



Análisis II: Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I	
1.º Bachillerato	Contenidos
Análisis II:	
Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica	

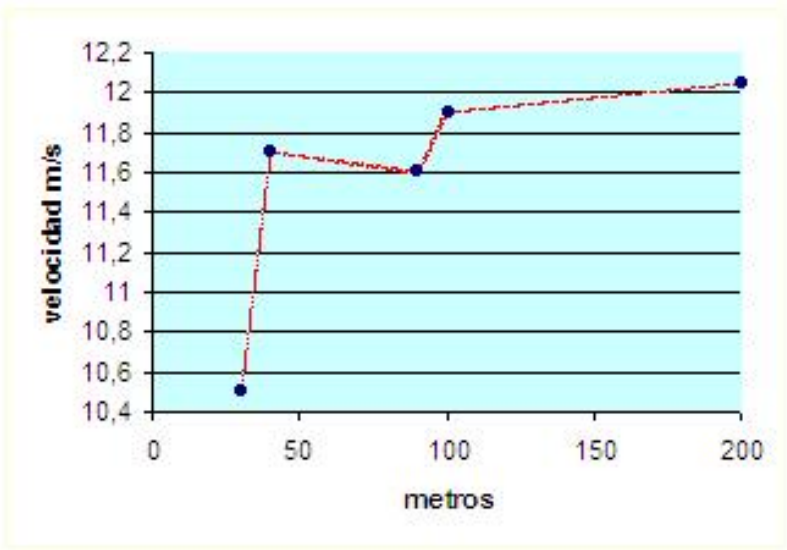
1. Introducción



Imagen de b cheng en [Flickr](#). Licencia [CC](#)

Berlín 20 de agosto de 2009. Usain Bolt bate el récord del mundo en 200 metros, parando el cronómetro en 19,19 segundos. La velocidad media a la que ha corrido es fácil de saberlo, sólo hay que dividir 200 metros entre 19,19 segundos y obtenemos 10,42 metros/segundo.

¿Pero qué velocidad llevaba cuando cruzó la meta? ¿y en la salida? En este tema estudiarás, además de otras cosas, el planteamiento matemático que permite calcular la velocidad del atleta en cada instante de la carrera.



2. Tasa de variación media (TVM)



Caso práctico

¿Te has preguntado alguna vez cómo sufren los ciclistas esas pendientes en las etapas de montaña? ¿Cuánto, cómo se calcula y por qué varía de metro en metro?



Perfil de etapa de la vuelta a España Almería-Alto de Velefique (11 de septiembre de 2009)
Imagen de [UNIPUBLIC, S.A.](#)

- ¿Cuál es la variación de altura de la etapa?
- ¿Cuántos kilómetros han necesitado para alcanzar la máxima altura?

Variación de altura de la etapa

Punto más bajo: Almería km 0, altura 80 m (0 , 80)

Punto más alto: Calar Alto km 122, altura 1980 m (122 , 1980)





Variación: $1980 - 80 = 1900$ metros

Kilómetros que han necesitado para alcanzarlo

$122 - 0 = 122$ km.

