INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas
Expresiones numéricas: Logaritmos y exponenciales. Triángulo de Tartaglia

1. Logaritmos

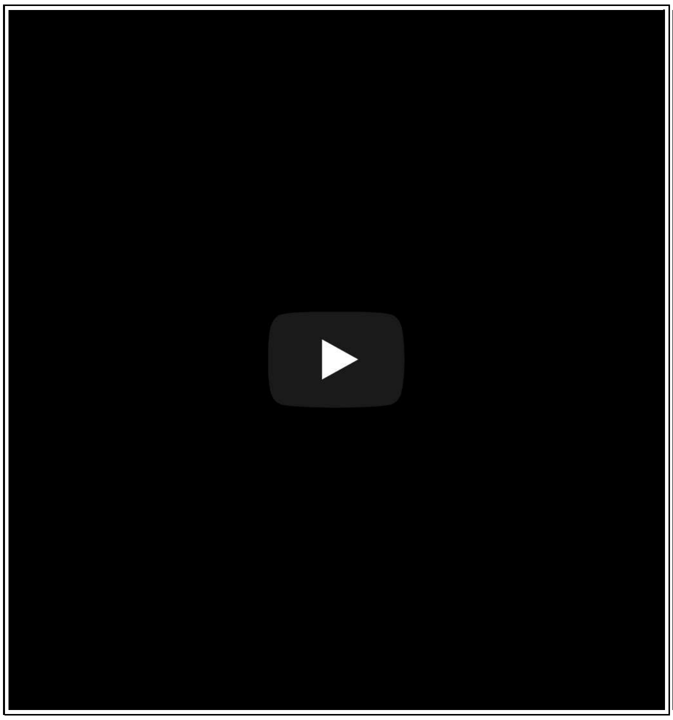
Si realizaramos una encuesta sobre los contenidos que mas terror provocaron en los alumnos de matemáticas en la ESO, tendriamos un campeón absoluto en el logaritmo. ¿Por qué esa animadversión hacia el logaritmo? ¿Quizás la palabra es complicada de pronunciar? ¿Cuál será el motivo de tan mala experiencia?

En este tema vamos a ver lo útil que son los logarítmos y la aplicabilidad que tienen en la vida diaria, así como la medición de los terremotos o la datación de fósiles.

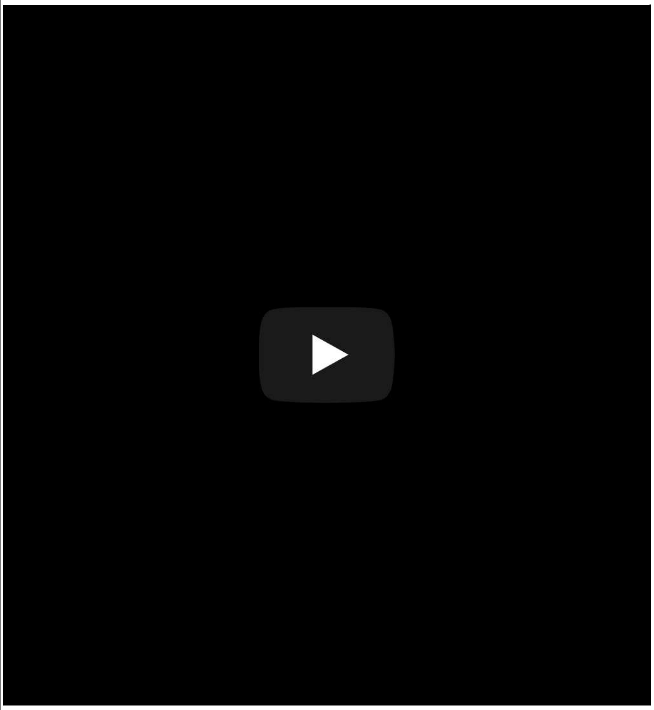
Vídeo de Victoria Alfosea alojado en Youtube

Ya hemos comentado que el término logaritmo provoca mucho miedo. Sin embargo, el logaritmos se utiliza para muchas cuestiones diarias, y entre ellas uno que si produce realmente miedo como son los terremotos y la famosa escala de Richter.

