Aritmética: Números racionales

Matemáticas I

1.º Bachillerato

Contenidos

Aritmética

Números racionales

1. Introducción

Recorrer las sucesivas etapas que han marcado el desarrollo de la idea del número, y cómo esta se ha concretado en la práctica, es uno de los viajes más interesantes que puede emprender la mente. Es un viaje fantástico lleno de vicisitudes, vericuetos y giros inesperados, y sumamente instructivo. Los números forman parte de las estructuras lógicas primeras del ser humano y de ellas depende el conocimiento de lo que nos rodea. En buena medida sigue siendo cierta la máxima pitagórica “nada puede ser conocido que no tenga número ”.

Si esta afirmación no te convence, te proponemos un reto:

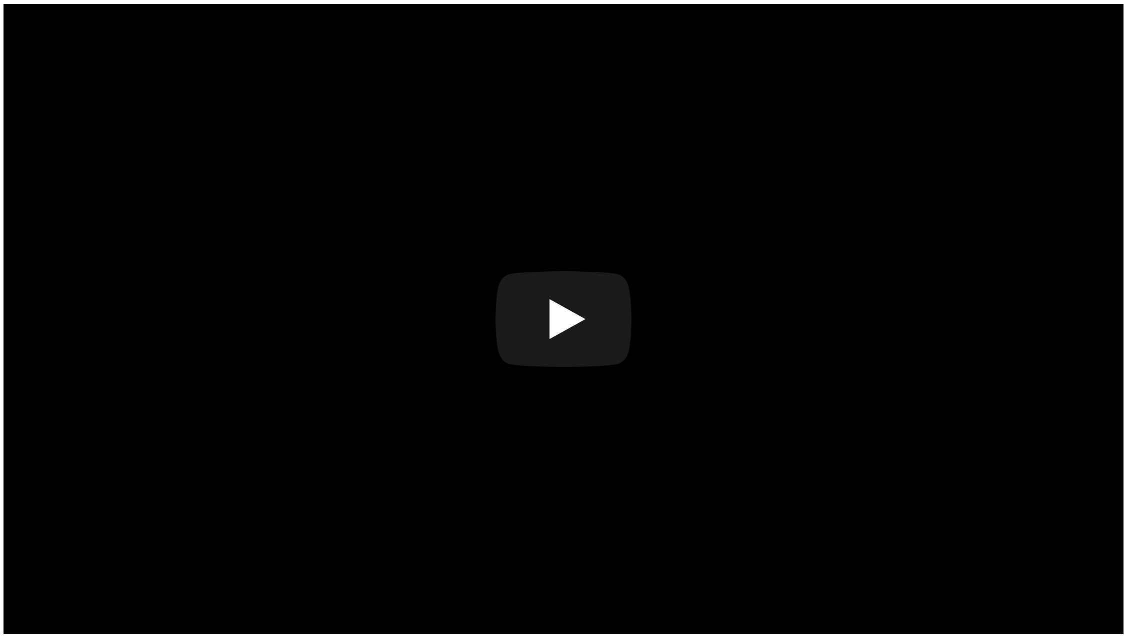
Visita cualquier periódico y busca una noticia en la que no aparezcan números, ni fechas, ni datos, ni porcentajes... ¿Será misión imposible?

Imagen de elaboración propia hecha con titulares del elpais.com

Reflexiona

¿Qué sería de nosotros sin los números?

Para hacerte una idea de lo que ocurría te recomendamos el siguiente corto:



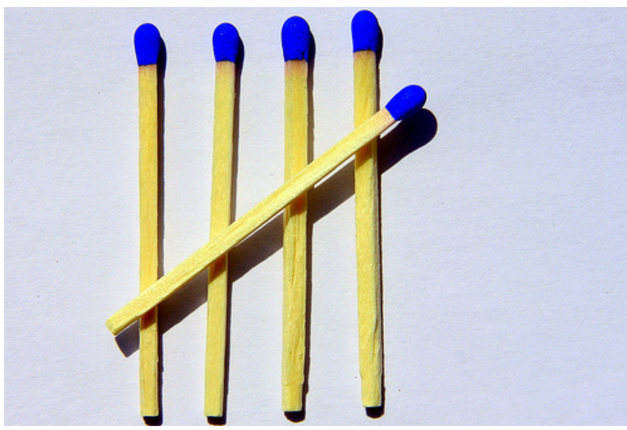
Vídeo de José Luis Rodríguez alojado en Youtube

2. Números naturales

Y la primera etapa de este viaje alucinante son precisamente los números naturales . Estos responden a la pregunta: ¿cuántos? ¿Cuántos planetas tiene nuestro sistema solar? ¿Cuántos dedos tienen nuestras manos?

Así como para escribir las palabras necesitamos un sistema de escritura con unos símbolos y una reglas, para contar también es preciso un sistema de numeración .

El hombre primitivo usó marcas para contar los días o los animales que había cazado, o bolsas con guijarros para contar las ovejas del ganado. En las sociedades más avanzadas, como la del antiguo Egipto, se usaron lo que con más propiedad se denominan sistemas de numeración. Estos constan de una serie de signos o cifras que se utilizan para formar los números siguiendo unas reglas.



Fotografía de mafis75 en Flickr. Licencia CC

Hoy día universalmente se utiliza el denominado sistema de numeración decimal . Al conocimiento del mismo se dedican años en la educación primaria de todos los países, por ser entre otras cosas la llave del conocimiento científico.
Dicho sistema emplea diez signos o cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Lo más peculiar de este sistema de numeración es que los símbolos significan cosas distintas según la posición que ocupen dentro del número.

2.1. Concepto, ordenación y representación

Los sistemas de numeración nacen para representar los números que se necesitaban para contar días, animales, pertenencias,...

Estos números nos rodean y son los que primeros aprendemos, de ahí su nombre, números naturales .

Imagen de annca en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

Si empezamos en 1 y vamos aumentando de 1 en 1, obtenemos un conjunto infinito conocido como números naturales , que representaremos por N.

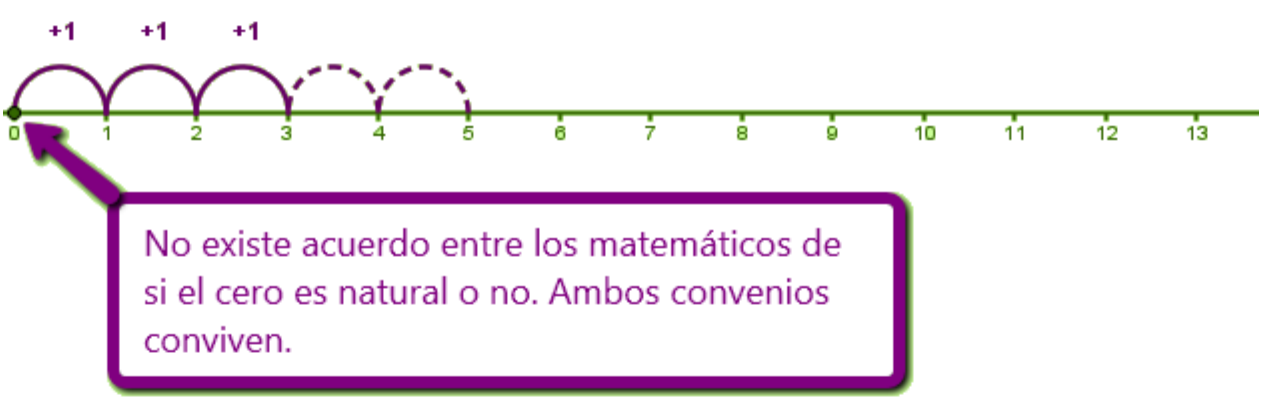


Imagen de elaboración propia

Vocabulario y notación

Para indicar un conjunto se emplean los signos de apertura ‘{‘ y cierre ‘}’. Los elementos del conjunto se incluyen entre ambos signos separados por comas.
Así, por ejemplo, el conjunto de las cifras del sistema decimal se denotaría:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Si es necesario referirse a un mismo conjunto varias veces es costumbre designarlo mediante un nombre literal, en general en mayúsculas. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales (en el sistema decimal) se suele denotar mediante la letra $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13...\}$$

Ordenar los números naturales

Los números naturales se aprenden de forma secuencial: 0, 1, 2, 3, 4, 5… Ello implica que además de las operaciones de suma y producto existen otros aspectos indisolubles del conocimiento de los números naturales. Ello tiene que ver con la relación de orden. Hay un primer número 0, un segundo 1…

Si te fijas entre dos números naturales cualesquiera (llamémosles a y b), se da una de estas tres relaciones:

- $a < b$ ("a es menor que b")
- $a > b$ ("a es mayor que b")
- $a = b$ ("a es igual que b")

Caso práctico

Por una estación de tren han pasado en una semana el siguiente número de viajeros:

24.789, 33.990, 14.378, 39.001, 21.987, 19.853, 28.234

Órdenalos de forma ascendente.

14.378<19.853<21.987<24.789<28.234<33.990<39.001

Comprueba lo aprendido

Escribe el signo que corresponda:<,> o =

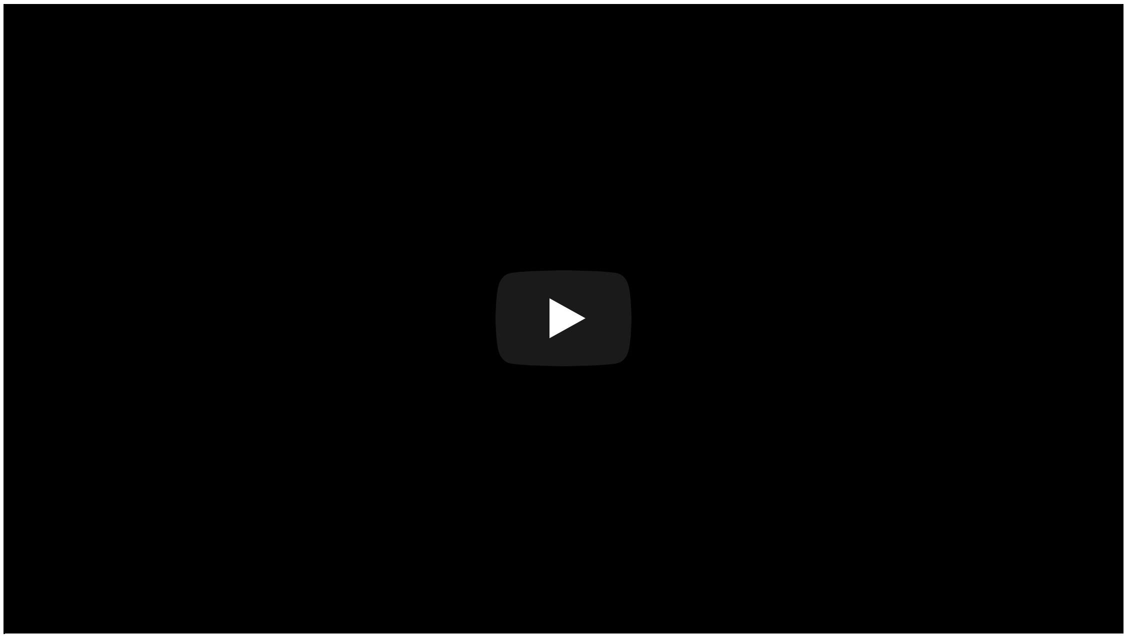
a) 48.753 ☐ 43.271+4.201+937+99

b) 543 ☐ 237+145+163

c) 1.024 ☐ 601+357+66

Curiosidad

¿Cómo nació el cero y su larga batalla para convertirse en número?