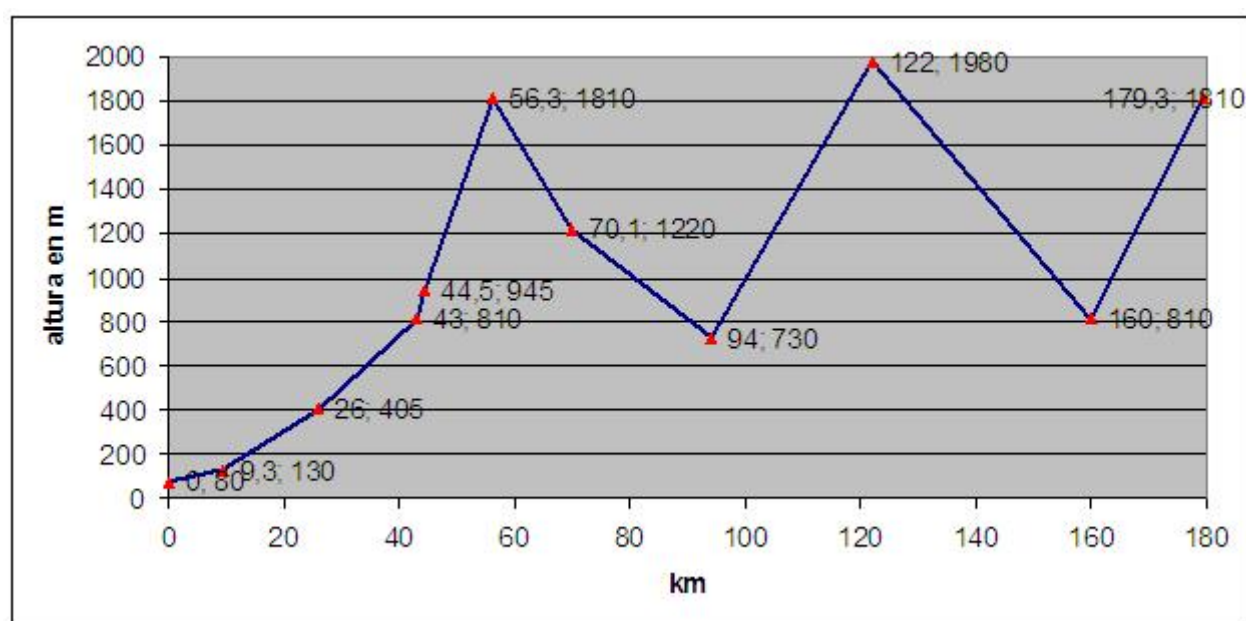


Importante

Dado dos puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ se llama **incremento de y**  a la diferencia de $f(a+h) - f(a)$.
Análogamente **incremento de x**  a la diferencia $a+h - a = h$.
Al incremento de una función entre dos puntos le llamaremos **Tasa de Variación** (TV[a,a+h]).
Si denotamos entonces: 
Llamaremos **Tasa de Variación Media (TVM)** al cociente entre la TV y , es decir:



Caso práctico



1º) Calculemos la variación media de altura sobre el nivel del mar que los ciclistas recorren entre Velefique (44,5 , 945) y el Alto de Velefique (56,3 , 1810).

$$a+h = 56,3 ; a = 44,5 \quad y \quad f(a+h) = 1810 ; f(a) = 945$$

$$TVM[a, a+h] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1810 - 945}{56,3 - 44,5} = \frac{865}{11,8} = 73,31$$

Comentemos el resultado: Los ciclistas suben 73,31 metros en altura sobre el nivel del mar por cada km que recorren (En el tramo Velefique al Alto de Velefique) .

2º) En el tramo (43, 810) y (44,5 , 945) la TMV es de 90 m por km, en efecto,

$$TVM[43 , 44,5] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{945 - 810}{44,5 - 43} = \frac{135}{1,5} = 90$$

Observa que en el gráfico la recta que une estos dos últimos puntos está "más empinada" (tiene mayor pendiente) que la del apartado 1º.