El 11 de mayo de 2011 en la localidad murciana de Lorca, ocurrió unos de los peores terremotos que han sucedido en nuestro pais. Previamente, el 11 de marzo del mismo año, en Japón la desgracía sacudía al pais con un terremoto de escala 9. Algún periódico dijo que el terremoto de Japón fue del doble de potencia del terremoto de Lorca. Observa los videos, ¿piensas que la potencia del terremoto de Japón fue el doble que el terremoto de Lorca?



Terremoto de Lorca



Terremoto de Japón

Ambos terremotos fueran experiencias terribles, pero como puedes apreciar, los desastres que causaron uno y otro no se pueden catalogar como "del doble". Eso es debido a que la escala de Richter es logarítmica. ¡Oh, no!, otra vez la dichosa palabreja.

Veamos que es el logaritmo en base 10.

Importante

Se llama logaritmo en base 10 del número x al exponente al que hay que elevar 10 para obtener dicho número.

¿A qué número tenemos que elevar 10 para obtener 100, o lo que es lo mismo $log_{10}100$? Basicamente eso es calcular el logaritmo en base 10 de un número, determinar el exponente al que debemos elevar 10 para obtener el número dado.

Ejemplos:

$log_{10}100 = 2$
$log_{10}10000 = 5$
$log_{10}10000000 = 8$

Importante

Se llama logaritmo en base a del número x al exponente b al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

con a>0 y a distinto de 1

Si no se indica ninguna base, hacemos referencia a logaritmos en base 10.

Comprueba lo aprendido

Calcula el $log_5 125$

- 1
- 3
- 4
- 25

Piensa en el exponente al que debes elevar 5 para obtener 125.

¡Correcto!

Piensa en el exponente al que debes elevar 5 para obtener 125.

Piensa en el exponente al que debes elevar 5 para obtener 125.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Determina $log_3 81$

- 27
- 81
- 4
- 3

¡Correcto!

Piensa en el exponente al que debes elevar 3 para obtener 81.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Ejercicio resuelto

El terremoto de Japón tuvo una potencia 9 en la escala de Richter, mientras que el teremoto de Lorca, en el epicentro, tuvo una potencia de 5 en la misma escala. ¿Cuántas veces fue un terremoto mayor que otro? Ten en cuenta que la escala de Richter es una escala logarítmica de base 10.

Imagen en INTEF de Rafael Bastante Casado bajo CC

Mostrar retroalimentación

Si el terremoto de Japón tuvo una potencia de 9, esto significa que $log_{10}a = 9$, por lo que la potencia del terremoto a = 1000000000.

Razonando de modo análogo, obtenemos que si

$log_{10}b = 5$, entonces la potencia del terremoto de Lorca b= 100000.

Si un terremoto tuvo potencia 100000000 y otro 10000, el primero fue 10000 veces más potente que el otro.

Importante

Se llama **logaritmo neperiano** o en base **e** al logaritmo cuya base es el número e = 2.718281. Lo representamos por **L** o **Ln**.

Ejercicio resuelto


Imagen en INTEF de Joaquín Reberté Ferrán bajo CC

¿Alguna vez te has planteado cómo los científicos determinan la antiguedad de un fósil? Piensa por un momento que descubres en una excavación unos huesos de una gallina ¿Tendrán 5000 años o los enterró hace 4 años el perro del vecino?

La expresión que determina el tiempo de un fósil es la siguiente

$$t = -8311.69 \cdot ln\left(\frac{x}{100}\right)$$

donde x representa el porcentaje de carbono 14 de los restos del fósil encontrado respecto de un especimen vivo.

Si en el fósil que hemos encontrado en nuestra excavación tan solo se detecta el 10 % de carbono 14 respecto de un especimen vivo, ¿qué estimación podemos hacer de los años que han transcurrido desde que murio el animal?

Mostrar retroalimentación

Para determinar la edad de nuestro fósil, tan solo debemos sustituir la variable x por el porcentaje de carbono 14 que se detecta en el animal.

$$t = -8311.69 \cdot ln\left(\frac{10}{100}\right) = 19138$$

Por lo tanto nuestro fósil tiene 19138 años.

Ejercicio resuelto

Halla el valor de x en las siguientes expresiones

b) log_x ...