Vídeo de BBC News Mundo alojado en Youtube

2.2. Operaciones

Números naturales. Operaciones

Este apartado es claramente un ejercicio de memoria. Desde el colegio o la escuela, los maestros y profesores nos han ayudado a desarrollar unas destrezas de cálculo.

Pero... ¿recordamos cuándo y cómo hay que realizarlas? Por si acaso empecemos por el principio.

Si queremos saber la cantidad de alumnos que hay en una clase, podríamos clasificarlos en dos grupos: el grupo de los alumnos y el de las alumnas. El total de alumnos sería la suma del número de alumnos y del número de alumnas. He ahí el significado de la suma.

Si una caja de lápices de colores cuesta 3 € ¿cuánto costarían 12 de ellas? (Por supuesto sin descuentos). He ahí el significado del producto (la multiplicación).

Imagen de Kranich17 en Pixabay. Licencia Pixabay

Estas dos son las operaciones básicas en el conjunto de los números naturales: suma y producto o multiplicación . Ambas son operaciones binarias, es decir, necesitamos un operador (+ o ·) y dos operandos.

Quizás te preguntes por qué dejamos a un lado operaciones tan sencillas como la resta y la división.

Si recuerdas, estamos hablando de los números naturales y de operaciones entre ellos. Con la suma y la multiplicación, tenemos la certeza que el resultado será también un número natural, mientras que con la resta y la división no siempre ocurrirá esto, ya lo comprobarás en los siguientes apartados.

Es frecuente que las operaciones se combinen, por ejemplo en 2+3·4 se encadenan la suma y el producto. Para indicar qué operación debe hacerse en primer lugar se usan los paréntesis y también los corchetes. Así (2+3)·4 indica que primero debe realizarse la suma y a continuación el producto. El resultado sería, pues, (2+3)·4= 5·4=20. Para reducir el uso de los paréntesis se han establecido un orden de prevalencia entre las operaciones.

En la siguiente presentación, puedes redescubrir las propiedades básicas de estas operaciones y de sus combinadas, aunque ya sean Vox Pópuli:

Presentación de elaboración propia

Importante

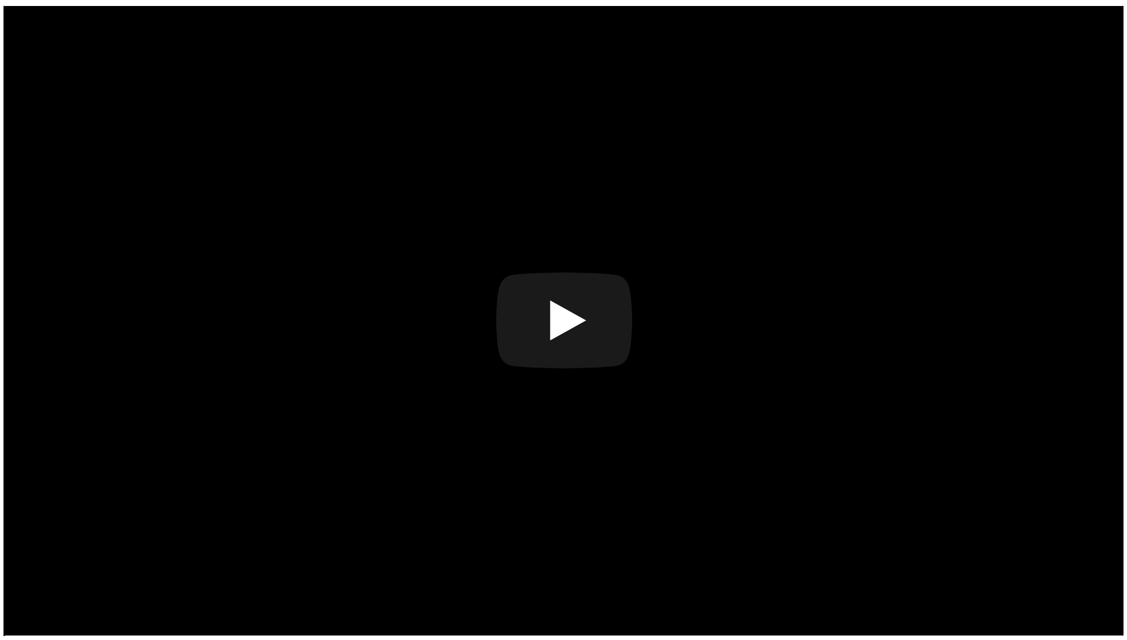
En multitud de ocasiones tenemos que realizar más de una operación a la vez. Para ello, tendremos en cuenta la prioridad de las operaciones , que es la siguiente:

1. Operaciones con paréntesis.
2. Multiplicación y división.
3. Sumas y restas.

Las distintas operaciones o pasos que se realizan se encadenan secuencialmente mediante el signo =. Cada nuevo paso supone una simplificación de los anteriores reduciendo en al menos un nivel su complejidad hasta concluir en el resultado final.

Seguir estas reglas evita errores y permite una corrección más fácil.

En el siguiente vídeo puedes repasar las operaciones combinadas de números naturales mediante ejemplos:



Vídeo de Tutomate alojado en Youtube

Ejercicio Resuelto

Resuelve las siguientes operaciones combinadas:

a. 3·(8+3)+2·7
b. [(2+3)·4+6]·3+10

a. 3·(8+3)+2·7=3·11+2·7=33+14=47
b. [(2+3)·4+6]·3+10=[5·4+6]·3+10=[20+6]·3+10=26·3+10=78+10=88

Caso práctico

En la familia Martínez-Cruz están haciendo un análisis de su economía doméstica. La señora Cruz trabaja por horas con el siguiente horario de trabajo: los lunes, miércoles y viernes trabaja cuatro horas al día, los martes y los jueves sólo tres horas por día y sabemos que cobra a 14 € la hora. Su marido, el señor Martínez tiene un sueldo de 1620 € al mes, y su hijo Miguel gana la mitad que su padre.
¿Cuánto ingresa la familia en dos semanas?

Supondremos que el padre cobra la mitad del mes exactamente: 1.620:2 = 810 €.

Su hijo Miguel cobrará la mitad de lo que él ingrese, por tanto 810:2= 405 €.

Has calculado las horas que trabaja la madre (18 por una semana) y las has multiplicado por el número de semanas: 2, y por el precio por hora: 14. Luego 18·2·14 = 504 €.

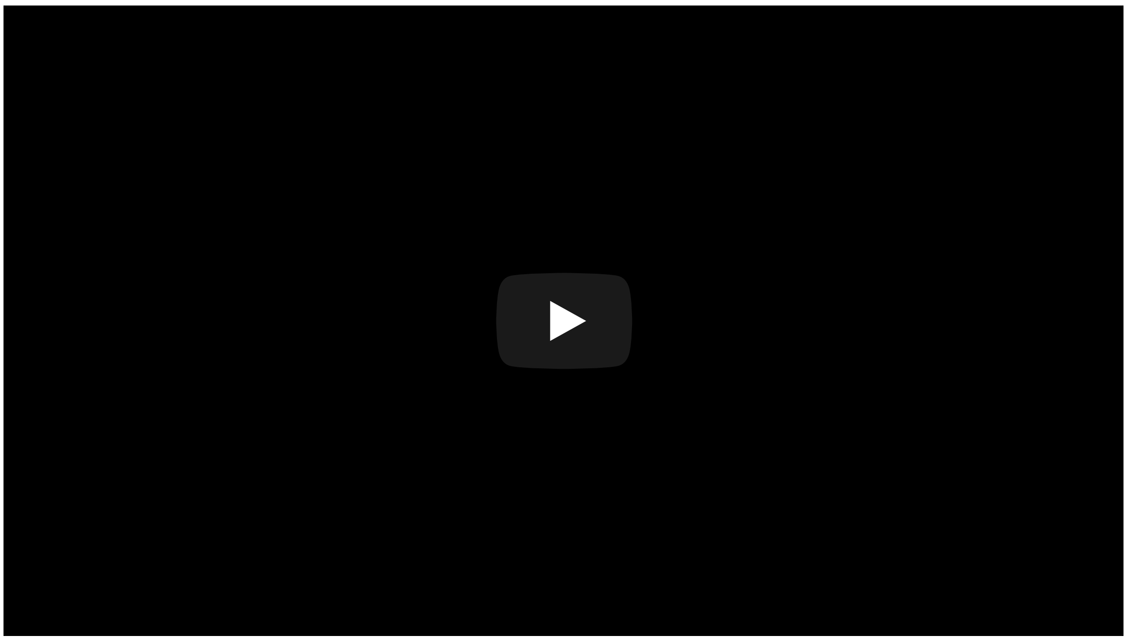
Sumándolo todo 810+405+504 = 1.719 €. Obtenemos que los ingresos de la familia en dos semanas son de 1719 €.

Si la familia destina a pagar la hipoteca la tercera parte de sus ingresos en esos 15 días, a comida 120 € quincenales, a ropa y calzado 250 € mensuales y el resto de gastos aseguran que los cubren con 350 € semanales. ¿Cuánto ahorran cada dos semanas?.

La tercera parte de 1.719 € hacen 573 €. Si a eso sumamos 120 €, 125 € (la mitad de los 250 mensuales) y 700 € (el doble de los 350 semanales) obtenemos 1.518 €. Por tanto, el ahorro será de 201 €.