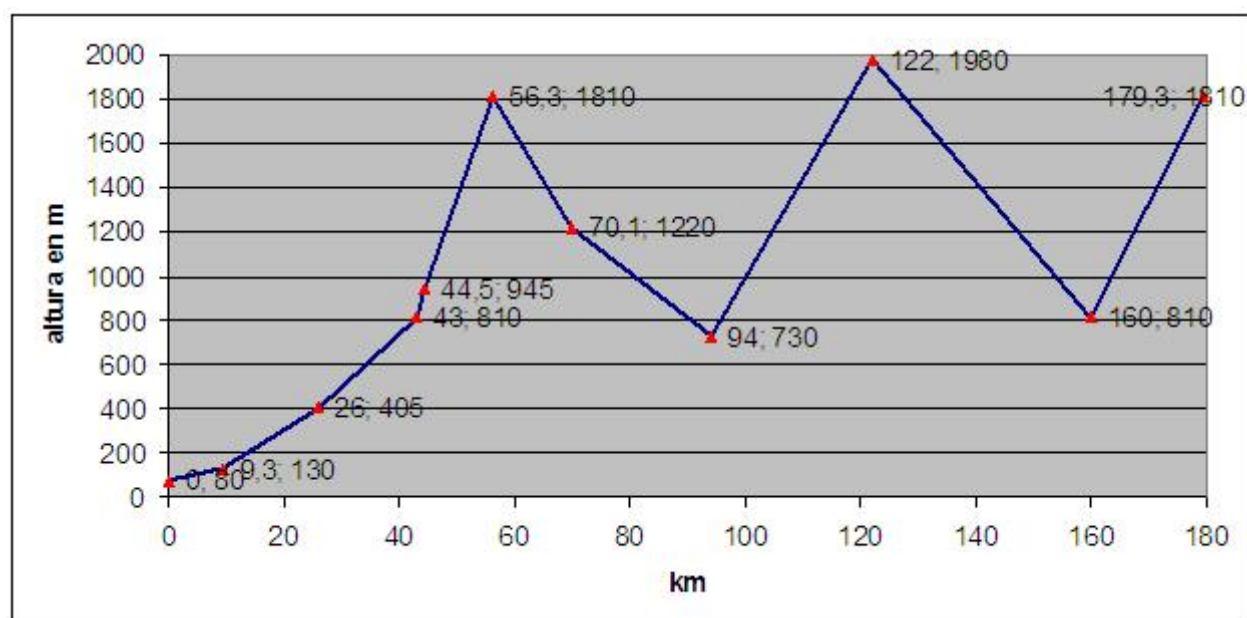
3º) TVM para los puntos (56,3 , 1810) Alto de Velefique y (70,1 , 1220) Bacaes.

$$TVM[56,3 ; 70,1] = \frac{1220 - 1810}{70,1 - 56,3} = \frac{-590}{13,8} = -42,75$$

¡La tasa de variación es negativa! Observa que el tramo de recta que une estos puntos es decreciente.



Comprueba lo aprendido



Si alguna vez te has preguntado por la clasificación de los puertos de montaña, 1ª, 2ª, 3ª y Especial, lo vas a comprobar en esta evaluación.

1.- El alto de Velefique, en la llegada, que varía entre los puntos (166,810) al (179,3 , 1810) es un puerto de categoría especial (además está al final de la etapa) ¿qué TVM en altura tiene?

- ☐ 40,5
- ☐ 75,19
- ☐ 58,51

No es correcto

$$a = 166 \quad a+h = 179,3$$

En efecto $f(a+h) = 1810 \quad f(a) = 810$

$$TVM[a, a+h] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1810 - 810}{179,3 - 166} = \frac{1000}{13,3} = 75,19$$

No es correcta

Solución

- Incorrecto
- Opción correcta
- Incorrecto

2.- ¿Y entre los puntos (122, 1980) Calar Alto y (142, 1000) El Tallón Bajo?

- ☐ 49
- ☐ -49
- ☐ 980 m

No es correcto, revisa el signo, ten en cuenta que va en pendiente.

