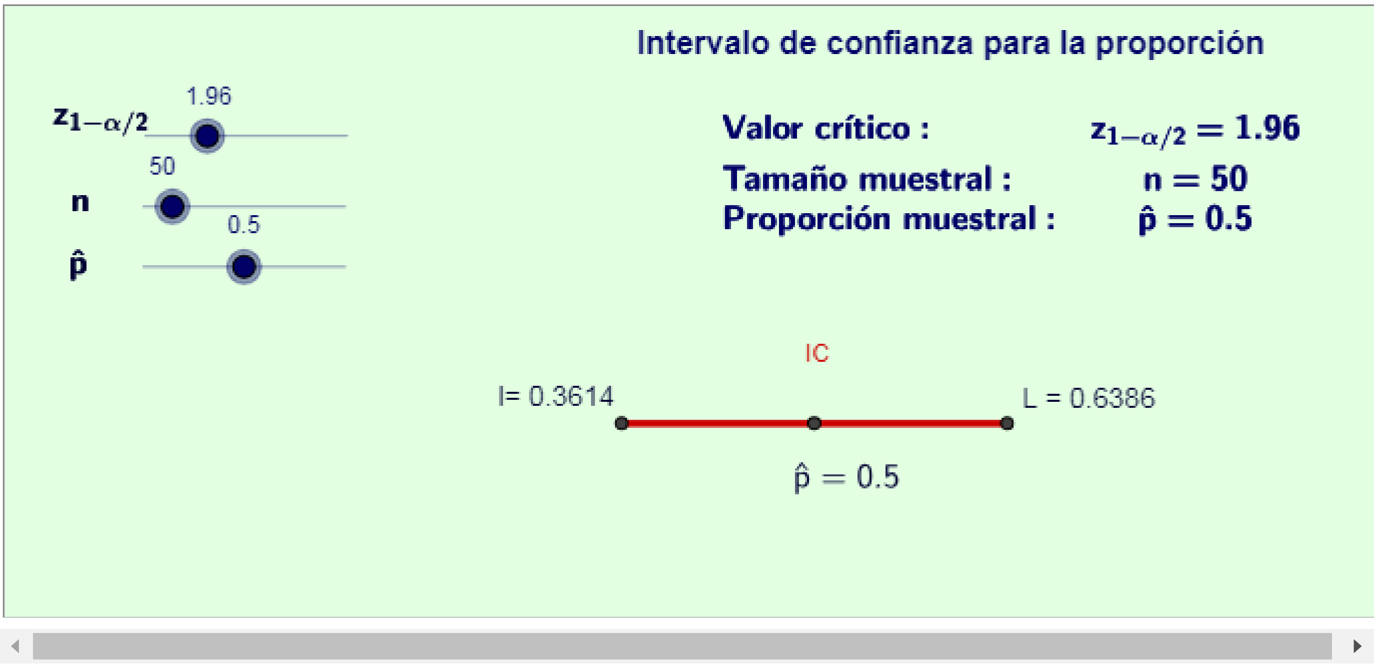
Verdadero. 0,51-0,29=0,22

Falso

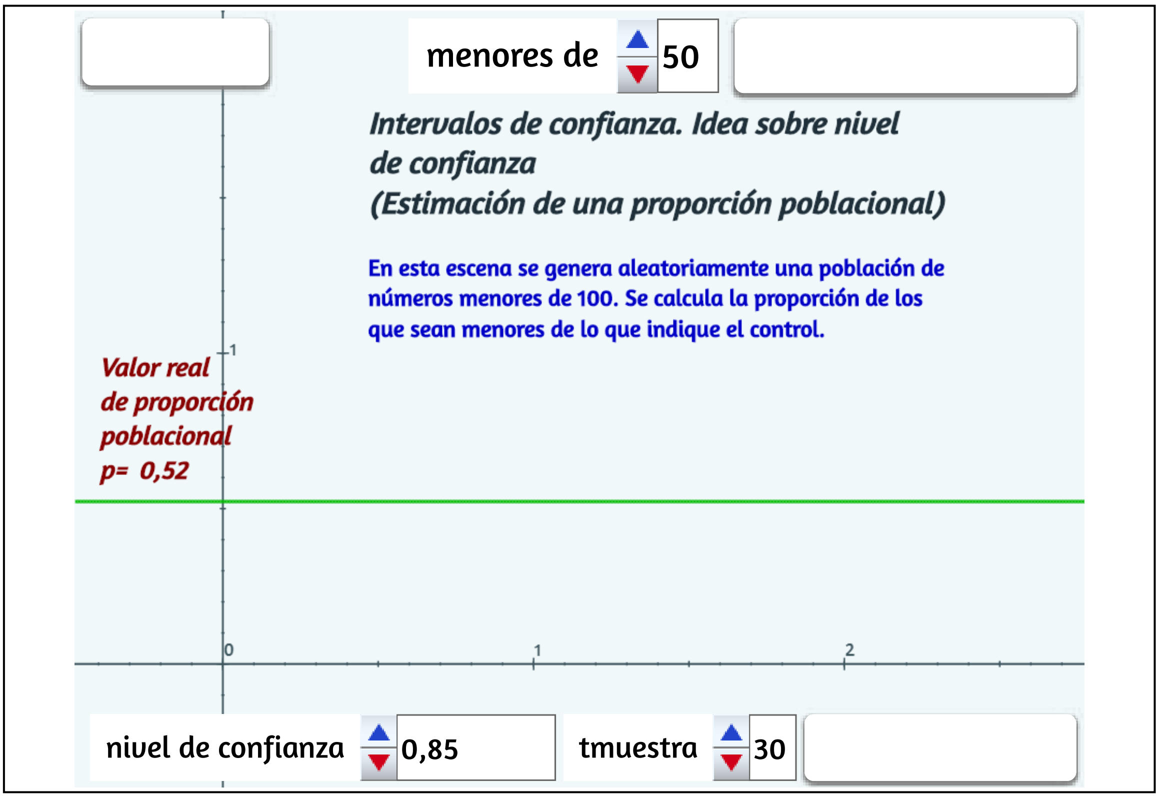
Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

En esta escena de GeoGebra creada por José Álvarez y modificada por José María Vázquez de la Torre, puedes ver cómo son los intervalos de confianza para la proporción.



Esta otra escena de Descartes puede ayudarte a entender el concepto de intervalo de confianza para una proporción.



Escena desarrollada por Juan Jesús Cañas Escamilla (RED Descartes)

Usando el mundial de fútbol para aprender intervalos de confianza.

En la página que te mostramos a continuación te demuestro como ser mejor que Cristiano Ronaldo lanzando penaltis usando intervalos de confianza.

USANDO EL MUNDIAL DE

Comentarios recientes

Ivan en EL FAMOSO VALOR “P”

3. Error y tamaño de la muestra para la estimación de proporciones

Imagen de lanzate bajo licencia Creative Commons

Seguramente que habrás escuchado un montón de veces en reuniones de amigos, en televisión , etc..., la frase "el tamaño sí importa".

No sé que habrás pensado cuando la hayas escuchado, pero a lo mejor se trataba de una reunión de estadísticos y estaban hablando de lo que vamos a estudiar en este apartado, es decir, el tamaño de la muestra en un estudio estadístico.

Hasta ahora, nuestros amigos de TisBet Survey nos han hecho ver claro que para que sea mayor el nivel de confianza a la hora de estimar una proporción, hay que aumentar la muestra, ya que si aumentamos el tamaño del intervalo, aumenta el margen de error, que recuerda, era la diferencia entre los extremos superior e inferior del intervalo de confianza.

Pero, ¿hasta dónde aumentamos el tamaño de la muestra?

En este apartado del tema, aprenderás cómo debe ser de grande la muestra para tener una determinada confianza.