3. Números enteros

Nuestra cultura ha incorporado los números negativos y los usa en múltiples situaciones. Así se habla de una temperatura de -3° centígrados o de 3 grados bajo cero; los bancos advierten que la cuenta corriente se encuentra en números rojos (negativos) o negros (positivos), forma suave de decir que se le debe dinero; en los libros de Historia se anuncia que tal acontecimiento ocurrió en el año –300 o 300 a. C. o en el año 1750...



Vídeo de Hastelalista alojado en Youtube

El conjunto de los números enteros se designa mediante la letra $\mathbb{Z} = \{...-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4...\}$. Dicha letra proviene del sustantivo Zahl (*número* en alemán).

3.1. Concepto, ordenación y representación

Enteros: una ampliación de los naturales. Comparación y ordenación

Los números enteros pueden considerarse la segunda etapa de ese viaje alucinante que ha comenzado con los números naturales. Entran en escena cuando hay un antes y un después, un arriba y abajo, derecha e izquierda, haber y deber...

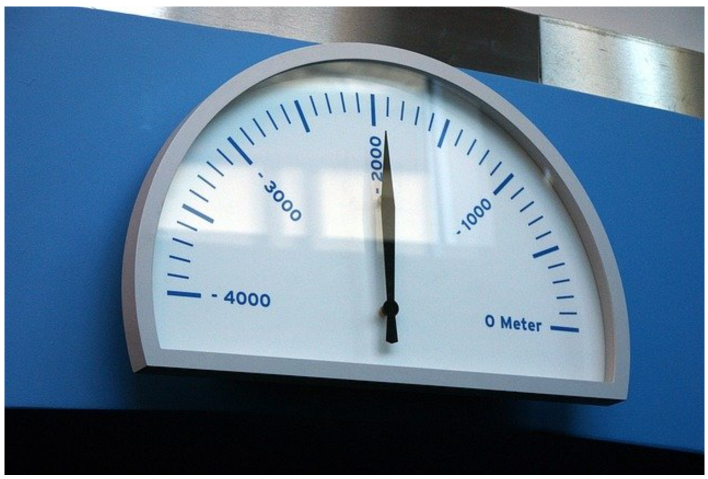


Imagen de 591360 en [Pixabay](). Licencia [Pixabay]()

Al graduar la recta con los números naturales adoptábamos un origen y una unidad. Los números naturales hacían su aparición al llevar la unidad en el mismo sentido a partir del origen. Pero ¿qué ocurre si el sentido se invierte? Hacen su aparición los números enteros negativos, simétricos u opuestos de sus hermanos, los números naturales, ahora también llamados números enteros positivos.

Imagen de elaboración propia

Con los números enteros introducimos dos operaciones nuevas, que condicionarán el uso de las que ya conocíamos: el valor absoluto y el opuesto.

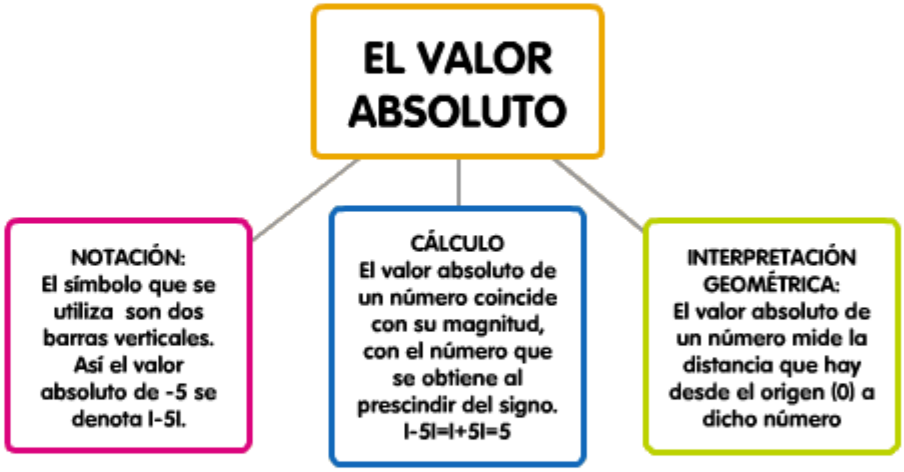


Imagen de elaboración propia

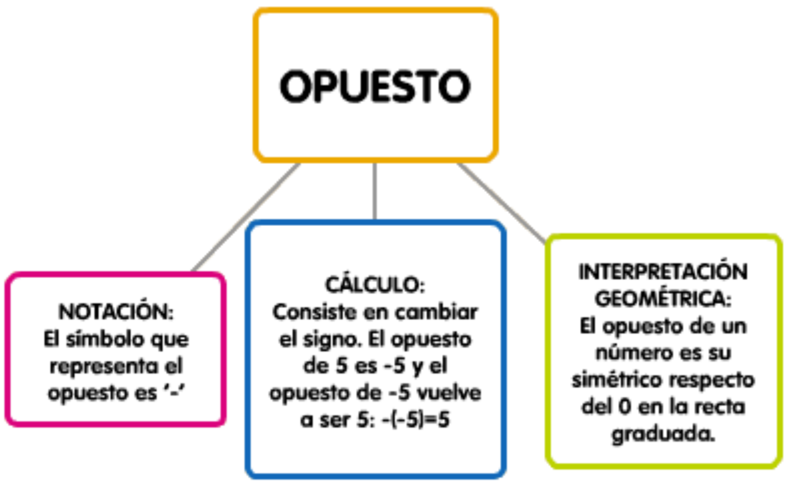


Imagen de elaboración propia

El valor absoluto y el opuesto son operaciones unarias, pues sólo necesitan un operador (|| o -) y un único operando.

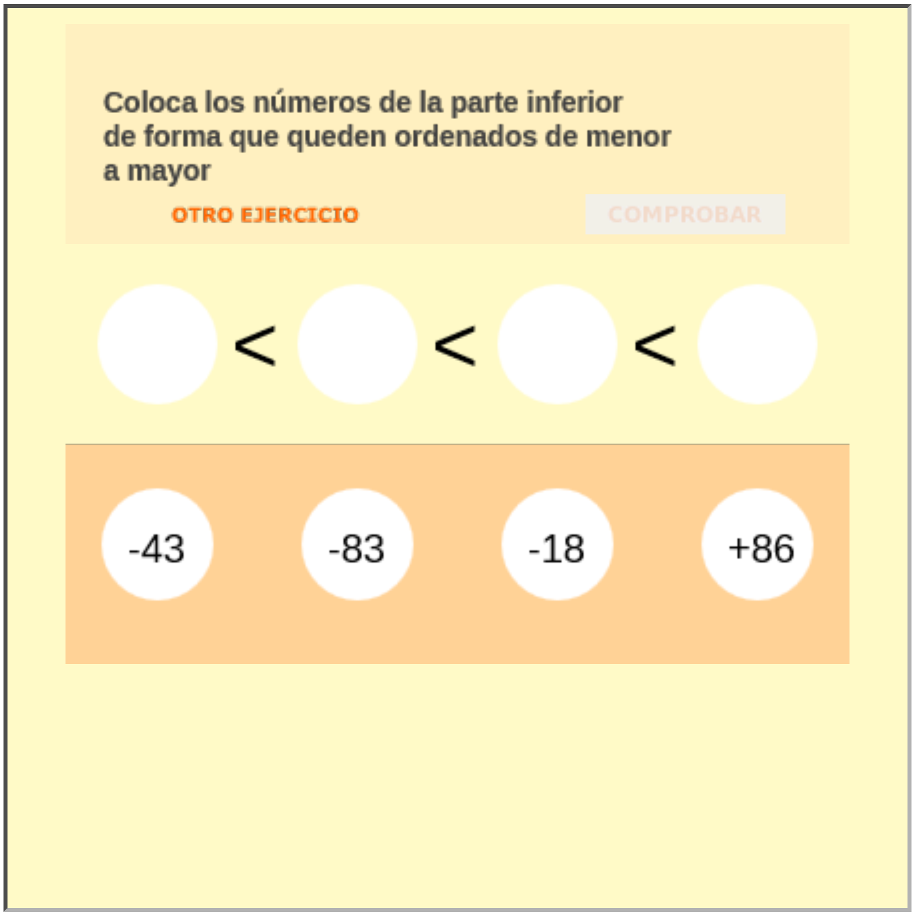
Importante

Aunque es lógico que entre varios números enteros siempre es mayor el que está situado más a la derecha de la recta, el valor absoluto nos permite comparar dos números enteros, teniendo en cuenta que:

- Entre dos números enteros positivos es mayor el de mayor valor absoluto.
- Entre dos números enteros negativos es mayor el de menor valor absoluto.

Comprueba lo aprendido

Puedes practicar cómo ordenar números enteros con la siguiente aplicación:



Escena de Rita Jiménes Igea en Proyecto Descartes. Licencia CC

Comprueba lo aprendido

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. El valor absoluto de un número entero y de su opuesto coinciden.

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Porque tiene la misma magnitud.

b. El valor absoluto de un número entero puede ser negativo.

Verdadero Falso

Falso

El valor absoluto de un número es la distancia entre ese número y el 0. La distancia es una magnitud que siempre es positiva.

c. El opuesto de un número se puede esquematizar por la siguiente representación:

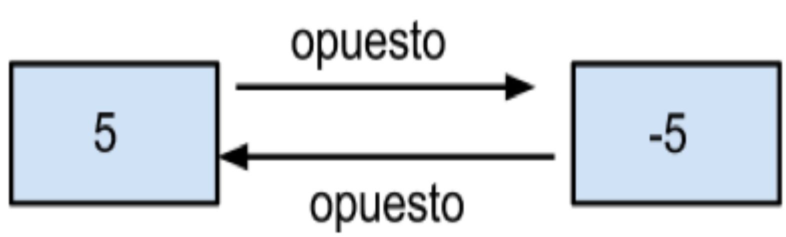


Imagen de elaboración propia

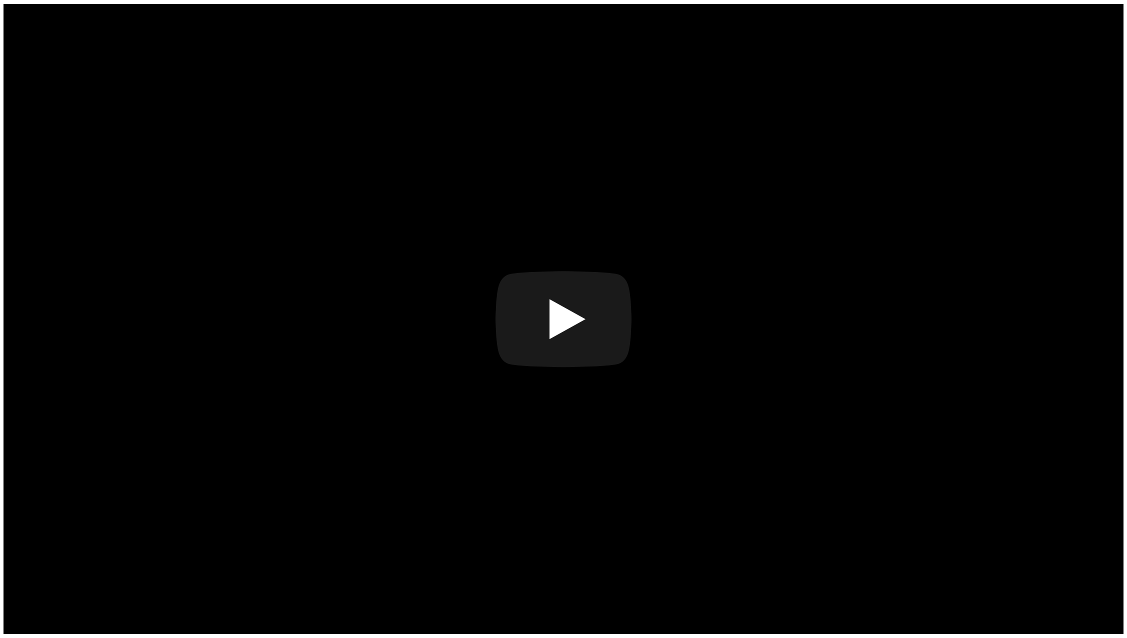
Verdadero Falso

Verdadero

Para obtener el opuesto sólo hay que cambiar el signo.

Para saber más

Ejemplos y más sobre números enteros



Vídeo de Silvananieco alojado en Youtube

3.2. Operaciones

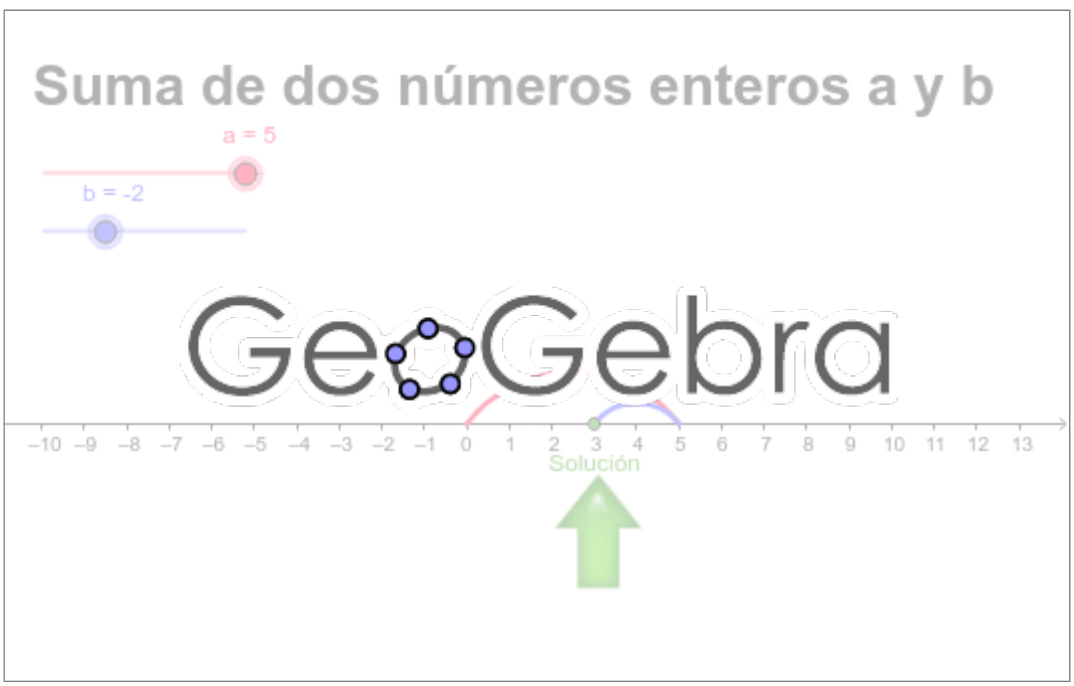
Suma y resta de números enteros

Aunque el valor absoluto y el opuesto también son operaciones, este apartado lo dedicaremos a las operaciones "clásicas" (por clásicas no nos referimos a más antiguas, pero sí seguro que a las que más recuerdas).

Reflexión

Manipula el siguiente applet de Geogebra y plantéate las siguientes preguntas:

1. ¿Qué ocurre si a y b tienen el mismo signo?
2. ¿Y si tienen signo contrario?



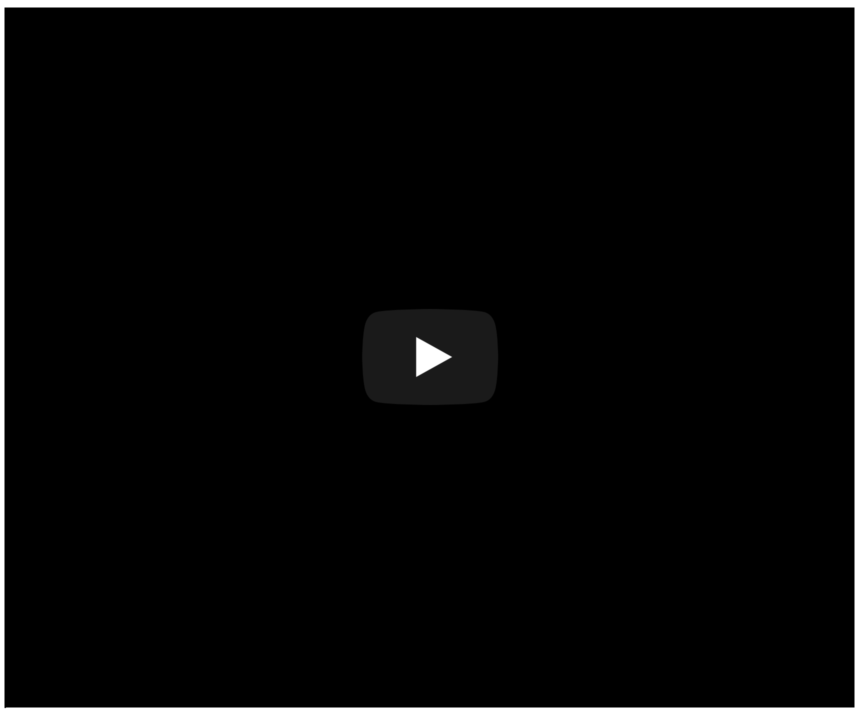
Importante

En el caso de la suma de dos números enteros distinguimos dos casos:

- Que ambos números tengan el mismo signo. En este caso el signo del resultado es el signo común de los sumandos. El valor absoluto del resultado es la suma de los valores absolutos de los sumandos.
- Que los números a sumar tienen distinto signo, el resultado adopta el signo del sumando de mayor valor absoluto. El valor absoluto del resultado es la diferencia entre el mayor valor absoluto de los sumandos y el menor.

La operación resta o diferencia entre números enteros se puede entender como un caso particular de la suma: a-b=a+(-b), a,b son números enteros.

En el siguiente vídeo puedes ver estas definiciones con ejemplos:



Vídeo de Tuto mate alojado en Youtube

Importante

Nunca pueden aparecer dos signos (operaciones) seguidos. Tienen que estar separados por paréntesis, corchetes...

Multiplicación y división

Sabemos que multiplicar consiste en sumar un número (multiplicando) tantas veces como indica otro número (multiplicador), y que en el caso de que sea posible efectuar la división, esta consiste en indagar cuántas veces un número (divisor) está "contenido" en otro número (dividendo). La operación división entre números enteros no siempre da como resultado un número entero (pasa algo parecido a la resta de números naturales).

Imagen de adege en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

El producto (división) de dos números enteros se obtiene ateniéndose a las reglas:

- El valor absoluto del resultado es el producto (división) de los valores absolutos.
- El signo se obtiene mediante la regla del producto (división) de los signos:

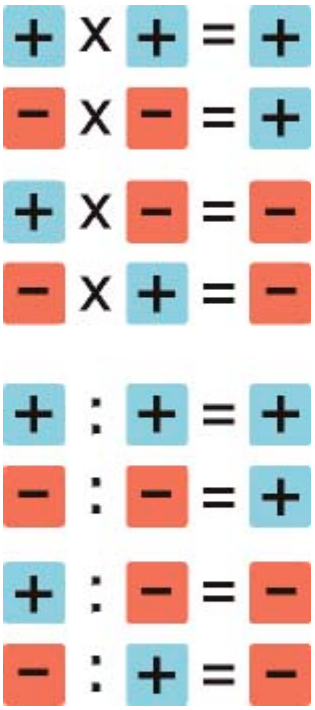


Imagen de Antonio Ortega Moreno alojada en Intef. Licencica CC

Las operaciones con números enteros cumplen las mismas reglas que las operaciones con números naturales.

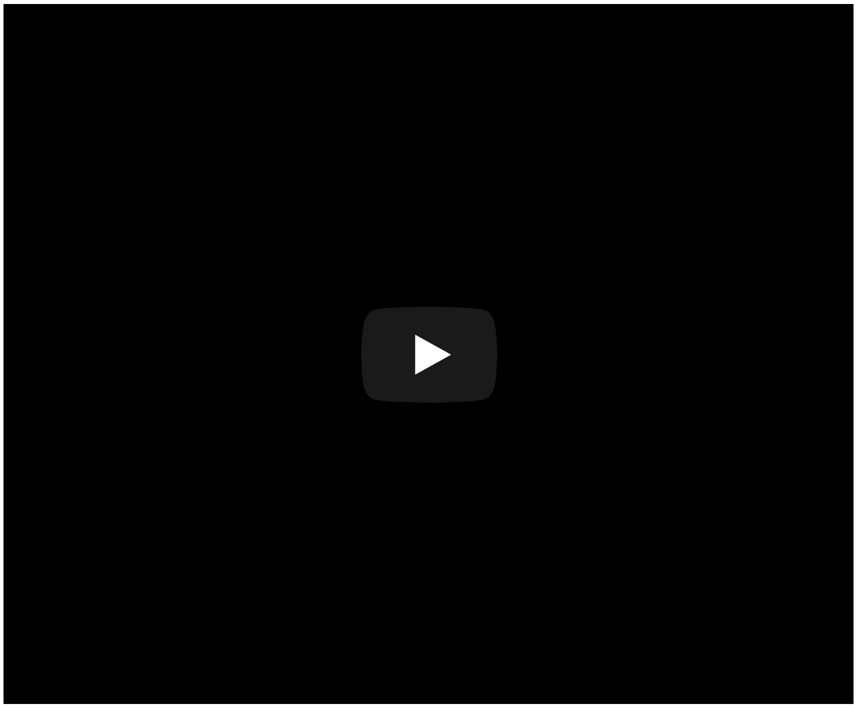
Ejercicio Resuelto

Realiza las siguientes operaciones combinadas de números enteros:

a. -3·[(2-1-7)-8]
b. 2·(-8-4+12)-3·[7-(-2+1)]

a. -3·[(2-1-7)-8] = -3·[(-6)-8] = -3·[-14] = +42
b. 2·(-8-4+12)-3·[7-(-2+1)] = 2·(0)-3·[7-(-1)] = 2·0-3·[7+1] = 2·0 -3·8 = -24

En el siguiente vídeo podemos ver cómo operar combinando estas operaciones



Vídeo de Tuto mate alojado en Youtube

Potencias

Al igual que la multiplicación es la suma de varias veces de un mismo número, la potenciación es el producto resultante de multiplicar una o varias veces ese número.