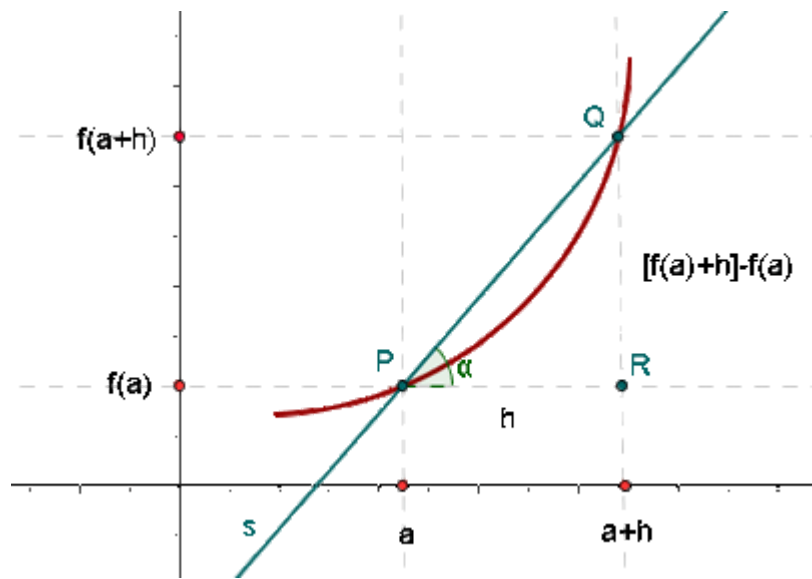
Sí, es una bajada de 20 km.

Eso es lo que bajan en altura. No es correcto

Solución

- Incorrecto
- Opción correcta
- Incorrecto

2.1. Interpretación geométrica.



Tal y como hemos visto en el apartado anterior el cálculo de la TVM nos proporciona información de la inclinación (positiva o negativa, más o menos inclinación) de la recta que une los dos puntos.

Hagamos un pequeño cambio de notación, a partir de ahora

Sean los puntos (a, f(a)) y (a+h, f(a+h)) la pendiente de la recta que une esos puntos será

$$m = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si recuerdas la TVM[a,a+h]=m

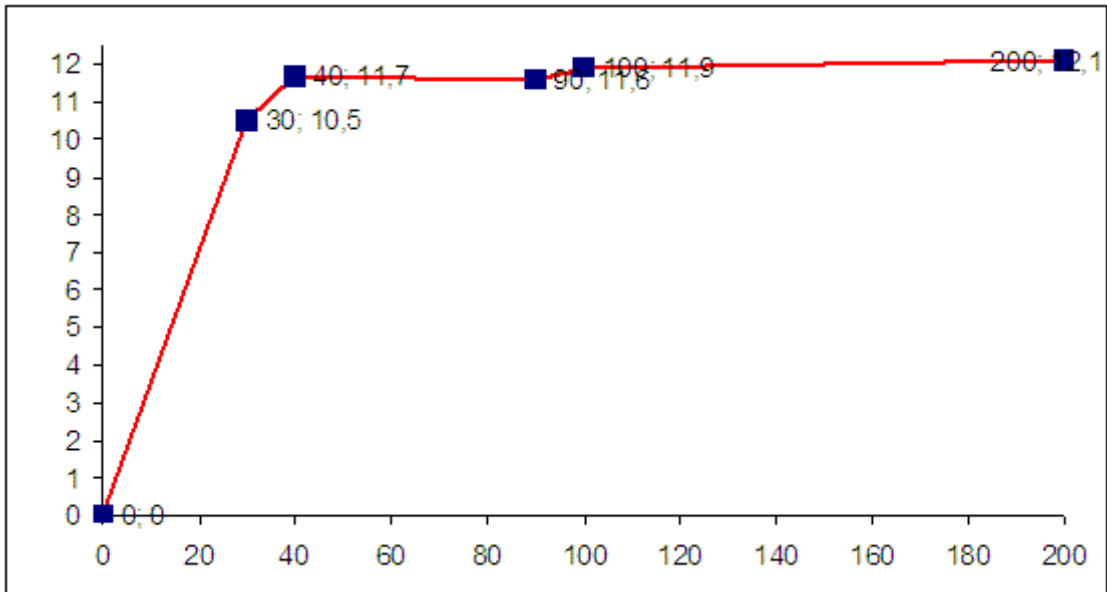


Importante

La Tasa de Variación Media entre dos puntos A y B de una función, es la pendiente de la recta que une ambos puntos. La TVM mide la inclinación de la recta AB.



