



Análisis II: Función derivada. Reglas de derivación

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I	
1.º Bachillerato	Contenidos
Análisis II: Función derivada. Reglas de derivación	

1. Introducción

Antes de seguir profundizando en el mundo de las derivadas vamos a recordar qué son las derivadas.

Enlace a recurso reproducible >> <https://www.youtube.com/embed/AzTGmJGIpI8>

Video de Derivando alojado en [Youtube](#)

2. Función derivada. Derivadas de funciones simples

Dado que la derivada es un concepto local, podría definirse la función derivada en aquellos puntos en que la función primera o primitiva es derivable.

La función derivada te dará el valor de la derivada en cada punto de la función.



Importante

Si tenemos una función $f(x)$ denominamos **función derivada de f** respecto a la **variable x** a una nueva función que para cada valor x nos proporciona la derivada de la función en el punto x . A la función derivada de $f(x)$ la denotaremos $f'(x)$, aunque también la puedes ver representada como $\frac{df(x)}{dx}$. De esta forma tenemos que:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Recuerda que con esta definición, la función derivada nos proporciona, para cada punto x , la pendiente de la recta tangente a la función en el punto x .

Ejemplo:

Vamos a obtener la derivada de $f(x)=x^2-2x$ en un punto cualquiera, x .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 2 \cdot (x+h) - x^2 + 2x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh - 2h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h + 2x - 2 = 2x - 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f'(x) = 2x - 2$

Si quiero calcular la derivada en $x=1$, sustituyo $f'(1) = 2(1) - 2 = 0$

Si quiero calcular la derivada en $x=2$, sustituyo $f'(2) = 2(2) - 2 = 2$

...

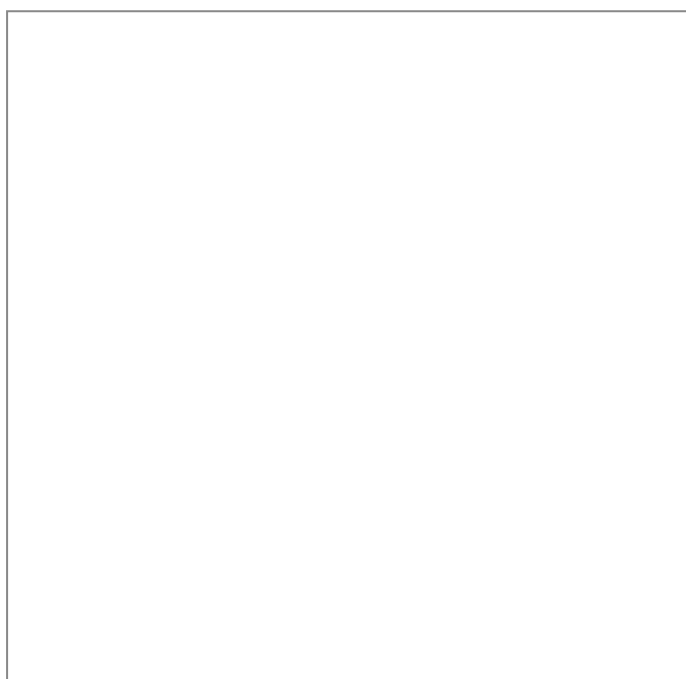
Así para cualquier valor de x .

Ejemplo gráfico:

En la siguiente escena de Geogebra, distinguimos cómo va surgiendo la derivada de la función $f(x)=x^3$ de la manipulación de su pendiente. Cuando movemos el punto de tangencia (1,1) con pendiente $m=3$, también varía la recta tangente, la pendiente y por tanto su derivada.

La función derivada aparece en color verde.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/rbdTFXhN/width/344/height/338/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/false/smb/false/stb/false/stbh/true/ld/false/sri/true/at/auto>





Comprueba lo aprendido

Utilizando la escena anterior, rellena los siguientes espacios en blanco:

1. $f'(x)$ le asociada a cada valor x la en el punto x , que es la de la recta tangente en x .
2. Completa la siguiente tabla de valores de la función derivada

x	-1	0	1	2
$f'(x)$	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

3. La derivada de $f(x)=x^3$ es $f'(x)=$ (las potencias las insertaremos utilizando ^, por ejemplo x^5 lo expresamos x^5)

No nos preocupemos, no va a ser necesario recurrir a la definición para calcular la derivada, ni tampoco representarla gráficamente, serían procesos muy largos y tediosos. Existen unas sencillas reglas prácticas con las que la función derivada de cualquier función elemental se puede hallar muy fácilmente. A continuación te ofrecemos un listado en el que aparece una función y al lado aparece su función derivada. Todos los resultados que aparecen en esta tabla son fruto de aplicar la definición de derivada de una función.



Importante

Es conveniente aprenderse esta tabla para no tener que recurrir una y otra vez a la definición cada vez que necesitemos derivar una función.