Mostrar retroalimentación

Aplicaremos en ambos casos la definición de logaritmo.

a. Buscamos $log_x 32 = \frac{5}{2}$ el valor que al elevarlo a $\frac{5}{2}$, obtenemos 32, es decir $x^{\frac{5}{2}} = 32$. Si elevamos ambas expresiones a $\frac{2}{5}$, obtenemos $x = 32^{\frac{2}{5}} = 2^{5\left(\frac{2}{5}\right)} = 2^2 = 4$.

Ten en cuenta que hemos elevado a $\frac{2}{5}$ para eliminar la potencia de la incógnita x.

b. Analogamente calculamos $log_x 5 = \frac{1}{2}$. Buscamos la x de la siguiente expresión $x^{\frac{1}{2}} = 5$. Elevamos ambas expresiones a 2 para eliminar la potencia de la incógnita $x = 5^2$, por lo quex = 25.

Ejercicio resuelto

Calcula el valor de x para la expresión

$log_x 4 = -\frac{2}{3}$

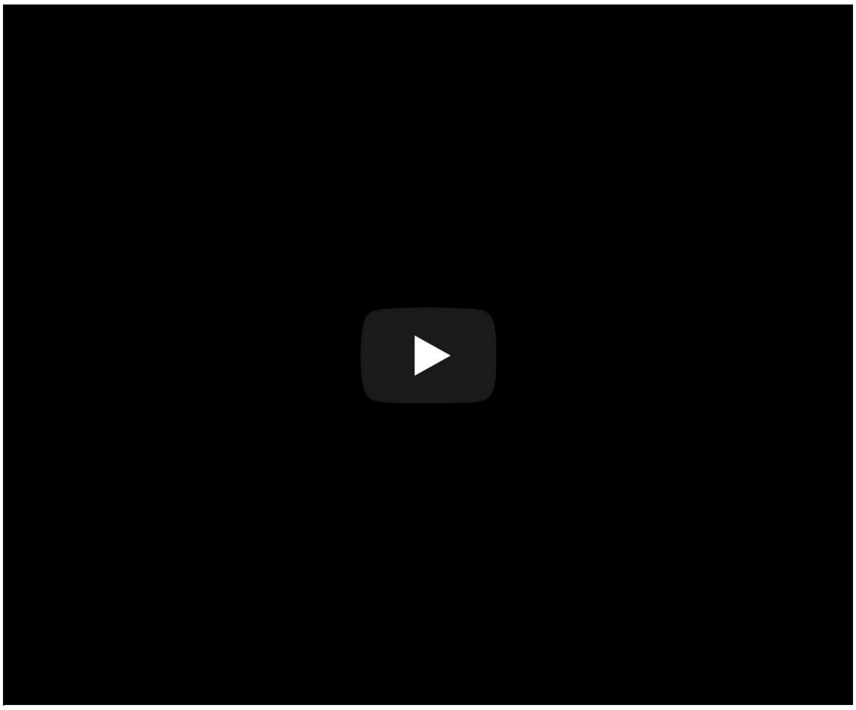
Mostrar retroalimentación

Buscamos el valor de x para la expresión $x^{\left(-\frac{2}{3}\right)} = 4$. Elevamos ambas expresiones a $-\frac{3}{2}$ para obtener $x = 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{2^6}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Así $x = \frac{1}{8}$

1.2. Aprendemos a multiplicar

Como todo en las matemáticas, los logartimos se descubren por necesidades de la humanidad. En este caso la necesidad de realizar grandes operaciones aritméticas, en concreto multiplicaciones y divisiones. Gracias a los logartimos, las enormes multiplicaciones relacionadas con distancias espaciales se podían convertir en sumas, utilizando una serie de propiedades. Las famosas tablan de logaritmos ayudanban a realizar estas transformaciones. En este video conoceras a Vicente Vázquez Queipo, matemático español que se hizo muy famoso debido a la elaboración de las tablas de logaritmos desde el 1 hasta el 2000.