Caso práctico



En el gráfico te presentamos la evolución de la velocidad de Usain Bolt en la carrera de 200 metros del pasado 20 de agosto de 2009.

Aunque la mayor velocidad la alcanzó en la llegada a meta el tramo de 30 a 40 metros de carrera tiene la pendiente de la recta más pronunciada. Calculemos las TMV de los intervalos [0,30], [30,40]. La tabla que relaciona metros y velocidad es la siguiente:

metros recorridos	30	40	90	100	200
velocidad m/s	10,5	11,7	11,6	11,9	12,1

¿Cuál es la TVM de 0 a 30 metros?

$a=0$; $a+h=30$; $h=30$; $f(a+h)=10,5$; $f(a)=0$
 $TVM[0,30]=\frac{10,5-0}{30}=0,35$

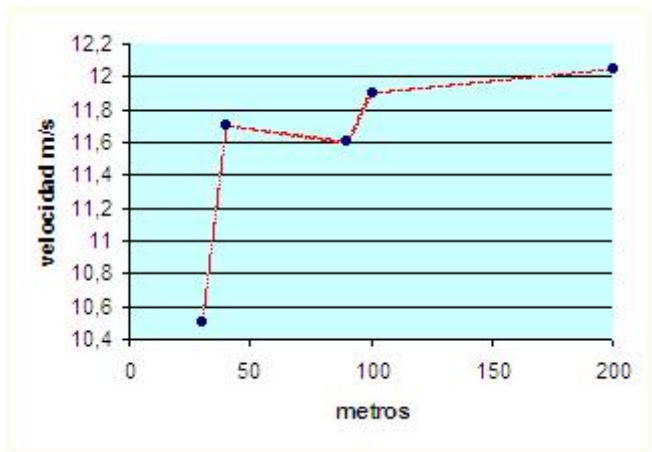
¿y de 30 a 40?

$a=30$; $a+h=40$; $h=10$; $f(a+h)=11,7$; $f(a)=10,5$
 $TVM[30,40]=\frac{11,7-10,5}{10}=0,12$



Comprueba lo aprendido

1) Este gráfico corresponde a la tabla dada en el caso planteado en la introducción, Berlín 20 de agosto de 2009.
A la vista del gráfico ¿En que tramo hay TVM negativa?



- ☐ de 40 a 90
- ☐ de 100 a 200
- ☐ de 0 a 200

Correcto

No es correcto

No es correcto entonces ni toma la salida

Solución

- 1. Opción correcta
- 2. Incorrecto
- 3. Incorrecto

2) ¿Cuánto vale la TVM en el tramo 40 a 90?

[Sugerencia](#)

- ☐ 0,16
- ☐ -0,002
- ☐ -0,2

No es correcto

Correcto. Es negativa pero con pendiente casi nula.

Revisa otra vez los cálculos

Solución

- 1. Incorrecto
- 2. Opción correcta
- 3. Incorrecto

3) Y por último ¿cuál es la TVM de Usain en la carrera?

 [Sugerencia](#)

- ☐ 0,0605
- ☐ 0,12
- ☐ 0,006

Correcto

No es correcto. Hablamos de un hombre no una bala .

No es correcto. Con esa TVM ni se clasifica para los juegos del pueblo.

Solución

1. Opción correcta

2. Incorrecto

3. Incorrecto

3. Tasa de variación instantánea



Imagen de bibin9363pbr en [Pixabay](#). [Pixabay License](#)

¿Te acuerdas que al principio del tema te proponíamos cómo calcular la velocidad de Usain en cualquier instante o la inclinación en cualquier punto de una carrera de montaña?

Pues, ahora es la ocasión de aprender el método matemático.