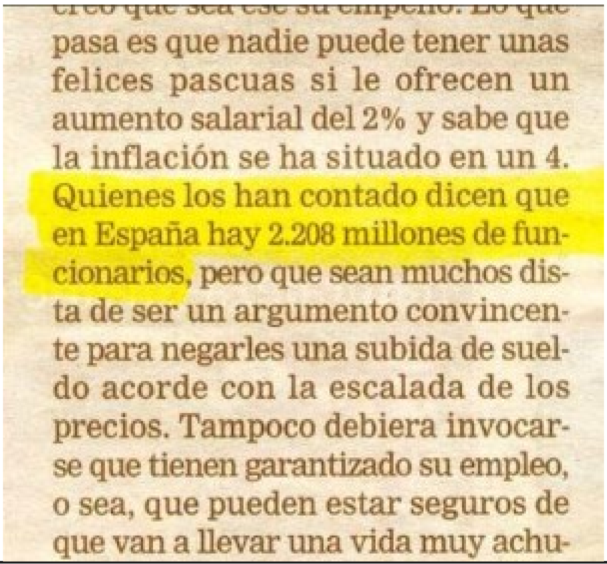
Para ello utilizaremos el error máximo admisible que es el radio del intervalo, es decir, la mitad del margen de error.

Importante

El **error máximo admisible** para la estimación de proporciones viene dado por la siguiente fórmula:

$$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}\cdot(1-\widehat{p})}{n}}$$

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el valor crítico para el nivel de confianza *1-α*, $\widehat{p}$ es la proporción en la muestra y *n* es el tamaño de la muestra.



pasa es que nadie puede tener unas felices pascuas si le ofrecen un aumento salarial del 2% y sabe que la inflación se ha situado en un 4. Quienes los han contado dicen que en España hay 2.208 millones de funcionarios, pero que sean muchos dista de ser un argumento convincente para negarles una subida de sueldo acorde con la escalada de los precios. Tampoco debiera invocarse que tienen garantizado su empleo, o sea, que pueden estar seguros de que van a llevar una vida muy achu-

Demasiados funcionarios: artículo en prensa

Ejercicio resuelto

La empresa farmacéutica de nuestra localidad quiere hacer un estudio para ver si existe relación entre el gasto farmacéutico de una familia y el número de hermanos.

Para ello, lo primero que hace es encargar una encuesta a la empresa TisBet Survey para que estime la proporción de alumnos del IES "Benito V." que tienen dos o más hermanos, con un nivel de confianza del 99%.

¿De qué tamaño mínimo se tendrá que seleccionar la muestra si se admite un error máximo de 0,1?

(En otro estudio reciente se obtuvo que esta proporción era de 0,4).

Mostrar retroalimentación

El error máximo admisible es: $E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}\cdot(1-\widehat{p})}{n}} = 0{,}1$

Como el nivel de confianza es del 99%, tenemos que para 1-*α*=0,99, $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$.

Para $\widehat{p}$ tomamos el valor del estudio anterior, es decir $\widehat{p} = 0{,}4$.

Sustituimos los valores en la fórmula y obtenemos:

$0{,}1 = 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{n}} \rightarrow \frac{0{,}1}{2{,}58} = \frac{\sqrt{0{,}24}}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{\sqrt{0{,}24}\cdot 2{,}58}{0{,}1} = 12{,}64 \rightarrow n = 159{,}77$.

Luego como mínimo, la muestra debe ser de 160 alumnos.

Importante

El **tamaño de la muestra** para la estimación de proporciones viene dado por la siguiente fórmula:

$$n = \frac{\widehat{p}\cdot(1-\widehat{p})\cdot Z^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}{E^2}$$

Comprueba lo aprendido

Blanco

La empresa farmacéutica ha encargado a una empresa de diseño gráfico la elaboración de una serie de carteles publicitarios para informar del lanzamiento de la nueva vacuna.