Las potencias se representan a^b donde a es el número que se multiplica (base) y b el número de veces que se hace el producto (exponente).

Así por ejemplo, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

Sus propiedades son muy prácticas a la hora de simplificar cálculos:

$$0^n = 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \cdot b^n = \left(a \cdot b\right)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Calcula las siguientes potencias

a) 2^2 b) $(2)^2$ c) $(-2)^2$ d) -2^2 e) $(-2)^3$ f) -2^3

a. $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$
b. $(2)^2 = 2 \cdot 2 = 4$
c. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$
d. $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$
e. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
f. $-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$

Ejercicio Resuelto

Resuelve las siguientes potencias:

a) $3^4 . 3^7$ b) $(-2)^3 \cdot (-2)^{-5}$ c) $5^2 : 5^6$ d) $(-7)^6 : (-7)^4$ e) $(4^3)^6$

f) $(-2^3)^2$ g) $2^4 . 3^4$ h) $3^3 . (-2)^3$ i) $4^5 : 2^5$ j) $(-12)^6 : 3^6$

a) 3^{11}; b) $(-2)^{-2}$; c) 5^{-4}; d) $(-7)^2$; e) 4^{18}; f) $(-2)^6$; g) 6^4; h) $(-6)^3$; i) 2^5; j) $(-4)^6$

Importante

Si observas detenidamente el ejemplo anterior podemos sacar algunas conclusiones:

1. Si el signo está dentro del paréntesis, formará parte de la base y por consiguiente se repetirá tantas veces como nos indica el exponente.
2. Si el signo está fuera del paréntesis, no forma parte de la base y por consiguiente se añadirá al resultado de la potencia.
3. Si la base es positiva, el resultado será positivo.
4. Si la base es negativa y el exponente es par, el resultado será positivo.
5. Si la base es negativa y el exponente es impar, el resultado será negativo.

Estamos en números enteros, hemos hablado de potencias con base positiva y negativa, y exponentes positivos. Pero... ¿qué ocurre con los exponentes negativos? ¿No existen potencias con exponentes negativos? La respuesta es sí, pero tendrás que descubrirlas en el apartado cuarto.

3.3. Divisibilidad. MCM y MCD

Frente a lo que pudiera parecer la operación producto de números enteros ha tenido mayor importancia que la suma. El producto ha permitido un mayor conocimiento de los números enteros e interesantes aplicaciones prácticas. Por ejemplo, la clasificación de los números primos, que son esenciales en las labores de codificación en informática y en la creación de claves.

Imagen de moerschy en Pixabay. Licencia Pixabay

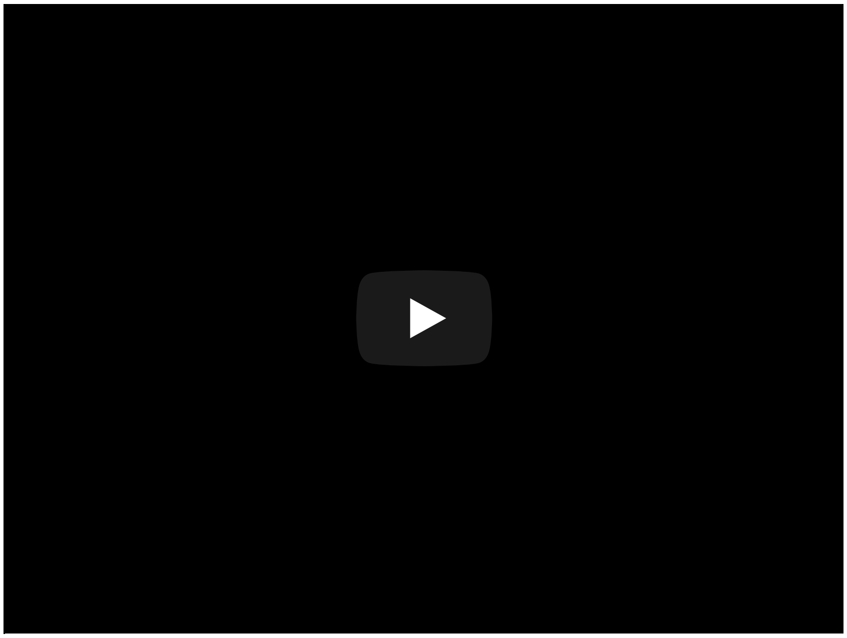
Importante

Si $a \cdot b = c$ con a y b números enteros distintos de 0, entonces

a y b se llaman divisores o factores de c. También c se dice múltiplo de a y b.

Dado que 2·5=10, 2 y 5 son divisores o factores de 10. A su vez 10 es un múltiplo de 2 y de 5.
Decir que 2 es un divisor de 10 es equivalente a decir que 10 es un múltiplo de 2.

Por tanto, los múltiplos de un número natural son los números naturales que resultan de multiplicar ese número por otros números naturales:



Vídeo de lasmatematicas.es alojado en Youtube

Ser divisor es lo recíproco a ser múltiplo. Si 9 es múltiplo de 3, entonces 3 es divisor de 9. Los divisores de un número natural lo pueden dividir de forma exacta.

Para hacer más operativa la búsqueda de los divisores de un número, tenemos los criterios de divisibilidad.

Los criterios de divisibilidad son reglas que nos permiten averiguar con rapidez si un número es divisible por otro; es decir, si el más grande es múltiplo del más pequeño o si el más pequeño es divisor del más grande.

ES DIVISIBLE POR	CRITERIO DE DIVISIBILIDAD	EJEMPLO
2	Si termina en cero o cifra par.	24, 238, ... Como terminan en 4 y 8 que son números pares, ambos son divisibles por 2.
3	Si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.	564 -> 5 + 6 + 4 = 15 -> 15 es múltiplo de 3, luego 564 es divisible por 3.
5	Si termina en cero o cinco.	45, 510, ... Como terminan en 0 y 5 ambos son números divisibles por 5.
10	Si termina en cero.	230, 110, ... Como terminan en 0, ambos son divisibles por 10.

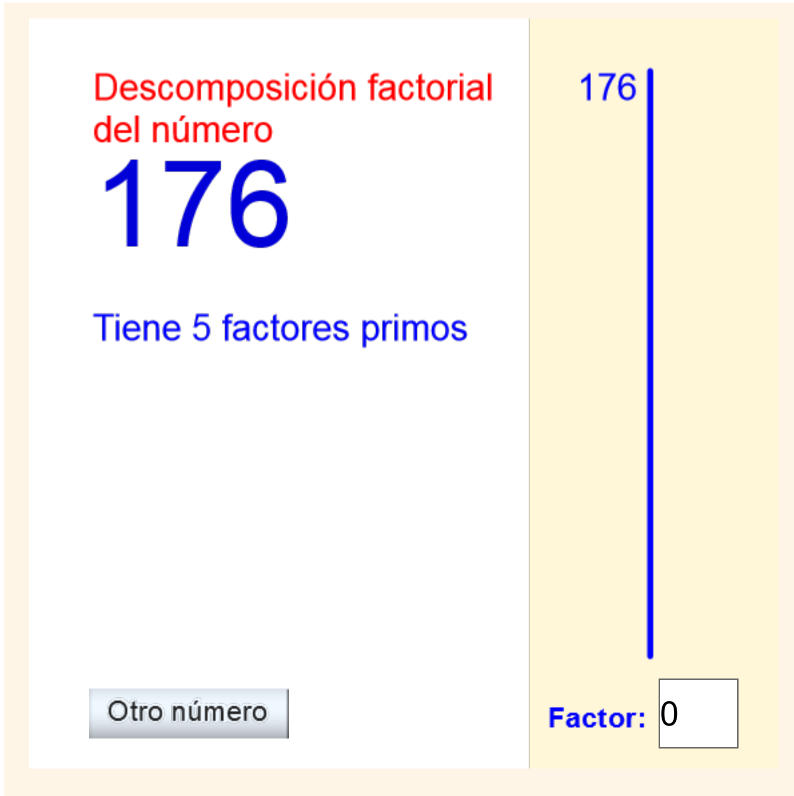
Estos criterios de divisibilidad no solo nos permiten reconocer, sin realizar la división, si un número es divisible por otro, sino también descomponer el número como un producto de otros números.

En la siguiente presentación descubrirás cómo se hace esta descomposición y cómo, a través de ella, podemos calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo , conceptos que te serán muy útiles de aquí en adelante.

Presentación de elaboración propia

Comprueba lo aprendido

A continuación, algunos ejercicios para practicar la descomposición en factores primos:



Escena de Eduardo Barbero Corral en Proyecto Descartes. Licencia CC

Caso práctico

En nuestro instituto funcionan cinco talleres: fotografía, ajedrez, canto, teatro y literatura. Las reuniones del taller de fotografía se hacen cada dos días, el de ajedrez cada tres, el de canto cada cuatro días, el de teatro cada cinco días y el de literatura cada seis días.
Si el día 1 de Octubre se reunieron los cinco talleres, ¿cuándo será la próxima vez en que volverán a coincidir las reuniones de todos los talleres?

Observa que el número buscado debe ser múltiplo de los 5 números dados, ya que un taller se reúne cada vez que suma una cantidad fija de días, es decir, va construyendo un serie de múltiplos (p.e. ajedrez se reúne a los 3 días, a los 6 días, a los 9 días, ..., el de teatro a 5 días, a los 10, a los 15,...).