Nombre	Expresión analítica	Derivada
Constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Identidad	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Potencial	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Raíz cuadrada	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Raíz	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Exponencial	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Exponencial de base a	$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) a^x$
Logarítmica	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Logarítmica de base a	$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(a) x}$



Ejercicio Resuelto

Veamos un ejemplo de cada una de las derivadas de la tabla:

$f(x)$:	$f(x)=3$	$f(x)=x$	$f(x)=x^7$	$f(x)=\sqrt{x}$	$f(x) = \sqrt[5]{x}$	$f(x)=e^x$	$f(x)=2^x$	$f(x)=\ln(x)$	$f(x)=\log(x)$
$f'(x)$:	$f'(x)=0$	$f'(x)=1$	$f'(x)=7x^6$	$f'(x)=1/(2\sqrt{x})$	$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$	$f'(x)=e^x$	$f'(x)=2^x \cdot \ln 2$	$f'(x)=1/x$	$f'(x)=1/(x \cdot \log(x))$

3. Reglas de derivación

Si seguimos con nuestro ejemplo de la función $f(x)=x^2-2x$, y recurrimos a nuestra tabla de funciones elementales, podremos derivar sin problema x^2 , ¿pero qué ocurre con $2x$? ¿y con la resta de ambas? Necesitamos nuevas reglas, para derivar las operaciones con funciones: suma, resta, multiplicación...



Importante

Suma	$(f+g)'=f'+g'$	La derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas de estas funciones
Resta	$(f-g)'=f'-g'$	La derivada de la diferencia de funciones es la diferencia de las derivadas de estas funciones
Producto	$(f\cdot g)'=f'\cdot g+g'\cdot f$	La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la segunda derivada por la primera sin derivar.
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}$	La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar, y todo ello dividido por el denominador al cuadrado
Producto por un número	$(a\cdot f)'=a\cdot f'$	La derivada del producto de un número real por la función es igual al número real por la derivada de la función
Composición	$(g\circ f)'=[g(f(x))]'=g'(f(x))\cdot f'(x)$	Regla de la cadena
RESUMEN	Vídeo 1	Vídeo 2
EJERCICIOS	Vídeo 1	Vídeo 2

Veamos unos ejemplos mas en la siguiente presentación

Reglas de derivación

http://www.slideshare.net/slideshow/embed_code/7628887

View more [presentations](#) from [Patricia Perez](#)

La mejor forma de aprender a derivar es derivando, así que aquí tienes unos videos del Profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena Juan Medina Molina (lasmatematicas.es). Quizás sea una buena idea que pinches para verlos en pantalla completa, o pinchando sobre ellos para verlos en la página de youtube:

Derivada de un monomio	Derivada de una exponencial	Derivada de un polinomio	
------------------------	-----------------------------	--------------------------	--

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/yzVNLvk1nZY	Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/xFb9ggX7F04	Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/7XQMghs_6vg	
Derivada de un cociente	Derivada de una composición		
Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/vLv6ywNj5VI	Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/IxvOb-7Y-kI	Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/xUuX5rWtz_8	



Para saber más

Aunque te hemos proporcionado reglas de derivación para funciones elementales sencillas existen reglas para muchas otras funciones. En este documento puedes encontrar una completa tabla de derivadas que nos proporciona la web [3con14](#). Pulsa sobre la imagen para verla ampliada.

TABLA DE DERIVADAS			
FUNCIONES ALGEBRAICAS		FUNCIONES CIRCULARES INVERsas	
Función	Derivada	Función	Derivada
$y = x^a$	$y' = a \cdot x^{a-1}$	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = u^a$	$y' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{1}{n} \cdot u^{\frac{1}{n}-1} \cdot u'$	$y = \arctan u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$	$y = \operatorname{arccot} u$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$	$y = \operatorname{arcsch} u$	$y' = \frac{u'}{u \sqrt{1+u^2}}$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$	$y = \operatorname{arccsch} u$	$y' = \frac{u'}{u \sqrt{1-u^2}}$
FUNCIONES POTENCIALES, EXPONENCIALES Y LOG.		Funciones Simples	
Función	Derivada	Función	Derivada
$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$	$y = k$	$y' = 0$
$y = a^u$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$y = u$	$y' = 1$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{1}{n} \cdot u^{\frac{1}{n}-1} \cdot u'$	$y = ku$	$y' = k$
$y = u^a$	$y' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{1}{u^2}$
$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{1}{u^2}$
$y = a^u$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{1}{u^2}$
$y = u $	$y' = \frac{u}{ u } \cdot u'$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{1}{u^2}$
FUNCIONES LOGARÍTMICAS		$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{1}{n} \cdot u^{\frac{1}{n}-1} \cdot u'$
Función	Derivada	$y = u^a$	$y' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
$y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$y = a^u$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
FUNCIONES CIRCULARES		$y = u^a$	$y' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$
Función	Derivada	$y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$	$y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$y = \tan u$	$y' = \sec^2 u \cdot u'$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$y = \cot u$	$y' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$	$y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$y = \sec u$	$y' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
$y = \operatorname{cosec} u$	$y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \cot u \cdot u'$	$y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$

[>> Documento de descarga](#)

Recurso de Jesús Plaza M. en [3con14](#). Licencia [CC](#)



Ejercicio Resuelto

Para practicar

Para practicar el cálculo de derivadas te proporcionamos una relación de ejercicios resueltos de la web [3con14](#). Coge lápiz y papel e intenta obtener la derivada sin mirar las soluciones. Comprobarás que con la práctica irás cogiendo más soltura en el cálculo de derivadas. Pulsa sobre la imagen para ver el documento.