Cuando reciben los carteles y empiezan a verlos, se dan cuenta de que hay algunos defectuosos.

Antes de pagar la factura por el trabajo realizado,toman una muestra de 100 carteles y observan que hay 6 defectuosos.

a) Estima la proporción real de carteles defectuosos, con un nivel de confianza del 99%.
b) ¿Cuál es el error máximo cometido al hacer la estimación anterior?
c) ¿De qué tamaño tendríamos que coger la muestra, con un nivel de confianza del 99%, para obtener un error inferior a 0,05?

Imagen de reservasdecoches bajo licencia Creative Commons

a) La proporción muestral es $\hat{p}$ = [ ]

Para un nivel de confianza del 99%, $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ = [ ] (Utiliza 2 decimales).

El intervalo de confianza para estimar la proporción real de carteles defectuosos es: ([ ] ; [ ])

b) El error máximo cometido es E≈ [ ]

c) Habrá que tomar al menos una muestra de [ ] carteles.

Enviar

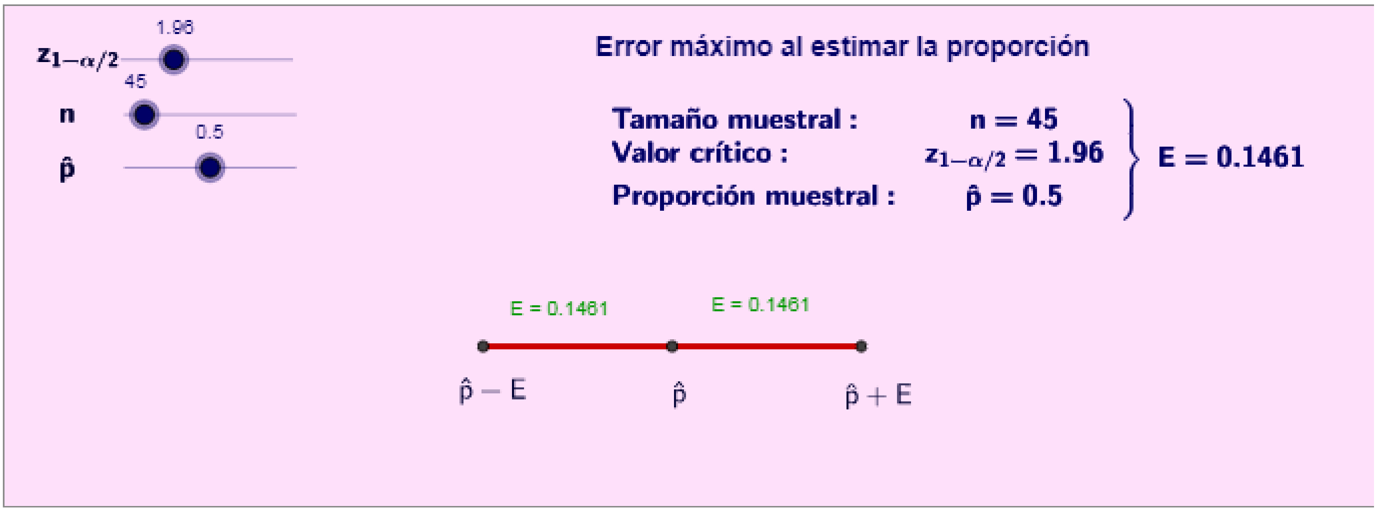
a) $\hat{p}=\frac{6}{100}=0{,}06$

Intervalo de confianza: $\left(0{,}06-2{,}58\cdot\sqrt{\frac{0{,}06\cdot 0{,}94}{100}}\;;\;0{,}06+2{,}58\cdot\sqrt{\frac{0{,}06\cdot 0{,}94}{100}}\right)=(0\;;\;0{,}12)$

b) Error máximo: $E=2{,}58\cdot\sqrt{\frac{0{,}06\cdot 0{,}94}{100}}\approx 0{,}06$

c) Tamaño de la muestra: $n=\frac{0{,}06\cdot 0{,}94\cdot 2{,}58^2}{0{,}05^2}\approx 150$

En esta escena de GeoGebra creada por José Álvarez y modificada por José María Vázquez de la Torre, puedes ver cómo se comporta el error máximo admisible.