Por tanto, queremos un múltiplo común, y deseamos saber la primera vez que ocurrirá; luego, buscamos el MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.

Como hemos visto antes, descomponemos todos los números en factores primos y tomamos los factores comunes y no comunes con mayor exponente. De ese modo es múltiplo de todos y es el más pequeño posible.

Pues bien haciendo eso, obtenemos que 2,3 y 5 son números primos, $4 = 2^2$ y $6 = 2 \cdot 3$; Por tanto el mínimo común múltiplo es $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, o lo que es lo mismo 60.

Luego cada 60 días vuelven a coincidir. Si coincidieron el día 1 de octubre, la próxima vez será el 30 de noviembre.

Curiosidad

Otras clasificaciones de números

Los números poligonales los descubrieron los pitagóricos que utilizaban piedras o guijarros para formar figuras geométricas. Por ejemplo, tenemos números hexagonales y pentagonales:

Imagen de Drini en Wikimedia Commons. Licencia CC

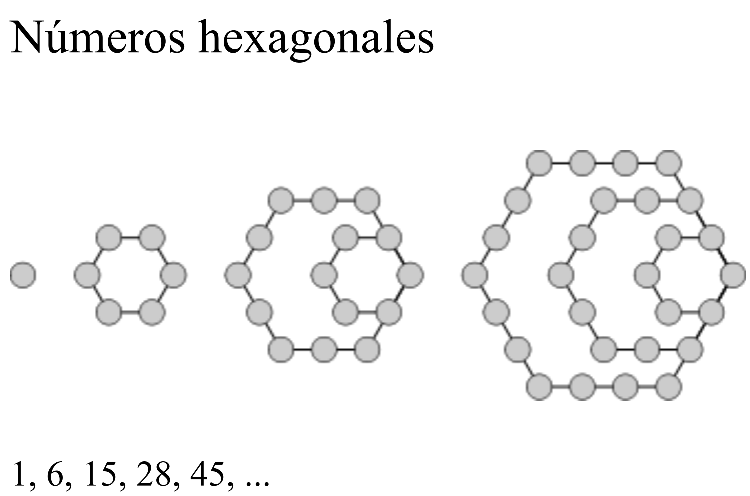
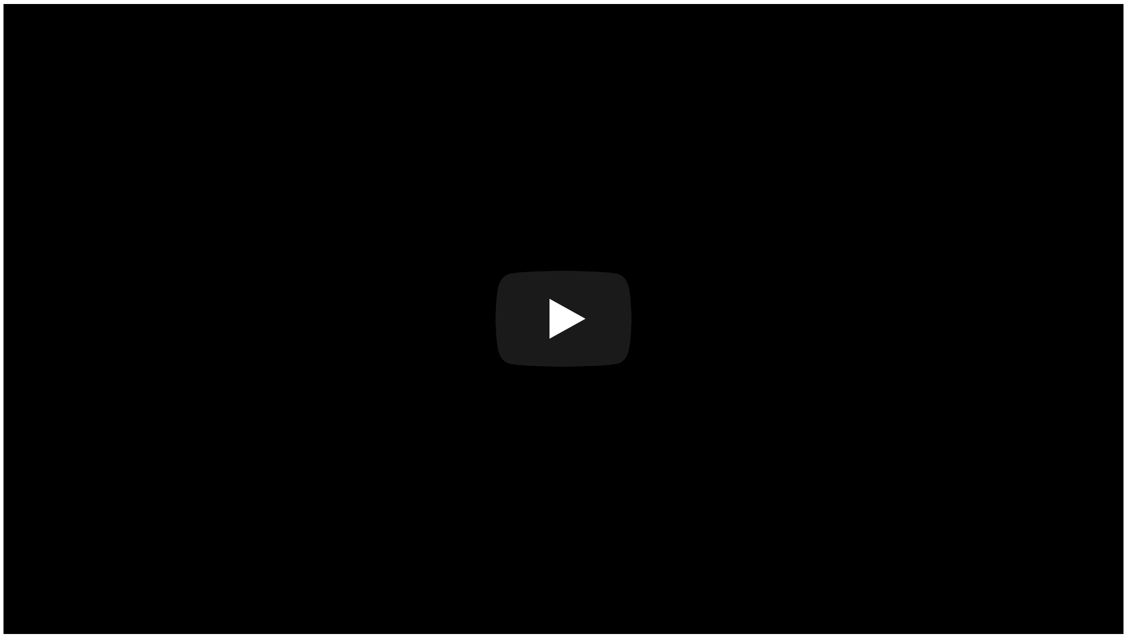


Imagen de Onmywaybackhome en Wikimedia Commons. Licencia Dominio Público

Un número perfecto es un número natural que es igual a la suma de los divisores propios positivos, sin incluirse él mismo. Por ejemplo, 6 es un número perfecto, pues si sumamos sus divisores propios no negativos y distintos de 6, es decir 1+2+3, el resultado es el número perfecto.

Números amigos . Dos números son amigos si los divisores propios de uno dan el otro y viceversa. Por ejemplo, 220 y 284 son amigos.

Números primos gemelos. Son parejas de números primos que están separados por una distancia de 2. Pero mejor te lo explica Jeff Bridges:



Vídeo de Pilar Gallego alojado en [Youtube]()

4. Números racionales

En una sociedad en la que la información nos llega de forma masiva, las infografías se han abierto su hueco ayudando a organizar dicha información de una forma visual y atractiva, incluso algunas veces interactiva.

La mayoría de estas infografías recogen datos expresados de distintas formas como las que se recogen en el siguiente esquema:

Imagen de elaboración propia

Observa que tenemos:

1. Números con decimales
2. Porcentajes
3. Y alguna expresión del tipo 3 de cada 10.

Estos nuevos números son los que se conocen como números racionales , y como ves pueden venir expresados en distintos formatos.

4.1. Fracciones

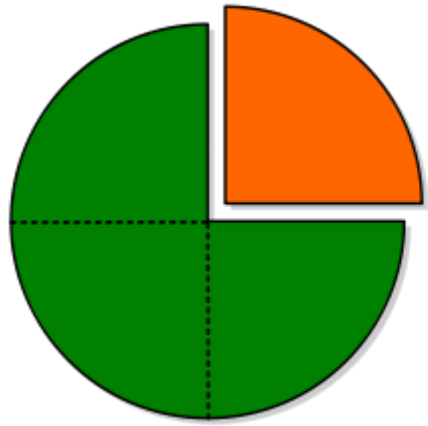


Imagen de Canislupusarctos en

Wikimedia Commons. Licencia CC

En la actualidad se habla mucho del proceso de independencia de Cataluña, de cómo se fraccionaría España o de que solo una fracción de la población está a favor de dicho proceso. Precisamente el concepto de fracción da nombre a un procedimiento basado en dividir (fraccionar) algo en partes.

En matemáticas, cuando queremos expresar una parte de un total recurrimos a los números fraccionarios o fracciones.

Los elementos que forman la fracción, y que se escriben separados por una raya horizontal, son:

- El denominador. Es el número de abajo, indica el número de partes iguales en que se divide la unidad.
- El numerador. Es el número de arriba, indica la cantidad de esas partes que se toman.

¿Cómo leemos las fracciones?

Primero se lee el numerador como cualquier número, y a continuación el denominador de la siguiente manera:

- Si es 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se lee: medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos y novenos.
- Si es 10 se lee décimos; si es mayor que 10 se lee el número añadiendo la terminación -avos.

Así, un minuto es un sesentavo de hora y se representa por $\frac{1}{60}$. Si tomamos cinco minutos, se lee como cinco sesentavos de hora, y se representa por $\frac{5}{60}$.

Importante

Una fracción también puede entenderse como el cociente de dos números. Es decir, es una división sin realizar. Donde el numerador es el dividendo y el denominador el divisor.

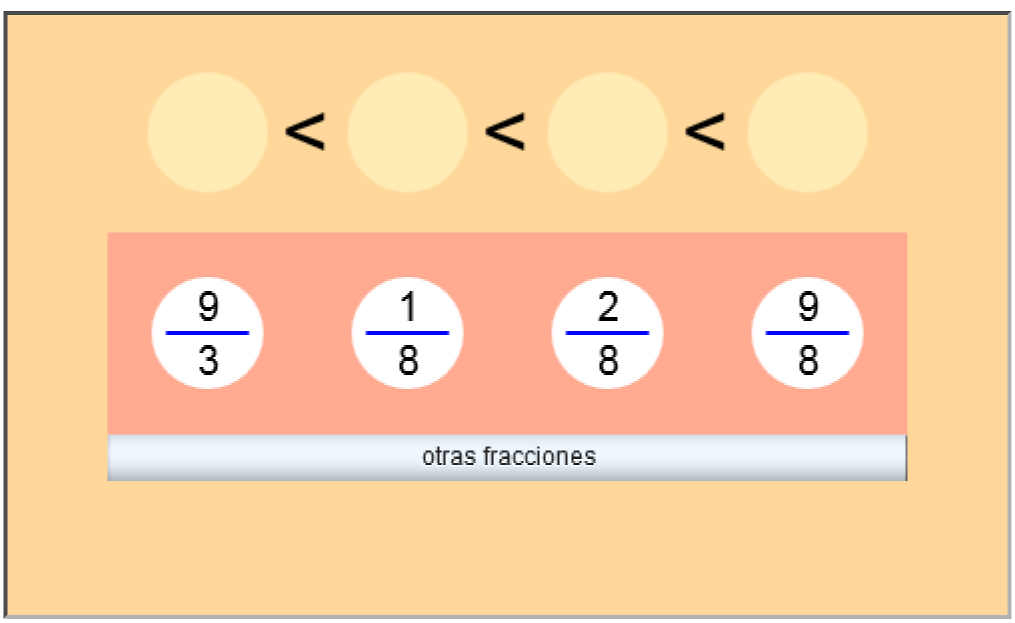
Luego, para saber cuál es el valor de una fracción deberíamos realizar esa división. Sin embargo, con la simple observación del numerador y del denominador podemos hacernos una idea de ese valor:

- Si el numerador es más pequeño que el denominador, entonces la fracción vale menos de 1.
- Cuanto más cerca esté el numerador del denominador más cerca estará el valor de 1.
- Si el numerador es mayor que el denominador, entonces la fracción vale más de 1.

En general, su valor será más grande cuanto mayor tenga el numerador, y será más pequeño cuanto mayor tenga el denominador.