Importante

Propiedades
$log_a 1 = 0$
$log_a a = 1$
$log_a a^n = n$

Estas propiedades son muy fáciles de recordar, tan solo debes pensar en la definición de los número exponenciales. Cualquier número elevado a 0 es 1, por lo que $log_a 1=0$. Puedes razonar igual con el resto de las propiedades.

Comprueba lo aprendido

Calcula $log_4 4$

- -1
- 0
- 1
- 2

Piensa en el exponente al que debemos elevar 4 para obtener 4

Piensa en el exponente al que debemos elevar 4 para obtener 4

Correcto!!!!

Piensa en el exponente al que debemos elevar 4 para obtener 4

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Determina $log_5 1$

- -5
- 0
- 1
- 5

Piensa en el exponente al que debemos elevar 5 para obtener 1

Correcto!!!!

Piensa en el exponente al que debemos elevar 5 para obtener 1

Piensa en el exponente al que debemos elevar 5 para obtener 1

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Importante

Operaciones
El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos $log_a(p \cdot q) = log_a p + log_a q$
El logaritmo de uncociente es la diferencia de los logaritmos $log_a(\frac{p}{q}) = log_a p - log_a q$
El logaritmo de una potencia es el exponente multiplicado por el logaritmo de la base $log_a p^n = n \cdot log_a p$
El logaritmo de una raíz es el logaritmo del radicando dividido por el índice $log_a \sqrt[n]{p} = (\frac{log_a p}{n})$

Comprueba lo aprendido

Antonio es un alumno de 4.º de ESO que en su examen de logaritmos ha obtenido 4.5. En una de las preguntas, Antonio ha indicado lo siguiente log (7+5) = log 7 + log 5 y su profesor lo ha tachado. Antonio está convencido que el ejercicios es correcto y que superará el examen. ¿Puedes indicar si el razonamiento de Antonio es correcto?

El razonamiento de Antonio es correcto.

Sugerencia

Verdadero Falso

Falso

Como puedes observar en las propiedades de los logaritmos log (a·b)= log a + log b, por lo que log 7 + log 5 = log (35), por lo que la afirmación es falsa.

Ejercicio resuelto

Si sabemos que log 2 ≈ 0.3 y log 3 ≈ 0.48, calcula los siguientes valores:

4. log 45


Imagen propia bajo CC

Utiliza las propiedades vistas en el anterior "Importante". Ten en cuenta siempre que conoces los valores de log 10 y de las potencias de 10, log 10 = 1, log 100 = 2

Mostrar retroalimentación

1. log 20 = log (2·10)= log 2 + log 10 $\approx$ 0.3 + 1 = 1.3
2. log 60 = log (2·3·10) = log 2 + log 3 + log 10 $\approx$ 0.3+ 0.48 + 1 = 1.78
3. log 0.3 = log $\frac{3}{10}$ = log 3 - log 10 $\approx$ 0.48 -1 = - 0.52
4. log 45 = log (9·5) = log 9 + log 5 = log 9 + log $\frac{10}{2}$ = log 3^2 + log 10 - log 2 = 2·log 3 + log 10 - log 2 = 0.96 + 1 - 0.3 = 1.66

Importante

No olvides que a la hora de calcular logaritmos siempre tienes que tener en cuenta la base aplicada.

Por ejemplo, si trabajas con logaritmos en base 3 ($\log_3$), sabes que $\log_3 3 = 1$, $\log_3 9 = 2$ o que $\log_3 27 = 3$.

Ejercicio resuelto

Si sabemos que log 2 ≈ 0.3 y log 3 ≈ 0.48, calcula el valor de log 2.88.

Mostrar retroalimentación

En primer lugar, siempre convertiremos el número decimal a fracción , por lo que

$$2.88 = \frac{288}{100}$$

$$log 2.88 = log\frac{288}{100} = log 288 - log 100$$

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Factorizamos 288 obtenemos que 288 = $2^5 3^2$

Así

¿Quién ha dicho que las matemáticas están reñidas con las letras?

Intenta averiguar el número de palabras distintintas que puedes formar con las siguientes letras

A E R T I Y F O V

Con una nueva operación que vas a descubrir en este tema, calcularás de una forma rápida, el número de palabras distintas a formar, eso sí, no tienen que tener sentido.