Para saber más

4. Ejemplos de selectividad

Imagen de buenosairesprensa bajo licencia Creative Commons

Terminamos el tema con dos problemas de Selectividad correspondientes a exámenes propuestos en Junio de 2010 en Andalucía.

Los dos problemas tratan sobre estimación de proporciones en intervalos de confianza, errores máximos admisibles y tamaño de la muestra, con lo cual, después de todo lo que has aprendido, no debes tener ninguna dificultad para resolverlos.

Imagen de cesar bojorquez bajo licencia Creative Commons

En el primer problema se estudian algunos aspectos de la vida laboral de los trabajadores de una ciudad y para ello se quiere estimar la proporción de trabajadores que residen fuera de la ciudad.

En el segundo problema se quiere estimar el número de votantes de un determinado partido político.

JUNIO 2010. ANDALUCÍA

Una empresa consultora quiere estudiar algunos aspectos de la vida laboral de los trabajadores de una ciudad. Para ello selecciona una muestra aleatoria de 500 trabajadores, de los que 118 afirman residir en otra ciudad. Con un nivel de confianza del 93%.

a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de trabajadores que residen fuera.
b) Calcule el error cometido en el intervalo anterior.

Mostrar retroalimentación

a) $\hat{p}=\frac{118}{500}=0{,}236$.

En la muestra seleccionada, el 23,6% de los trabajadores afirma residir en otra ciudad.

Para un nivel de confianza del 93%, tenemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1{,}81$.

El intervalo de confianza será:

Intervalo de confianza:

$$\left(0{,}236-1{,}81\cdot\sqrt{\frac{\cdot}{500}},\ 0{,}236+1{,}81\cdot\sqrt{\frac{\cdot}{500}}\right)=(0{,}2;0{,}27)$$

la proporción de trabajadores que residen fuera está entre el 20% y el 27%.

b) Error máximo: $E=1{,}81\cdot\sqrt{\frac{0{,}236\cdot 0{,}764}{500}}\approx 0{,}034$

Ejercicio resuelto

JUNIO 2010. ANDALUCÍA

Se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político mediante una muestra aleatoria.

a) Si de una muestra de 500 personas 200 dicen que lo votan, calcule con un nivel de confianza del 97% un intervalo para la proporción de votantes a ese partido en la población.

b) Si la proporción de votantes en otra muestra ha sido 0,2 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0,05, con un nivel de confianza del 99%, calcule el tamaño mínimo de dicha muestra.

Mostrar retroalimentación

a) $\hat{p}=\frac{200}{500}=0{,}4$.

En la muestra seleccionada, el 40% de las personas son votantes del partido político.

Para un nivel de confianza del 97%, tenemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}}=2{,}17$.

El intervalo de confianza será:

Intervalo de confianza: $\left(0{,}4-2{,}17\cdot\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{500}};0{,}4+2{,}17\cdot\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{500}}\right)=(0{,}39;0{,}40)$

La proporción de votantes a ese partido está entre el 39% y el 40%.

b) $\hat{p}=0{,}2$. E=0,05. Nivel de confianza 99%. $z_{1-\frac{\alpha}{2}}=2{,}58$

Tamaño de la muestra: $n=\frac{0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 2{,}58^2}{0{,}05^2}\approx 426$

Para saber más

Objetivos

Intervalos de Confianza

Resumen

Importante

Una **estimación puntual** del valor de un parámetro poblacional desconocido (como puede ser la proporción *p*), es un número que se utiliza para aproximar el verdadero valor de dicho parámetro poblacional.