[>> Documento de descarga](#)





Caso práctico

Dada la función

$$f(x) = e^{3x}$$

- Calcula la ecuación de la recta tangente en $x=0$.

Nos están pidiendo que calculemos la recta tangente en $x=0$. Sabemos que la ecuación de la recta tangente viene dada por la expresión:

$$y-f(0) = m (x-0)$$

Como la pendiente "m" viene dada por la derivada $f'(0)$:

$$y-f(0) = f'(0) (x-0)$$

Si lo hacemos paso a paso, obtenemos:

$$f(0) = e^{3 \cdot 0} = e^0 = 1; \quad f'(x) = 3e^{3x}; \quad f'(0) = 3e^{3 \cdot 0} = 3e^0 = 3 \cdot 1 = 3$$

Luego si sustituimos en la primera fórmula, se nos queda de la siguiente manera:

$$y-1=3x$$

Ordenamos los términos y escribimos la ecuación de la recta tangente en $x=0$:

$$y=3x+1$$



Caso práctico

Calcula el valor de t para que la recta $y = 6x + t$ sea tangente a la función $f(x) = 3x^2 + 5$.

Sabemos que la pendiente de la tangente, en nuestro caso $m=6$, es igual que la derivada de la función en ese punto.

Hallamos la derivada de la función y la igualamos a la pendiente, de aquí obtenemos el valor de la abscisa para la cual la función derivada vale 6.

$$f'(x) = 6x \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{6} = 1$$

Por tanto, el punto de tangencia tiene de ordenada

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 + 5 = 8$$

Como la tangente también debe pasar por el punto (1,8), se tiene que verificar que

$$8 = 6 \cdot 1 + t \Rightarrow t = 2$$



Conocimiento previo

Si este tema ha despertado tu curiosidad y quieres seguir indagando, te recomendamos la serie documental "Universo matemático" de *rtve* que recorre la historia de las matemáticas, desde los pitagóricos hasta los investigadores del presente. Su objetivo es enseñar como la aparición de nuevas ideas matemáticas responde a los problemas concretos de cada época y contexto.

En concreto el programa "[Sobre hombros de gigantes; Newton y Leibnitz](#)", no habla sobre los dos científicos que a mediados del

siglo XVII revolucionan la historia de la ciencia, Newton y Leibnitz. Ambos en el campo del cálculo diferencial.



Para saber más

Si este tema ha despertado tu curiosidad y quieres seguir indagando, te recomendamos la serie documental "Universo matemático" de *rtve* que recorre la historia de las matemáticas, desde los pitagóricos hasta los investigadores del presente. Su objetivo es enseñar como la aparición de nuevas ideas matemáticas responde a los problemas concretos de cada época y contexto.

En concreto el programa "[Sobre hombros de gigantes; Newton y Leibnitz](#)", no habla sobre los dos científicos que a mediados del siglo XVII revolucionan la historia de la ciencia, Newton y Leibnitz. Ambos en el campo del cálculo diferencial.

Resumen



Importante

Si tenemos una función $f(x)$ denominamos **función derivada de f** respecto a la **variable x** a una nueva función que para cada valor x nos proporciona la derivada de la función en el punto x . A la función derivada de $f(x)$ la denotaremos $f'(x)$, aunque también la puedes ver representada como $\frac{df(x)}{dx}$. De esta forma tenemos que:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Recuerda que con esta definición, la función derivada nos proporciona, para cada punto x , la pendiente de la recta tangente a la función en el punto x .



Importante

Es conveniente aprenderse esta tabla para no tener que recurrir una y otra vez a la definición cada vez que necesitemos derivar una función.

Nombre	Expresión analítica	Derivada
Constante	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Identidad	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Potencial	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Raíz cuadrada	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Raíz	$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Exponencial	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Exponencial de base a	$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) a^x$
Logarítmica	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Logarítmica de base a	$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(a) x}$



Importante

Suma	$(f+g)'=f'+g'$	La derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas de estas funciones
Resta	$(f-g)'=f'-g'$	La derivada de la diferencia de funciones es la diferencia de las derivadas de estas funciones
Producto	$(f \cdot g)'=f' \cdot g + g' \cdot f$	La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la segunda derivada por la primera sin derivar.
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$	La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar

		menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar, y todo ello dividido por el denominador al cuadrado
Producto por un número	$(a \cdot f)' = a \cdot f'$	La derivada del producto de un número real por la función es igual al número real por la derivada de la función
Composición	$(g \circ f)' = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	Regla de la cadena
RESUMEN	<i>Vídeo 1</i>	<i>Vídeo 2</i>
EJERCICIOS	<i>Vídeo 1</i>	<i>Vídeo 2</i>