Comprueba lo aprendido

En el siguiente applet, prueba a ordenar las fracciones siguiendo las directrices anteriores:



Escena de Eduardo Barbero Corral en Proyecto Descartes. Licencia CC

Caso práctico

María se ha comido 3 partes de un bizcocho que se había dividido previamente en 8 partes iguales.

a) ¿Qué fracción representa lo que se ha comido María?

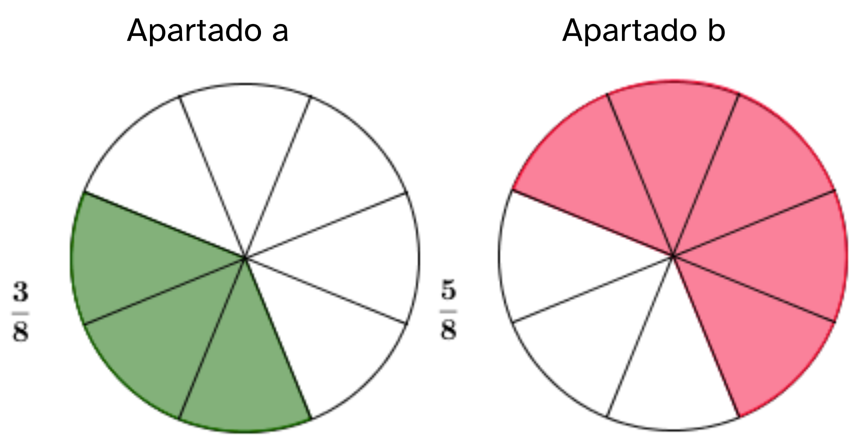
b) ¿Y la parte de bizcocho que ha sobrado?

c) Representa cada una de las fracciones anteriores mediante un dibujo.

a) 8 partes representa el total, luego será el denominador. El numerador de la fracción será las partes que se ha comido, 3. $\frac{3}{8}$

b) El total sigue siendo el mismo, pero cambia el numerador ya que las partes que no hemos consumido son 5. $\frac{5}{8}$

c)



Importante

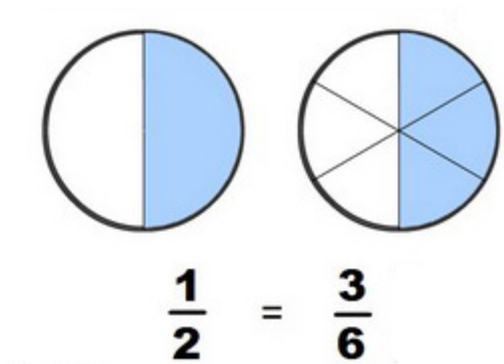
Todo número que pueda ponerse en forma de fracción se dice que es un número racional.

Fracciones equivalentes. Operaciones con fracciones

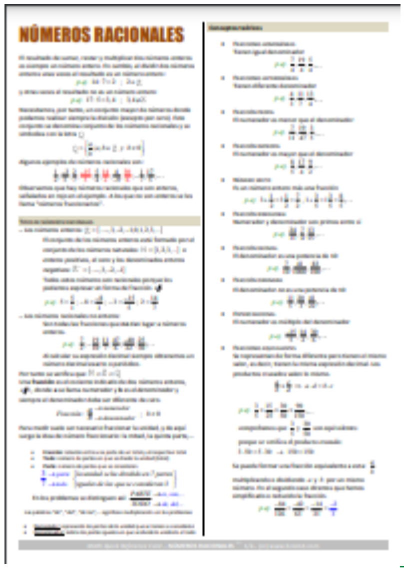
Una de las peculiaridades que plantean las fracciones es que una misma medida (un mismo número) puede expresarse de formas distintas. Así media hora $\frac{1}{2}$ puede expresarse también como 30 minutos, $\frac{30}{60}$ de hora, o como dos cuartos de hora, $\frac{2}{4}$. Esto en principio puede considerarse un trastorno, pero precisamente esta propiedad es la que nos permite comparar, sumar y restar fracciones.

Importante

Llamamos fracciones equivalentes a aquellas que representan la misma cantidad. Para comprobar que dos fracciones son equivalentes multiplicamos en cruz el numerador de la primera por el denominador de la segunda, y si obtenemos el mismo resultado que al multiplicar el denominador de la primera por el numerador de la segunda, entonces las fracciones son equivalentes.



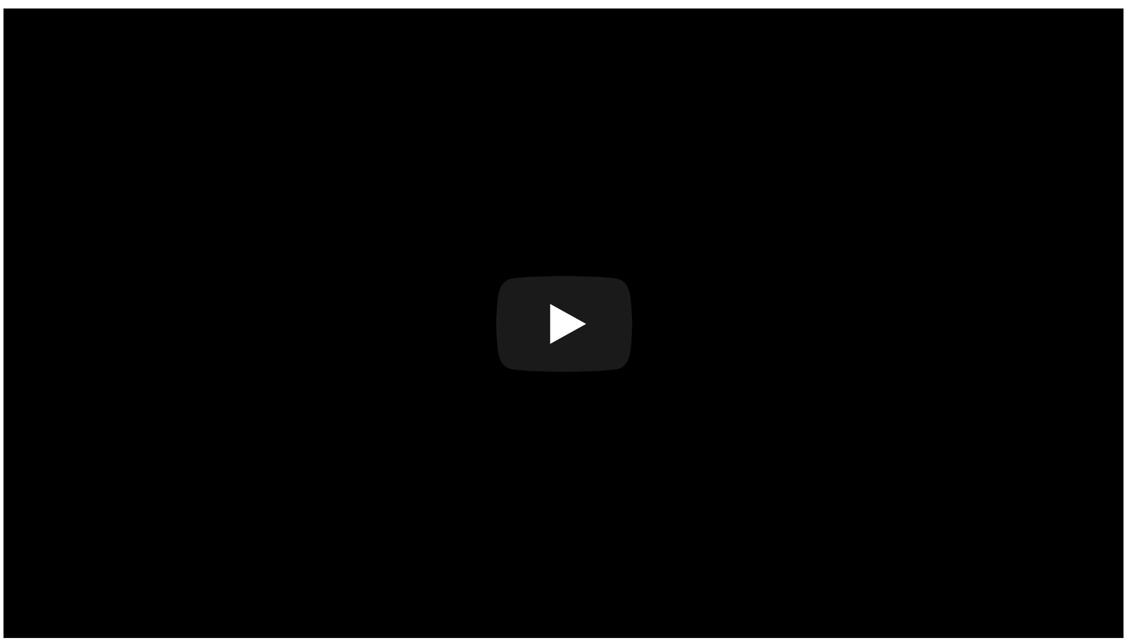
Para recordar cómo se operaba con fracciones te recomendamos que tengas a mano el siguiente pdf:



[>> Documento de descarga]

Pdf elaborado por Jesús Plaza M. en 3con14. Licencia CC

Y que visualices la lista de reproducción compuesta por 10 vídeos, se da un repaso a todos los conceptos trabajados en el apartado Números racionales:



Lista de reproducción de Tuto mate alojado en Youtube

Ejercicio Resuelto

Resuelve las siguientes operaciones

a. $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\right)$

b. $\left(-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right):\left(2-\frac{1}{4}\right)$

a. $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{10}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{6}=\frac{45}{24}=\frac{15}{8}$

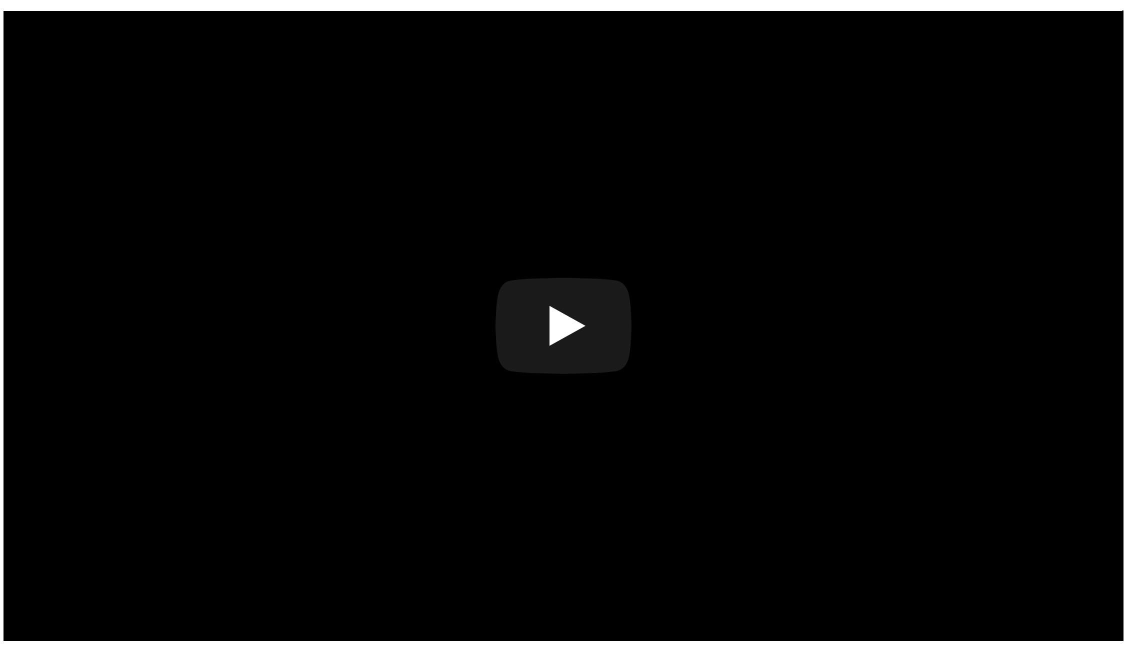
b. $\left(-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right):\left(2-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{-12+9-4}{12}\right):\left(\frac{8-1}{4}\right)=\frac{-7}{12}:\frac{7}{4}=-\frac{1}{3}$

Curiosidad

LEGO es una empresa y marca de juguetes danesa reconocida principalmente por sus bloques de plástico que se conectan entre sí y permiten hacer construcciones.

Dada su popularidad, su fácil manejo y su atractivo visual, se pueden utilizar para ejemplificar situaciones matemáticas, tal y como se recoge en en este artículo que te enlazamos: Aprende Matemáticas con Lego. Concretando lo abstracto.

Te recomendamos el siguiente vídeo. Aunque las pocas palabras que aparecen están en inglés, solo la exposición te puede ayudar a comprender el concepto de fracciones equivalentes.



Vídeo de Kidspot alojado en Youtube

4.2. Expresión decimal

Como ya hemos visto, los números enteros no son suficientes para expresar todas las situaciones de la vida cotidiana. Precisamente utilizamos las fracciones para expresar partes de un total y las expresamos como una división sin realizar; pero... ¿qué ocurre si efectuamos dicha división entre el numerador y el denominador y obtenemos un resultado con resto distinto de 0? ¿Podemos seguir repartiendo el resto sobrante?

La respuesta es afirmativa, y obtendríamos un número decimal.

Los números decimales forman parte de nuestra rutina, puede que incluso más que las fracciones. Usamos los números decimales cuando pagamos con monedas de céntimo: esto cuesta 3,45 €, cuando practicamos algún deporte: he corrido 4,5 km...

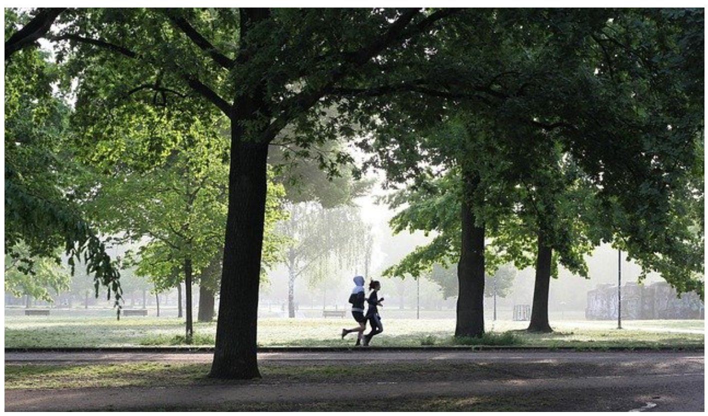


Imagen de wal_172619 en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

Los números decimales están formados por una parte entera y otra parte decimal, separadas por una coma. Para expresar la parte decimal recurrimos a las unidades decimales (décimas, centésimas, milésimas...):

Donde el 5 son las décimas y 1 las centésimas.

Para pasar de fracción a decimal ya hemos visto que hay que efectuar la división entre numerador y denominador. Aunque lo normal es que recurras a la calculadora para dicha operación, si quieres refrescar la memoria te dejamos el siguiente vídeo.

Una vez realizada la operación el cociente puede ser:

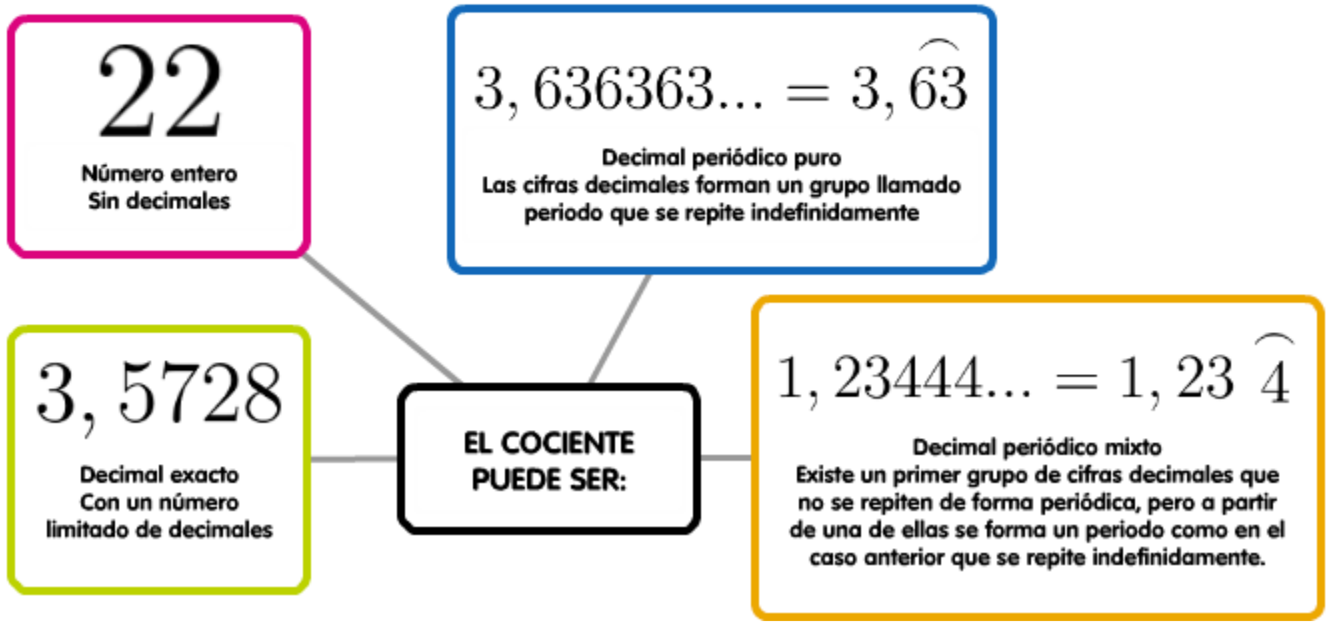


Imagen de elaboración propia

Operaciones con números decimales

En la siguiente presentación puedes descubrir cómo se opera con números decimales. Al igual que pasaba con las fracciones las operaciones básicas, conservan las mismas propiedades:

Presentación de elaboración propia

Caso práctico

Marcos ha sacado dinero de su cuenta corriente utilizando la tarjeta de crédito en un cajero automático. Ha sacado 120 €, pero ha perdido el comprobante de la operación y no puede saber el saldo que tiene. Mirando el comprobante de la última vez que usó la tarjeta observa que tenía 904,21 €. Después le han ingresado la nómina del mes, de 1339,56 € y ha pagado de esa cuenta los recibos de la luz cuyo importe ha sido de 53,21 €, del alquiler del piso, por un valor de 320,80 € y la letra del coche, de 207,95 €.

1. ¿Qué saldo indicaba el comprobante que ha perdido Marcos?

Si tenía 904,21 € y recibe la nómina: 904,21+ 1339,56 sería el saldo antes de pagar los gastos y sacar dinero. Luego, el saldo final se obtiene de: 904,21+1339,56-53,21-320,80-207,95-120= 1541,81 €.

2. Al llegar a su casa Marcos encuentra el aviso de cobro de dos domiciliaciones: agua, 32,67 €, y seguro del coche, 437,45 €. Con el dinero que le quede después de esos pagos quiere hacer 3 partes iguales, una para comprar un ordenador que cuesta 380 €, otra para libros y música y la tercera para sus gastos. ¿Podrá comprarse el ordenador?

Tenía 1541,81. Ahora: 1541,81-32,67-437,45=1071,69, y esta cantidad dividida entre 3 sale a 357,23 €. Si quiere comprarse el ordenador no podrá cumplir los planes previstos.

Resumen

Importante

Los números naturales son aquellos que nos sirven para contar. En la recta numérica se representan a la derecha del 0.

Las principales operaciones aritméticas con números naturales son la suma, la resta, la multiplicación y la división.

Para realizar operaciones combinadas con las diferentes operaciones aritméticas hay que seguir una jerarquía en las mismas:

1°) Se efectúan las operaciones que se encuentran dentro de los paréntesis, y después las potencias.

2°) A continuación, se resuelven las multiplicaciones y las divisiones en el orden en que aparecen de izquierda a derecha.

3°) Por último, se realizan las sumas y las restas en el mismo orden.

Importante

Los números enteros positivos, negativos y el 0 forman el conjunto de los números enteros.

Los enteros positivos se representan en la recta numérica a la derecha del número 0, y los negativos a la izquierda.

El valor absoluto de un número entero es el número que resulta al prescindir de su signo.

La suma de dos números enteros del mismo signo es igual a la suma de sus valores absolutos con el signo de los sumandos. Si los números son de distinto signo, se restan los valores absolutos y se coloca el signo del sumando de mayor valor absoluto.

El opuesto de un número entero se obtiene cambiándolo de signo. La resta de dos números enteros es igual a la suma del primero más el opuesto del segundo.

El producto de dos números enteros es igual al producto de sus valores absolutos, con signo + si ambos tienen el mismo signo, y con signo -, si son de signo contrario.

Para dividir dos números enteros se dividen sus valores absolutos. El signo del resultado es positivo si ambos tienen igual signo, y negativo, si son de signo contrario.

Importante

Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando dicho número por los números naturales.

Los divisores de un número lo dividen de forma exacta y se obtienen dividiendo ese número por todos los números menores o iguales a él.

Un número es divisible por 2 si su última cifra es cero o cifra par, por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3, por 5 si su última cifra es 0 o 5 y por 10 si su última cifra es 0.

Un número es primo si sólo tiene como divisores a él mismo y a la unidad.

Un número es compuesto si tiene más de dos divisores.

El mínimo común múltiplo (MCM) de dos o más números es el menor de sus múltiplos comunes. Se obtiene descomponiéndolos en producto de factores primos, y multiplicando los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

El máximo común divisor (MCD) de dos o más números es el mayor de sus divisores comunes. Se obtiene descomponiendo cada número en producto de factores, y multiplicando los factores comunes elevados al menor exponente.

Importante

Una fracción es una expresión $\frac{a}{b}$ siendo a y b números enteros y $b \neq 0$. Al número de arriba se le llama numerador y al de abajo denominador.

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes , si se cumple que $a{\cdot}d = b{\cdot}c$.

Reducir fracciones a común denominador es buscar otras fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Para sumar o restar fracciones se transforman en fracciones equivalentes con el mismo denominador (que es el mcm de los denominadores). A continuación, el denominador común se divide entre cada denominador y se multiplica por el numerador correspondiente. Por último, se deja el denominador común y se suman o restan los numeradores.

producto de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

La división de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y como denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Importante

Para expresar en forma decimal una fracción , dividimos el numerador entre el denominador.

Todo número decimal tiene una parte entera y otra decimal , separadas por la coma decimal .

Un número decimal puede ser:

- Decimal exacto . Posee una cantidad limitada de decimales: 45,128
- Periódico puro . Un grupo de decimales se repite indefinidamente, el periodo: 4,8585...
- Periódico mixto . Tiene uno o más decimales seguidos de un periodo: 4,21777...

Para sumar o restar números decimales se colocan los números en columna y se opera como si fueran números naturales, manteniendo la coma en su lugar correspondiente.

Para multiplicar números decimales se opera como si fueran números naturales. A continuación, se sitúa la coma en el resultado contando tantas cifras de derecha a izquierda como decimales tengan entre los dos factores.

Para dividir números decimales , al bajar la primera cifra decimal se pone la coma en el cociente. En otros casos, cuando hay decimales en el divisor, se multiplican dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya en el divisor.

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible >> Documento de descarga de este tema.

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito NDVA.

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y