Imagen de Capri23auto en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

El factorial de un número entero positivo n, denotado por n!, es el resueltado de multiplicar el todos los números enteros positivos desde 1 hasta el propio número, es decir:

n! = n·(n-1)·(n-2)·...·3·2·1

Aquí puedes ver una tabla con los factoriales de los 13 primeros números naturales. Fíjate con la velocidad que crecen estos números.

Número	Factorial
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600

Aquí tienes un enlace a la caluladora CALCME donde puedes calcular el factorial de cualquier número. Tan solo tienes que escribir el número al que quieras calularle el factorial y el símbolo !. Tras esto, pulsa el botón = que aparece en la página. Ten cuidado con números muy grandes, ya que es bastante costoso de calcular para el ordenador.

Importante

Propiedades

1. $(n-1)! = \frac{n!}{n}$

Una propiedad muy importante a la hora de trabajar con números factoriales es la siguiente $(n-1)! = \frac{n!}{n}$. Como puedes comprobar, su deducción es inmediata a partir de la definición que hemos visto

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$
$$n! = n\cdot(n-1)!$$
$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$
$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

Te hacemos ahora una de esas preguntas que, a priori, no tienen respuestas ¿cual es el valor de 0!? ¿Como podemos utilizar la definición de número factorial para calular 0!?

Importante

El valor de 0! es 1

Si utilizamos la anterior propiedad para n = 1, obtenemos inmediatamente el valor de 0!

$$(n-1)! = \frac{n!}{n} \text{ Para n } = 1$$
$$(1-1)! = \frac{1!}{1}$$
$$0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Por lo tanto 0! = 1

Reflexiona

Analiza cuantas palabras diferentes puedes formar con las letras P A T O

Mostrar retroalimentación

Para hacerte una idea del número de palabras que puedes formar, piensa cuantas opciones tienes para elegir la primera letra. Obviamente son 4. ¿Y para elegir la segunda?, tienes 3.

Si amplias este razonamiento, llegarás a la conclusión de que el número de palabras distintas a formar serán 4·3·2·1, es decir, 4!. Por tanto, se trata de 24 palabras.

Ten en cuenta que este razonamiento es válido solo si todas las letras son

Comprueba lo aprendido

Indica el número de palabras distintas que puedes formar con las letras M A T E S

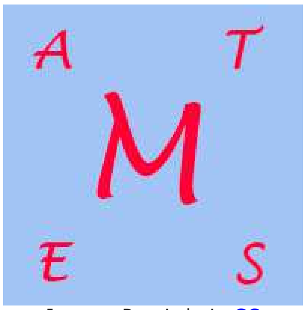


Imagen Propia bajo CC

- 1
- 24
- 120
- 5

Intenta cambiar alguna letra.

Creo que son pocas.

¡Perfecto! El resultado es 5!.

Creo que son muy pocas...

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Comprueba lo aprendido

Indica si es verdadero o falso que con las cifras 1 2 3 4 5 y 6 podemos formar más de mil números distintos.

Sugerencia

Verdadero Falso

Por la tanto la afirmación es falsa.

Las matemáticas, en ocasiones, no han avanzado porque dos matemáticos tengan una maravillosa idea feliz y gracias a esa idea, esta ciencia avance. Los motivos bélicos y monetarios han movido al ser humano un muchas épocas históricas y las matemáticas han sido un instrumento. El comienzo de la teoría de la probabilidad está relacionado con los juegos de azar en el siglo XVII.

Si conoces algo los juegos de azar, es probable que en alguna ocasión hayas jugado a la lotería primitiva. ¿Te has planteado cuantas apuestas diferentes hay en la lotería primitiva? Si las jugaras todas, seguro que acertarías ¿Sería esto rentable?

El juego de la lotería primitiva es bastante conocido en nuestro pais, tan solo tienes que acertar 6 números desde el 1 hasta el 49.

¿Es fácil de acertar?, ¿cuántas apuestas distintas hay?...

El problema es totalmente diferente al planteado en el punto anterior, ya que estuvimos tratando la reordenación de números distintas. En el problema actual, debemos seleccionar 6 número de 49, teniendo en cuenta que la combinación 3,4,7,10,11,12 es la misma que la 10,12,4,3,11,7.