En los ejemplos que te hemos propuesto y resuelto durante este tema, por ejemplo el de la TM de la carrera de 200 metros lisos de Berlín, hemos calculado en un tramo digamos que grande $([30,40])$ ¿pero y si lo hiciéramos en el tramo $[30, 30,0001]$? Del mismo modo, en el caso de la etapa de la Vuelta del 2009 entre Almería y el Alto de Velefique, se ha calculado la TVM entre los km 43 y 44,5. ¿Podríamos hacerlo entre 43 y el 43,00000001? ¿Qué estaríamos calculando en ambos casos?

Recuerda: $TVM[a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ si como hemos visto arriba "h" es casi cero estaríamos calculando, para el caso del perfil de la etapa la inclinación del terreno en el kilómetro 43, o sea, en un punto, esto ya no sería una tasa de variación media sino **instantánea**.

3.1. La derivada. Interpretación



Importante

Se define **Tasa de variación instantánea** en el punto $x=a$ (TVI_a) como:



En realidad y para simplificar a TVI_a se le llama **derivada de la función $f(x)$ en el punto $x=a$** y se denota por $f'(a)$. La expresión mas conocida es:



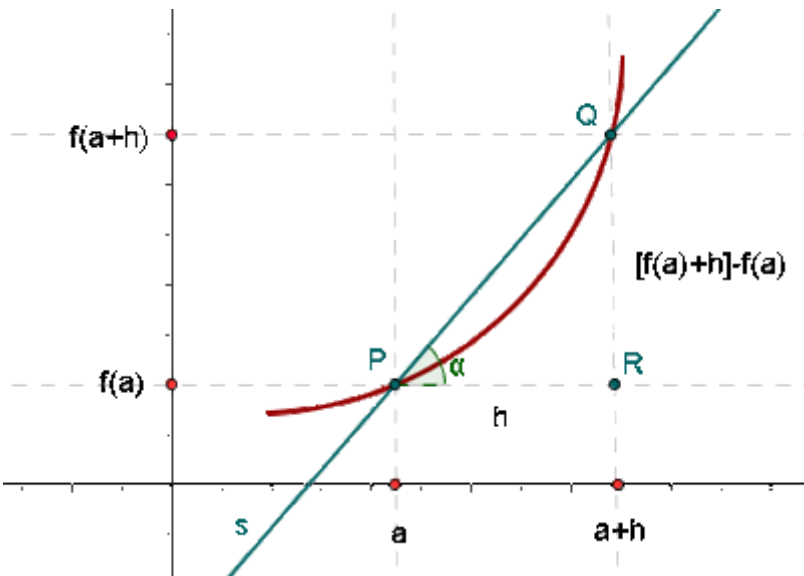
Caso práctico

Calcula la tasa de variación instantánea de la función $f(x)=x^2$ en $x=2$

$$TVI = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+h^2+4h-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h+4 = 4$$

La tasa de variación instantánea es 4.

Si la TVM era la pendiente de la recta secante (que pasa por los dos puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$).



Al hacer que h tienda a 0 , los puntos tienden a coincidir. La recta que era secante a la función en los puntos, es ahora tangente a la función en un punto. Para comprobarlo mueve el deslizador " h " en la siguiente escena de Geogebra.



Recurso de Alberto en [Geogebra](#). Licencia [CC](#)



Importante

Si tenemos una función llamamos **derivada** de la función en un punto a la tasa de variación instantánea de la función en el punto y se denota . Así, según la definición tenemos que:



Geoméricamente, la derivada de una función en un punto es la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función en dicho punto.