A fin de realizar tal estimación, tomaremos una muestra de la población y calcularemos el parámetro muestral asociado ($\hat{p}$ para la proporción).

El valor de este parámetro muestral será la estimación puntual del parámetro poblacional.

Importante

A la hora de estimar un parámetro poblacional, un **intervalo de confianza** es un rango de valores (calculado en una muestra) en el cual se encuentra el verdadero valor del parámetro, con una probabilidad determinada.

El **nivel de confianza**, C, indica, en porcentaje, con qué proporción el intervalo de confianza contiene el parámetro estimado.

El **coeficiente de confianza, c=1-α**, es la misma proporción en tanto por uno, c = C/100. En otras palabras, c es la probabilidad de que el intervalo de confianza contenga el parámetro estimado.

Al valor de **α** lo llamamos **nivel de significación** o de riesgo.

Al valor que resulta de restar el extremo superior del inferior del intervalo de confianza, lo llamamos **margen de error**.

Si α = 1 - c, y (a,b) es el intervalo de confianza se cumplirá lo que puedes ver en la siguiente escena de Descartes creada por Aurelio Casas.

Importante

Recuerda que si el tamaño de la muestra era mayor o igual que 30, el estimador de una proporción seguía una distribución normal $N(p,\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$, donde *p* es el parámetro poblacional que se quiere estimar, aproximando su valor mediante el valor del estadístico $\hat{p}$ obtenido de la muestra.

Importante

El **intervalo de confianza** para la proporción $\hat{p}$ es:

$$\left(\hat{p}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\quad,\quad \hat{p}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el valor crítico para el **coeficiente de confianza** $1-\alpha$.

α es el **nivel de significación** o de **riesgo**.

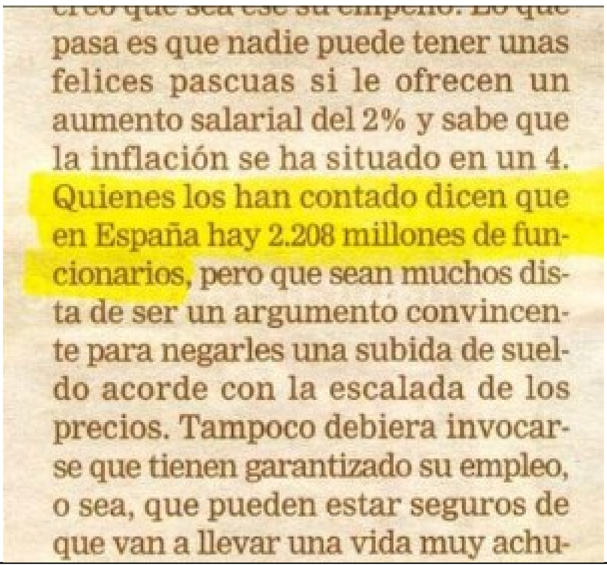
El **margen de error** es la diferencia entre los extremos superior e inferior del intervalo de confianza.

Importante

El **error máximo admisible** para la estimación de proporciones viene dado por la siguiente fórmula:

$$E=Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$$

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el valor crítico para el nivel de confianza *1-α*, $\hat{p}$ es la proporción en la muestra y *n* es el tamaño de la muestra.


pasa es que nadie puede tener unas felices pascuas si le ofrecen un aumento salarial del 2% y sabe que la inflación se ha situado en un 4. Quienes los han contado dicen que en España hay 2.208 millones de funcionarios, pero que sean muchos dista de ser un argumento convincente para negarles una subida de sueldo acorde con la escalada de los precios. Tampoco debiera invocarse que tienen garantizado su empleo, o sea, que pueden estar seguros de que van a llevar una vida muy achu-

Demasiados funcionarios: artículo en prensa

Importante

El **tamaño de la muestra** para la estimación de proporciones viene dado por la siguiente fórmula:

$$n = \frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p}) \cdot Z^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}{E^2}$$