Para resolver este problema nos vamos a ayudar de los números combinatorios.

Imagen propia bajo CC

Importante

El número combinatorio $\binom{a}{b}$ con $a \geq b$ representa el número de subconjutos de b elementos diferentes seleccionados de un total de a elementos.

El número combinatorio $\binom{a}{b}$ viene dado por $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b! \cdot (a-b)!}$

Para calular números combinatorios te puedes ayudar de una calculadora física o de la calculadora Wiris. Si utilizas la calculadora Wiris, tan solo tienes que pulsar sobre la pestaña Combinatoria y el botón combinaciones.

Imagen propia bajo CC

Si utilizas una calculadora física, aquí dispones de un video explicativo.

Reflexiona

Determina el número de apuestas distintas que puedes realizar en el juego de la lotería primitiva.

Mostrar retroalimentación

diferentes es ...

Es decir, si cada apuesta cuesta 1 € y nos gastamos más de 13 millones de euros nos aseguramos el acierto de la lotería primitiva.

Ten en cuenta que en la lotería primitiva pueden existir más de un acertante, por lo que este método, aunque te asegure acertar el premio máximo, es muy improbable que sea rentable.

Comprueba lo aprendido

La empresa donde Ismael trabaja se ha visto afectada seriamente por lo crisis económica. EL gerente de la empresa tan solo cuenta con 3 cestas de navidad para repartir entre sus 7 empleados. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir el gerente las cestas si a cada empleado solo le puede tocar una?

- 3
- 7
- 21
- 35

Piensa en todas las combinaciones diferentes. Busca analogías con el problema anterior relacionado con la lotería primitiva.

Piensa en todas las combinaciones diferentes. Busca analogías con el problema anterior relacionado con la lotería primitiva.

Piensa en todas las combinaciones diferentes. Busca analogías con el problema anterior relacionado con la lotería primitiva.

¡Correcto! Es el resultado de calcular $\binom{7}{3}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}=35$

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

Ejercicio resuelto

Calcula el valor de los siguientes números combinatorios

2. $\binom{8}{4}$

3. $\binom{10}{3}$

Mostrar retroalimentación

1. $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 4$
2. $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70$
3. $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 120$

Como puedes ver, es muy fácil simplificar términos del numerador y del denominador para que la operación sea mucho mas sencilla.

Importante

Propiedades de los números combinatorios

1. $\binom{m}{0} = 1$
2. $\binom{m}{m} = 1$
3. $\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$

Veamos la demostración de estas propiedades

1. $\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!\cdot m!} = \frac{m!}{1!\cdot m!} = 1$
2. $\binom{m}{m} = \frac{m!}{m!\cdot 0!} = \frac{m!}{1!\cdot m!} = 1$
3. $\binom{m}{m-1} = \frac{m!}{(m-1)!1!} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = m$

3.1. Triángulo de Tartaglia

El triángulo de Tartaglia, auque también llamado triángulo de Pascal, es un triángulo formado por números combinatorios. El procedimiento para construir dicho triángulo es sumamente sencillo, comenzamos fabricando el vértice con el número $\binom{0}{0}$. La segunda fila, la construimos añadiendo en una fila inferior los números $\binom{1}{0}$ y $\binom{1}{1}$ obteniendo la siguiente triángulo.

$$\begin{array}{ccc} & \binom{0}{0} & \\ \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \end{array}$$

Añadimos ahora nueva nueva fila, con los valores $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ y $\binom{2}{2}$, obteniendo un paso mas del triángulo de Tartaglia. Si realizamos varios pasos mas llegamos al siguiente

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Si calculamos el valor de los números combinatorios, llegamos al siguiente triángulo.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1}
\end{array}$$

Comprueba lo aprendido

Calcula la sexta fila del triángulo de Tartaglia.

- 1 2 3 3 2 1
- 1 5 5 5 5 1
- 1 6 10 10 6 1
- 1 5 10 10 5 1

Fíjate cómo se ha construido la quinta fila y vuelve a intentarlo.

Fíjate cómo se ha construido la quinta fila y vuelve a intentarlo.

¡Correcto! Sería \(0/ \(1/ \(2/ \(3/ \(4/ \(5/

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

Importante

El triángulo de Tartaglia cumple una serie de propiedades:

1. Si observamos cada fila, los valores en posiciones equidistantes de los extremos son iguales.
2. La primera y última posición de cada fila, toma el valor 1.
3. Para obtener un valor de cada fila, salvo el primero y el último, tan solo tenemos que sumar los dos términos que tiene sobre él en el triángulo.
4. Si sumamos los terminos de la fila n, obtenemos 2^n, tomando la primera fila, como la fila 0.

En esta animación se puede observar cómo se aplica la propiedad tres para generar nuevas filas del triángulo de Tartaglia de un modo fácil y cómodo.

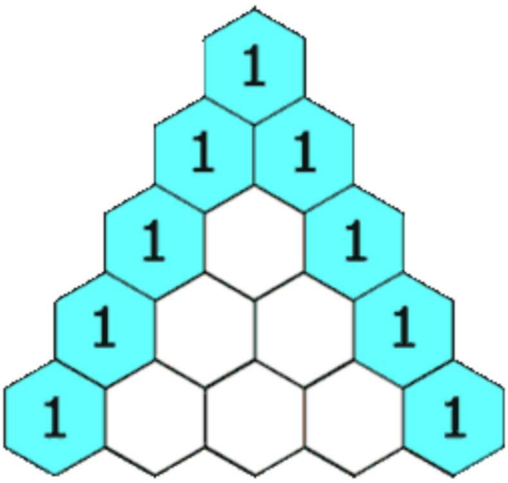


Imagen en Wikimedia Commons
de Hersfold bajo Dominio Público

Ejercicio resuelto

Determina la séptima fila utilizando la tercera propiedad.

Mostrar retroalimentación

Si sabemos que la sexta fila es **1 5 10 10 5 1**, tan solo tenemos que comenzar por 1 e ir sumando dos a dos los términos de la fila

Primera posición: 1

Segunda posición: 1+5 = 6

Tercera posición: 5+10 =15

Cuarta posición: 10+10 =20

Quinta posición: 10+5 =15

Sexta posición 5+1 = 6

Septima posción = 1

Así la séptima fila es:

1 6 15 20 15 6 1

Te planteamos el siguiente problema, desarrollar la expresión algebraica $(x+1)^5$. Obviamente, sabes resolver el problema, ya que simplemente es multiplicar (x+1) cinco veces por si mismo (¡que no es lo mismo que multiplicarlo por 5!). Deberiamos actuar del siguiente modo:

$$(x+1)^2=(x+1)\cdot(x+1)=x^2+2x+1$$
$$(x+1)^3=(x+1)^2\cdot(x+1)=x^3+3x^2+3x+1$$
$$(x+1)^4=(x+1)^3\cdot(x+1)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$
$$(x+1)^5=(x+1)^4\cdot(x+1)=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$$

Como puedes observar la tarea es ardua y pesada y esta labor te puede llevar bastantes minutos. Sin embargo, los números combinatorios te puede ayudar a realizar esta labor ya que los coeficientes de la exprecsión $(a+b)^n$ coinciden con los números de la fila n del triángulo de Tartaglia.

Veamos un ejemplo:

$$(a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Como puedes ver los coeficientes (1, 3, 3, 1) coinciden con los términos de la tercera fila del triángulo de Tartaglia.

Importante

BINOMIO DE NEWTON

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{(n-1)}b^1+\binom{n}{2}a^{(n-2)}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1b^{(n-1)}+\binom{n}{n}b^n$$

Veamos un ejemplo.

Para calcular $(a+b)^4$ tan solo tenemos que determinar los coeficientes de la fila asociada al polinomio de grado 4, es decir: **1, 4, 6, 4, 1** Por tanto, obtendriamos:

$$(a+b)^4=1\cdot a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4$$

Ejercicio resuelto

Desarrolla la expresión $(x+4)^3$

Los coeficientes del binomio de orden 3 son 1 3 3 1, por lo que la expresión será

$$(x+4)^3=1\cdot x^3+3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2+1\cdot 4^3=x^3+12x^2+48x+64$$

Importante

Para obtener la expresión de $(a-b)^n$, simplemente desarrollamos $(a+(-b))^n$

$$(a-b)^n=(a+(-b))^n=\binom{n}{0}a^n\cdot(-b)^0+\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot(-b)^1+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot(-b)^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1\cdot(-b)^{n-1}+\binom{n}{n}a^0\cdot(-b)^n$$

Ejercicio resuelto

Calcula el desarrollo de $(2x-1)^3$

Mostrar retroalimentación

Calculamos el desarrollo

$$(2x-1)^3=1\cdot(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot(-1)^1+3\cdot(2x)^1\cdot(-1)^2+1\cdot(-1)^3=8x^3-12x^2+6x-1$$

Ejercicio resuelto

Determina el desarrollo de $(2x-3y)^4$

Ten cuidado al elevar los términos del tipo $(2x)^4$, ya que el resultado no se $2x^4$, es $(2x)^4=2^4\cdot x^4=16x^4$

$$(2x-3y)^4=1\cdot(2x)^4+4\cdot(2x)^3\cdot(-3y)+6\cdot(2x)^2\cdot(-3y)^2+4\cdot(2x)^1\cdot(-3y)^3+1\cdot(-3y)^4=16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3-81y^4$$

Comprueba lo aprendido

Desarrolla $(4x-2y)^3$

- $64x^3-96x^2y+48xy^2-8y^3$
- $64x^3+96x^2y+48xy^2+8y^3$
- $32x^3-32x^2y+48xy^2-8y^3$
- $64x^4+96x^3y^4+48x^2y^2-8y^3$

¡Correcto!

Ten cuidado con los signos.

Inténtalo de nuevo.

Inténtalo de nuevo.

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Ejercicio resuelto

Calcula $(x^2+2y)^3$

Ten cuidado al calcular $(2y)^3$

Mostrar retroalimentación

$$(x^2+2y)^3=1\cdot(x^2)^3+3(x^2)^2\cdot(2y)+3\cdot x^2\cdot(2y)^2+(2y)^3=x^6+6x^4y+12x^2y^2+8y^3$$

4. Ejercicios resueltos de pruebas de acceso anteriores

Para finalizar este tercer tema, vamos a resolver los ejercicios que se han preguntado sobre el mismo en exámenes de la PAU en cursos anteriores.

Es recomendable que antes de mirar la solución, los intentes previamente, por si no hubieran salido del todo correctos, aprender del error y coger práctica.

Ejercicio resuelto

Prueba de Acceso a Grados para Mayores de 25 años

Sabiendo que el $log2 = 0{,}3010300$ y el $log3 = 0{,}4771213$, calcule:

$$log4 \quad log6 \quad log15 \quad log\tfrac{1}{8} \quad log\sqrt{6} \quad log6{,}75$$

Nota: En este ejercicio se utilizarán las propiedades de las operaciones con logaritmos.

Mostrar retroalimentación

$$\log_{10}4 = \log_{10}2^2 = 2\log_{10}2 = 0.60205999$$

$$\log_{10}6 = \log_{10}2 \cdot 3 = \log_{10}2 + \log_{10}3 = 0.77815125$$

$$\log_{10}15 = \log_{10}\tfrac{30}{2} = \log_{10}30 - \log_{10}2 = \log_{10}3 \cdot 10 - \log_{10}2 =$$
$$= \log_{10}3 + \log_{10}10 - \log_{10}2 == \log_{10}3 + 1 - \log_{10}2 = 1.1760913$$

$$\log_{10}\left(\tfrac{1}{8}\right) = \log_{10}\left(\tfrac{1}{2^3}\right) = \log_{10}(2^{-3}) = -3\log_{10}2 = -0.90308999$$

$$\log_{10}\sqrt[2]{6} = \log_{10}\left(6^{\frac{1}{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\log_{10}(2 \cdot 3) = \tfrac{1}{2}[\log_{10}2 + \log_{10}3] = 0.38907563$$

$$\log_{10}6.75 = \log_{10}\tfrac{675}{100} = \log_{10}\tfrac{27}{4} = \log_{10}27 - \log_{10}4 =$$
$$\log_{10}3^3 - \log_{10}2^2 = 3\log_{10}3 - 2\log_{10}2 = 0.82930377$$