Recuerda que para que exista este límite, por tanto la derivada en dicho punto, deben existir los límites laterales y coincidir. Así, de la misma forma, podemos definir las derivadas laterales como:

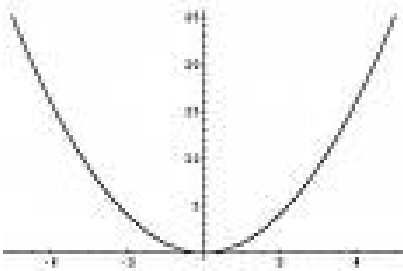
- Derivada por la derecha:



- Derivada por la izquierda:



Caso práctico



Calculemos de forma intuitiva la derivada de la función $f(x)=x^2$ en el punto $a=1$. Para ello vamos a utilizar la definicion de TVM
Construimos la siguientes tablas:

Intervalo [a,a+h]	[1;1,1]	[1;1,01]	[1;1,001]	[1;1,0001]	[1;1,00001]	...	[1,1]
TVM	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001	...	2

Intervalo [a,a+h]	[0,99;1]	[0,999;1]	[0,9999;1]	[0,99999;1]	...	[1,1]
-------------------	----------	-----------	------------	-------------	-----	-------

TVM	1,9	1,99	1,999	1,9999	...	2
-----	-----	------	-------	--------	-----	---

En la primera tabla nos acercamos al punto por la derecha y el resultado es 2.

En la segunda nos acercamos al punto por valores menores (izquierda) y el resultado el 2.

Por tanto, decimos que la derivada de la función $f(x) = x^2$, en $x=1$ es 2, o escrito de forma más elegante, $f'(1) = 2$.



Caso práctico

Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}$$

en el punto de abscisa $x=-2$.

Para ello tenemos que recurrir a la definición de derivada y calcular $f'(-2)$:

Derivada por definición (cociente)



Derivada por definición (cociente)
 Vídeo de lasmatematicas.es alojado en [Youtube](#)

Luego la pendiente de la recta tangente en $x=-2$ es $-2/9$. Formalmente: $f'(-2)=-2/9$



Comprueba lo aprendido

Responde verdad o falso

1) La derivada es el límite de la Tasa de variación.

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

De la Tasa de Variación Media entre dos puntos.

2) La gráfica de las subidas y bajadas de la bolsa es continua.

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

Los sábados , domingos y días de fiesta que no hay actividad, no hay función.

3) La función recorrido de un ciclista en una etapa en función del tiempo es discontinua.

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

Hacer desaparecer el tiempo.... no es posible aún.

4) Una función derivable en un punto es continua en ese punto.

 [Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

¡Ya se que no viene en el tema pero es una buena forma de terminar! Además tenías un 0,5 de posibilidad.



Para saber más

En el siguiente vídeo de la serie Universo Mecánico puedes ver los aspectos históricos que llevaron a la creación de la derivada y algunas de sus aplicaciones en la vida cotidiana. Aparecen también las reglas sobre como calcular derivadas de distintas funciones, algo que veremos en el próximo tema.

Universo Mecánico 03 Derivadas HD720p H 264 AAC



Vídeo de Aírel Núñez R. alojado en [Youtube](#)

Resumen




Importante

Dado dos puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ se llama **incremento de y** () a la diferencia de $f(a+h)-f(a)$.

Análogamente **incremento de x** () a la diferencia $a+h-a=h$.

Al incremento de una función entre dos puntos le llamaremos **Tasa de Variación** ($TV[a,a+h]$).

Si denotamos entonces: 

Llamaremos **Tasa de Variación Media (TVM)** al cociente entre la TV y , es decir:



Importante





Se define **Tasa de variación instantánea** en el punto $x=a$ (TVI_a) como:



En realidad y para simplificar a TVI_a se le llama **derivada de la función $f(x)$ en el punto $x=a$** y se denota por $f'(a)$. La expresión mas conocida es:



Importante

Si tenemos una función  llamamos **derivada** de la función en un punto  a la tasa de variación instantánea de la función en el punto  y se denota . Así, según la definición tenemos que:



Geométricamente, la derivada de una función en un punto es la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función en dicho punto.

Recuerda que para que exista este límite, por tanto la derivada en dicho punto, deben existir los límites laterales y coincidir. Así, de la misma forma, podemos definir las derivadas laterales como:

- Derivada por la derecha:



- Derivada por la izquierda:

