INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

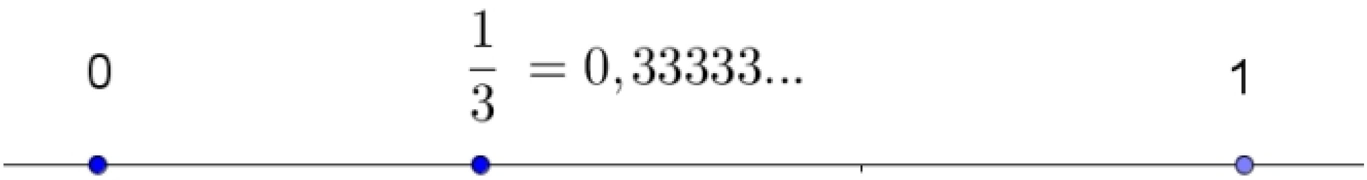
Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas
Expresiones Numéricas: Potenciación y radicación. Números reales

Imagen en Flickr de Cea bajo CC

La división de la unidad en $10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n$ partes iguales es físicamente imposible, incluso cuando n es pequeño. Así, para poder señalar en una recta graduada el número 0,33333... habría que hacer infinitas subdivisiones decimales. Se admite, no obstante, que después de "todas" las subdivisiones podríamos poner una marca en el punto correspondiente a 0,33333... que, en este caso, no es otro que el correspondiente a $\frac{1}{3}$ como se puede apreciar en la siguiente figura.



Fuente propia realizada con geogebra bajo Dominio público

Una vez admitido que podemos marcar en una recta graduada el punto correspondiente a un número decimal infinito (con un número infinito de cifras decimales), cabría pensar ya en decimales infinitos que no sean periódicos. Por ejemplo: 3,010010001... En este número, en el que cada vez hay un "0" más entre los "1", no se repite ningún grupo de cifras y por lo tanto el decimal no es periódico.

Cualquiera puede construir números de este tipo. Así:

4,91992999399949996...

5,1231123111231111231111123...

Pero estos números son fruto del capricho de quien escribe. ¿Habrá números decimales infinitos y no periódicos que respondan a auténticas necesidades matemáticas?

1.1. Los números irracionales

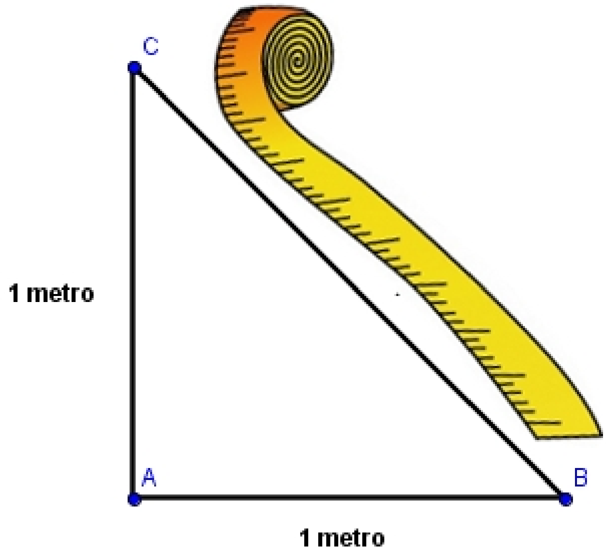
Como has visto ya en el tema 1, el hombre inventó en primer lugar los números naturales para contar. Más tarde tuvo necesidad de medir e inventó los números decimales y las fracciones. Se sabe que los babilonios conocían ya estos tipos de números. Y la verdad es que en la práctica diaria, estos números resuelven todos los problemas de medidas.

Construyamos, por ejemplo, un triángulo rectángulo como el de la figura y supongamos que los catetos miden 1 metro cada uno. Si nos disponemos a medir con una cinta métrica la hipotenusa, llegaremos al resultado:

$$x = 1.414 \text{ m}$$

Como las cintas métricas están graduadas hasta los milímetros, hemos conseguido una aproximación de la medida hasta esta unidad. Con otro aparato de medida más exacto hubiéramos podido aproximarnos más a la medida exacta.

Ahora bien, podemos plantearnos la siguiente pregunta, ¿es la medida exacta de la hipotenusa un decimal finito? Podría parecer en principio que, efectivamente, esto es así. Pero veámoslo ahora desde un punto de vista más fino, haciendo uso de las propiedades geométricas del triángulo de la figura:



Fuente propia realizada con geogebra bajo Dominio público

Utilizando el Teorema de Pitágoras, llegamos a la conclusión de que:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \text{ es decir, } x^2 = 2$$

Hemos conseguido, de esta forma, saber que la hipotenusa mide una longitud x que elevada al cuadrado da 2. A ese número x solemos llamarlo "raíz cuadrada de 2" y lo designamos con el símbolo $\sqrt{2}$.

Pero $\sqrt{2}$ no es más que un símbolo para denotar un número decimal. Hay varios procedimientos para hallar los decimales de este número. Todos ellos nos proporcionan un número decimal infinito. Con una calculadora de bolsillo obtenemos:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$$

Ponemos puntos suspensivos para indicar que hay más cifras decimales que no escribimos. De hecho si queremos construir algo de medida $\sqrt{2}$ nos sobra con las cifras decimales que hemos escrito. Así pues, como primera conclusión:

$\sqrt{2}$ es un decimal infinito.

Podemos avanzar un poco más en nuestro estudio. Hasta ahora los decimales infinitos que conocemos son los decimales infinitos periódicos que, como ya sabemos, son en realidad números racionales o fracciones. Así surge de manera natural la pregunta:

¿Es $\sqrt{2}$ un decimal infinito periódico?

Si así fuera, el número raíz de 2, a pesar de su extraña apariencia, no sería más que un número racional; algo ya conocido. Precisamente eso creyeron los griegos durante algún tiempo. Pero no es así; probaron que $\sqrt{2}$ no es una fracción ni, naturalmente, un decimal infinito periódico. Así pues:

$\sqrt{2}$ es un decimal infinito no periódico: no es un número racional.

Pero, desde el punto de vista de la teoría, $\sqrt{2}$ nos hace falta y, como no es un número racional, hay que bautizarlo. Lo llamaremos **número irracional**.

Importante

Llamamos **números irracionales** a los números decimales infinitos no periódicos que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros.

La cantidad de números irracionales es infinitamente mayor que la de los racionales. Entre ellos están las raíces cuadradas de los números que no son cuadrados perfectos, como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$. Y otros tan famosos como el número π .

Importante

Los números irracionales se clasifican en dos tipos:

- **Números algebraicos**: Resultan de la solución de alguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. Todas las raíces no exactas de cualquier orden son irracionales algebraicos. Por ejemplo, el número áureo es una de las raíces de la ecuación algebraica $x^2 - x - 1 = 0$, por lo que es un número irracional algebraico.
- **Números trascendentes**: No son solución de alguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. Provienen de las llamadas funciones trascendentes (trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, etc.). También surgen al escribir números decimales no periódicos al azar o con un patrón que no lleva periodo definido, respectivamente, como los dos siguientes: 0,193650278443 75... o 0,10100100010000...

Los llamados números trascendentes tienen especial relevancia ya que no pueden ser solución de ninguna ecuación algebraica. Los números pi (π) y e son irracionales trascendentes, puesto que no pueden expresarse mediante radicales.

Fuente: Wikipedia

Importante

Repasando lo estudiado en el tema 1, los conjuntos numéricos que conocemos hasta ahora son los siguientes:

- El conjunto de los números naturales, que se designa por la letra N .
- El conjunto de los números enteros, formado por el conjunto de los números naturales o enteros positivos y los enteros negativos, que se designa por la letra Z .
- El conjunto de los números racionales, formado por el conjunto de los números enteros y las fracciones cuyo cociente no es un entero, que se designa con la letra Q .
- El conjunto de los números irracionales que hemos empezado a ver al principio de este tema, que se designa por la letra I .
- La unión del conjunto de los números racionales y el de los irracionales forma **el conjunto de los números reales** y se designa por la letra R .

En el siguiente gráfico vemos una representación de los distintos conjuntos de números que conocemos mediante diagramas de Venn.

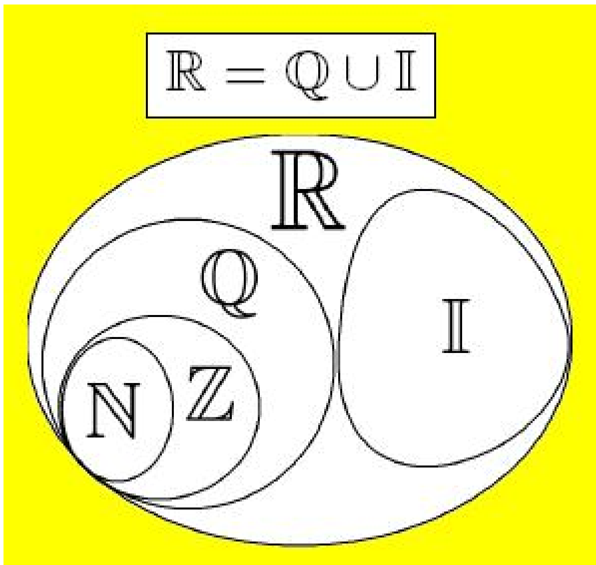


Imagen en diccio-mates.blogspot.com bajo CC

Importante

En el conjunto de los números reales se verifican las siguientes propiedades.

Propiedades de la suma	Propiedades del producto
Sean a, b y c números reales cualesquiera se cumplen las siguientes propiedades.	
Propiedad conmutativa	Propiedad conmutativa

Propiedad conmutativa	Propiedad conmutativa
$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Propiedad asociativa	Propiedad asociativa
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
Existencia de elemento neutro	Existencia de elemento neutro
$a+0=a$ 0 es el elemento neutro de la suma	$a\cdot 1=a$ 1 es el elemento neutro del producto
Existencia de elemento simétrico	Existencia de elemento simétrico
$a+(-a)=0$ $-a$ es el inverso o simétrico de a respecto de la suma	$a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1,\ a\neq 0$ $\frac{1}{a}$ es el inverso o simétrico de a respecto de la multiplicación
Propiedad distributiva de la suma respecto a la multiplicación $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$	

Ejercicio resuelto

Vamos a resolver un ejercicio importante, puesto que no debes seguir adelante si no eres capaz de diferenciar los distintos tipos de números que hemos visto en este apartado. Intenta hacer el ejercicio, y después mira la solución, el siguiente lo harás sin red.

Coloca los números de la siguiente lista en el menor conjunto que los contiene:

$14,\ -23,\ \frac{5}{6},\ 45,\ \pi,\ \sqrt{34},\ \sqrt{16},\ \frac{8}{2},\ 43$

Mostrar retroalimentación

Solución:

- $14,\ 45,\ \sqrt{16}=4,\ \frac{8}{2}=4,\ 43$ son números naturales.
- $-23,$ es un número entero.
- $\frac{5}{6}$ es un número racional.
- $\pi,\ \sqrt{34}$ son números irracionales.
- Por último, aclarar que todos son números reales.

Comprueba lo aprendido

Decide si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

4 **es un número entero.**

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero
Es cierto, además de ser natural es entero, ya que todos los naturales son enteros.

-13 **es un número natural.**

○ Verdadero ○ Falso

Falso
Es un número entero y no natural.

$\sqrt{7}$ **es un número racional.**

○ Verdadero ○ Falso

Falso
Al tener infinitas cifras decimales sin periodo, es un número irracional.

$\frac{12}{4}$ **es un número natural, y además es un racional también.**

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Claro, es natural al valer 3, y es racional, o no se ve que es una fracción.

π **es un número irracional.**

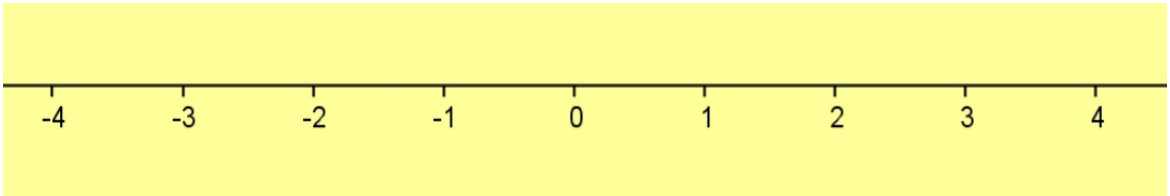
○ Verdadero ○ Falso

Verdadero
Podemos decir que no solamente es irracional, sino que es uno de los irracionales más famosos del mundo, y no sólo de los irracionales, es uno de los números más famosos del mundo.

La recta real

Una vez definidos los números reales, es útil visualizarlos gráficamente. Podemos hacerlo relacionando los números con los puntos de una recta; para ello, basta con señalar en una recta un punto al cual se le asocia el número real 0 y a otro punto a la derecha del primero al que se le asocia el número 1.

La representación de los números enteros se hace llevando el segmento que va de 0 a 1 hacia la derecha, o hacia la izquierda, tantas veces como indica el valor absoluto del número (ver el concepto del valor absoluto en el apartado "Valor absoluto. Distancias"). EL resulta es una recta como la que aparece en la siguiente figura.

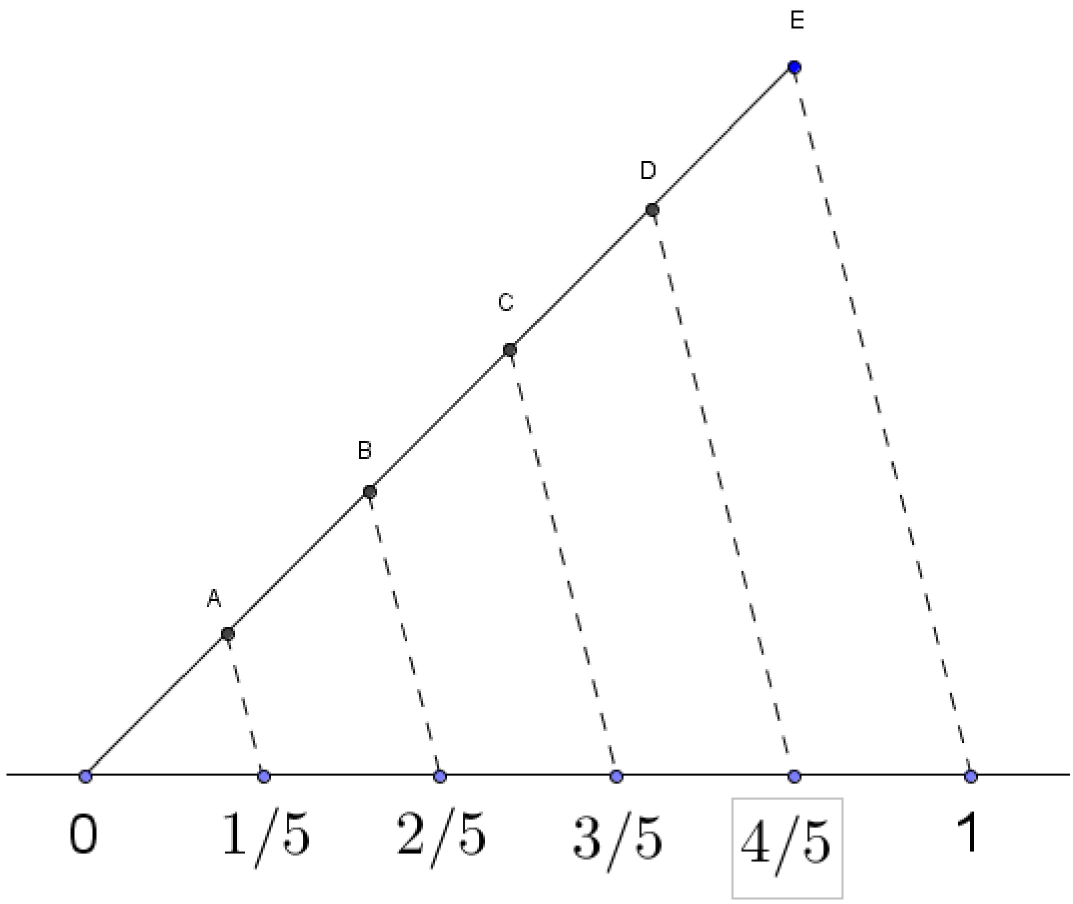


Fuente propia realizado con geogebra bajo Dominio público

El resto de los puntos de la recta representan números reales diferentes de lo enteros; los números racionales que vienen representados mediante fracciones se pueden construir utilizando el Teorema de Tales.

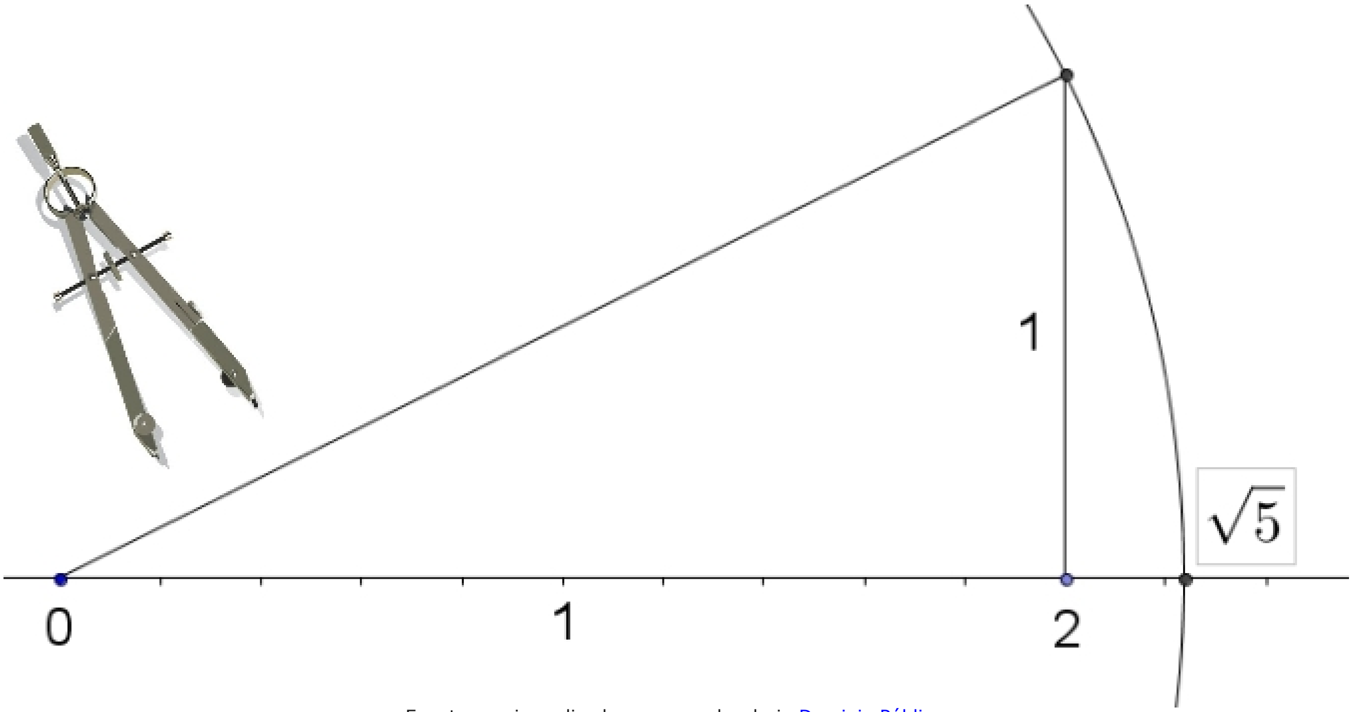
Ejemplo:

Si queremos construir el número 4/5 tendremos que subdividir el segmento de extremos 0 y 1 en cinco partes iguales, para ello trazaremos una recta por el punto 0 distinta a la recta real que pasa por el 1. A continuación se harán sobre ella cinco segmentos iguales 0A, AB, BC, CD, DE y se unirá el punto final E del último segmento con el 1. Posteriormente se trazarán líneas paralelas a la que pasa por el 1 y el E por los puntos A, B, C, D. El punto de corte en la recta real, de la recta construida que pasa por D, será 4/5.



Fuente propia realizada con geogebra bajo Dominio Público

Algunos números irracionales se pueden construir mediante teoremas geométricos, como el Teorema de Pitágoras, utilizando regla y compás. Un ejemplo es $\sqrt{5}$, tal como aparece en la siguiente figura.



Fuente propia realizada con geogebra bajo Dominio Público

Importante

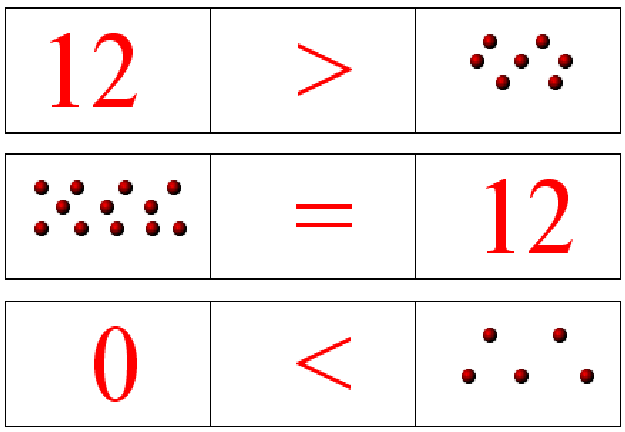


Imagen en todomonografias.com bajo CC

Veamos el significado de estos símbolos:

- **El símbolo** $<$ se lee "menor que". Así $2<5$ se lee "2 menor que 5". Si escribimos $x<5$ nos estamos ahorrando muchas palabras, ya que $x<5$ representa a todos los números reales x que son menores que 5, por ejemplo el 1, el -1 o el 2,7.

- **El símbolo** $>$ se lee "mayor que". Así $5>2$ se lee "5 mayor que 2". Si escribimos $x>2$, estamos representando a todos los números reales que son mayores que 2.

- **El símbolo** $\leq$ se lee "menor o igual que". Así $x \leq 2$ representa a todos los números reales que son menores o iguales que 2.

- **El símbolo** $\geq$ se lee "mayor o igual que", asíx $\geq$ 2 representa a todos los números reales que son mayores o iguales a 2.

Teniendo en cuenta que los símbolos $<, >, \leq, \geq,$ se pueden leer en los dos sentidos, es decir, $2 < 5$ se puede leer: "2 menor que 5", o "5 mayor que 2", en la expresión $2 < x \leq 5$, estamos indicando todos los números, " x ", que son mayores que 2 y menores o iguales que 5.

Diremos que un número real a es positivo cuando $a>0$, en caso contrario, o sea: $a<0$, diremos que el número real es negativo, los números reales negativos se distinguen de los positivos por llevar el signo "-" a la izquierda como por ejemplo:

distinguen de los positivos por llevar el signo "−" a la izquierda como por ejemplo: $-1,\ -\sqrt{7},\ -\pi,$ etc.

Todo número situado a la derecha del 0 en la recta real es positivo, los números situados a la izquierda son negativos.

A toda expresión del tipo $a<b$, $a>b$, $a \leq b$, $a \geq b$ siendo a y b números reales cualesquiera se le llama "desigualdad". Las desigualdades verifican las siguientes propiedades.

Propiedades	Ejemplos
Si $a<b$ entonces $a+c<b+c$	Como $3<4$ entonces $3+5<4+5$
Si $a<b$ y $b<c$ entonces $a<c$	Como $2<3$ y $3<4$ entonces $2<4$
Si $a<b$ y $c>0$ entonces $a \cdot b<b \cdot c$	Como $7<9$ y $2>0$ entonces $7 \cdot 2 < 9 \cdot 2 \rightarrow 14 < 18$
Si $a<b$ y $c<0$, $a \cdot c>b \cdot c$	Como $7<9$ y $-2<0$ entonces $7 \cdot (-2) < 9 \cdot (-2) \rightarrow -14 > -18$

Importante

Una ventaja que tiene imaginar el conjunto de los números reales como los infinitos puntos de una línea recta viene derivada del hecho de que el **conjunto de los números reales es un conjunto ordenado** como los puntos de una recta, los cuales se encuentran todos en la misma dirección. Matemáticamente esto se expresa de la siguiente forma.

Si en el conjunto de los números reales establecemos la relación, entre sus elementos, llamada: "menor o igual que" y simbolizada como $\leq$, entonces dados tres números reales: a, b y c cualesquiera, se cumple siempre las siguientes propiedades.

Reflexiva

$a \leq a$

Antisimétrica

Si se cumple:

$a \leq b \text{ y } b \leq a \Rightarrow a=b$

Transitiva

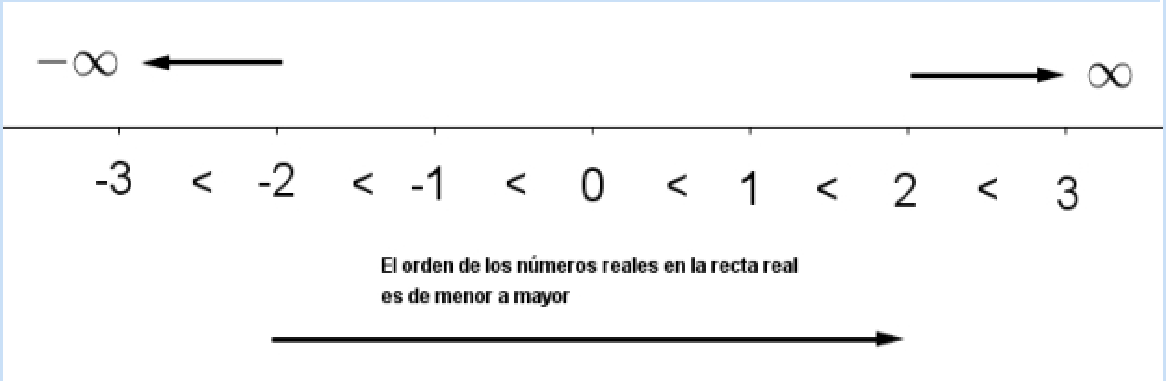
$a \leq b \text{ y } b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Importante

En matemáticas superiores entra en juego el concepto de infinito, el cual viene representado por el símbolo ∞. Desde el punto de vista del análisis matemático, y usando una definición no rigurosa y de carácter intuitivo, el infinito cabe entenderlo de dos formas:

- Como un número infinitamente grande el cual, como es lógico, es irrepresentable. Se simboliza por $+\infty$ o ∞ cuando el número es positivo y $-\infty$ cuando el número es negativo.
- Como una cantidad, positiva o negativa, que va creciendo de forma indefinida sin limitación alguna.

Otra ventaja que tiene imaginar el conjunto de los números reales como los puntos de una recta es debida al hecho de que aquel (el conjunto de los números reales) comparte con esta (la recta) la misma propiedad, y es la de su **infinitud**. De la misma manera que los puntos de una recta son infinitos, también lo son los elementos que componen el conjunto de los números reales. La siguiente figura pretende sintetizar las dos propiedades principales (su orden y su infinitud) que posee el conjunto de los números reales.



Fuente propia realizada con geogebra bajo Dominio Público

Importante

INTERVALOS Y SEMIRRECTAS EN LA RECTA REAL

Utilizamos los intervalos para designar tramos de la recta real. Los intervalos reales pueden ser de diferentes tipos, según los extremos se incluyan o no en el intervalo:

Intervalo abierto

- $(a,b)=a<x<b$. Son todos los números reales comprendidos entre a y b sin incluir ni a ni b.

Intervalo cerrado:

- $[a,b]=a\leq x\leq b$. Son todos los números reales comprendidos entre a y b ambos incluidos.

Intervalos semiabiertos:

- $[a,b)=a\leq x<b$. Son todos los números reales comprendidos entre a y b incluido a pero no b.
- $(a,b]=a<x\leq b$. Son todos los números reales comprendidos entre a y b incluido b pero no a.

Semirrectas:

- $(-\infty,a)=x<a$. Son todos los números reales menores que a.
- $(-\infty,a]=x\leq a$. Son todos los números reales menores o iguales que a.
- $(a,+\infty)=x>a$. Son todos los números reales mayores que a.
- $[a,+\infty)=x\geq a$. Son todos los números reales mayores o iguales que a.

En ocasiones queremos representar varios intervalos, para ello utilizamos el símbolo " $\cup$ " que significa "unión de conjuntos". Por ejemplo, queremos representar el conjunto numérico representado por los intervalos $(0,2)$ y $(2,10)$ sin incluir el 2, esto se puede representar de esta forma: $(0,2)\cup(2,10)$.

Ejercicio resuelto

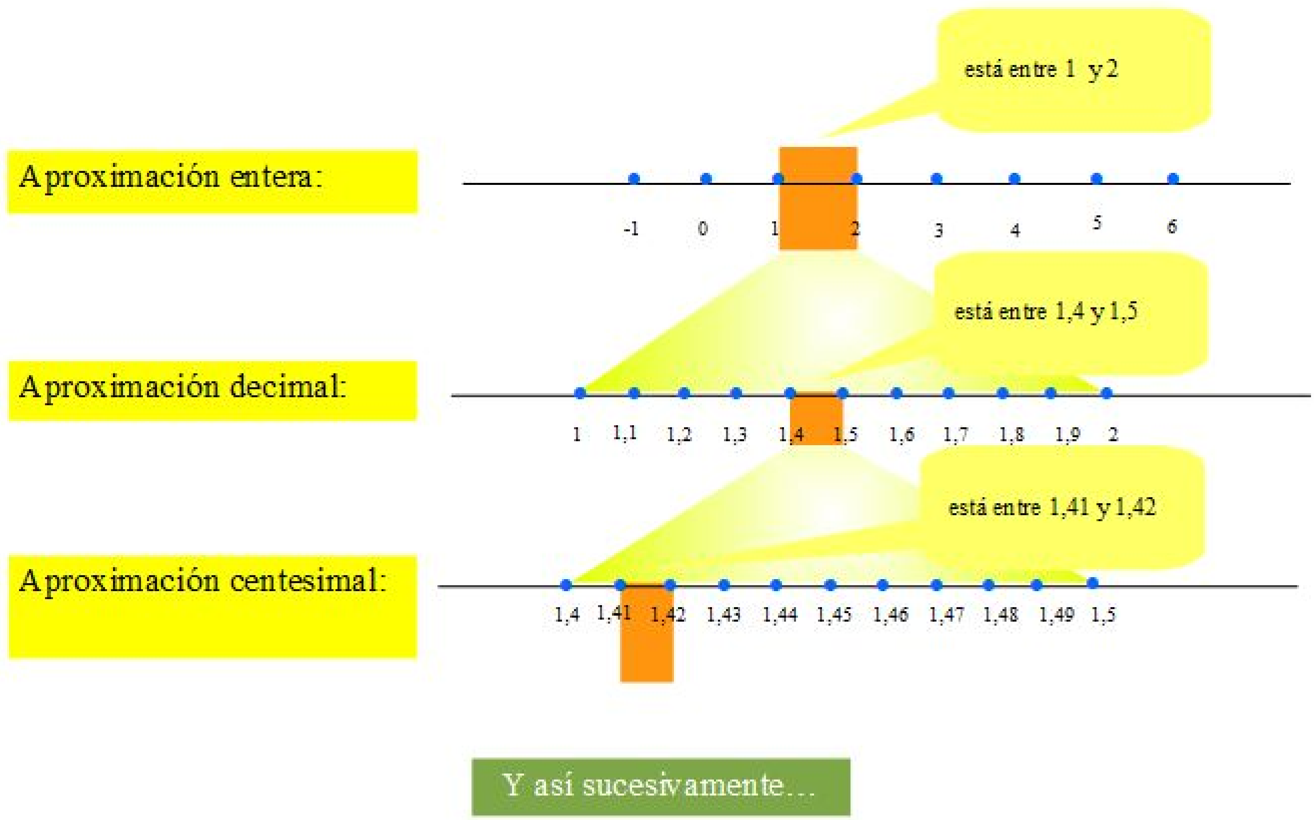
Eva está esperando el autobús para ir al trabajo, sabe que de 9:05 a 9:10 pasa el autobús n.º 6. Hoy el autobús ha llegado a las 9 horas 5 minutos 4 segundos. Pero ayer, como estaba lloviendo, llegó a las 9 horas 8 minutos 3 segundos. Tanto en este ejemplo, como en muchos otros, estamos usando de forma inconsciente intervalos de números reales. En nuestro caso, Eva tiene que esperar un intervalo de 0 a 5 minutos

Imagen enFlickr de Lst1984 bajo CC

que esperar un intervalo de 0 a 5 minutos.

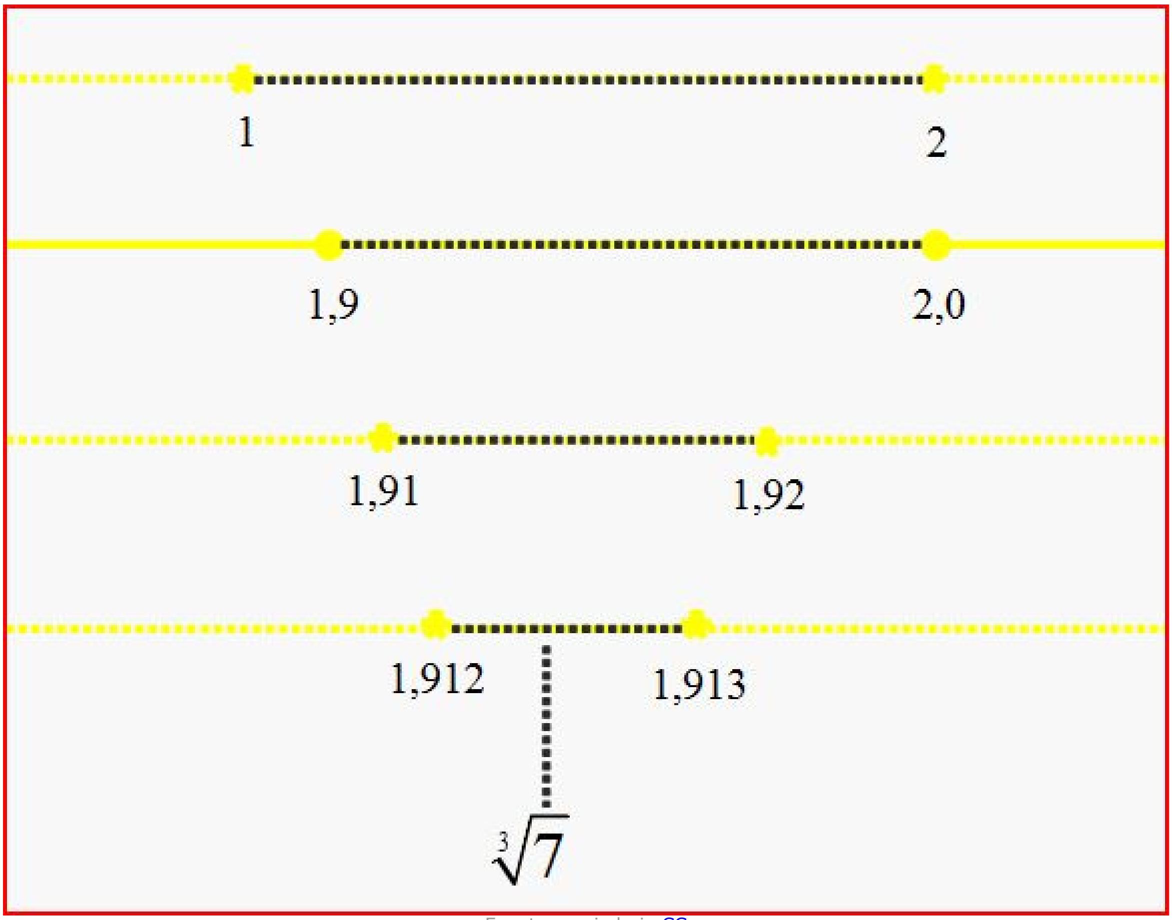
Unos matemáticos se inventaron unos símbolos para representar los intervalos y ahorrarse así unas cuantas palabras. Así, la expresión matemática de este intervalo será $[0,5]$. Y si designamos por x los minutos de demora del autobús, lo podemos expresar en forma de desigualdad: $0 \leq x \leq 5$

Llegado a este punto veamos otro procedimiento para representar números diferentes a los enteros en la recta real, este se basa en el hecho de que todo número real puede ser considerado como la intersección de **una serie de intervalos (o segmentos de la recta real) encajados**, por ejemplo para representar $\sqrt{2}$ cuyo valor, si usamos una calculadora, es: 1,414213562... nos situamos entre los puntos 1 y 2, y después, ampliando esta zona, entre 1,4 y 1,5; y posteriormente entre 1,41 y 1,42; y así sucesivamente, podríamos seguir infinitamente según se muestra en la gráfica de abajo.



Fuente propia bajo CC

En este otro ejemplo podemos ver como se procede a la hora de representar otro número irracional, como es el caso de $\sqrt[3]{7}$ cuyo valor es: 1,912931183...



Fuente propia bajo CC

En la imagen de arriba vemos como vamos aproximando poco a poco el valor de la raíz cúbica de 7. Si aproximamos a la unidad, podemos situar su valor entre 1 y 2. Si lo aproximamos a la décima, situamos su valor entre 1,9 y 2. Si seguimos aproximando a la centésima, su valor estará entre 1,91 y 1,92. Un paso más es aproximar a la milésima, o sea, el valor estará entre 1,912 y 1,913. Este proceso, es infinito, nunca llegaríamos a obtener el resultado exacto de la raíz de 7, tan solo, una aproximación, ya que al ser un número irracional, tiene infinitos decimales.

Ejercicio resuelto

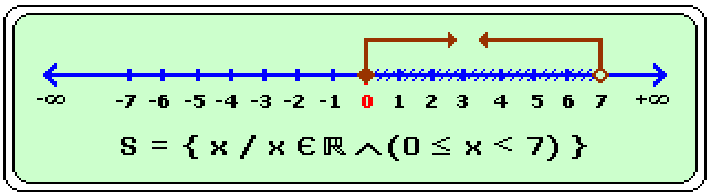


Imagen en distribuyendoconocimiento.blogspot.com.es bajo CC

Escribe en forma de desigualdad los siguientes intervalos y semirrectas:

a. $(-2{,}3)$

b. $[-2{,}3)$

c. $[-2{,}3]$

d. $(-2{,}3]$

e. $[-1,+\infty)$

f. $(-\infty,5)$

Mostrar retroalimentación

a. $-2 < x < 3$

b. $-2 \leq x < 3$

c. $-2 \leq x \leq 3$

d. $-2 < x \leq 3$

e. $x \geq -1$

f. $x < 5$

Comprueba lo aprendido

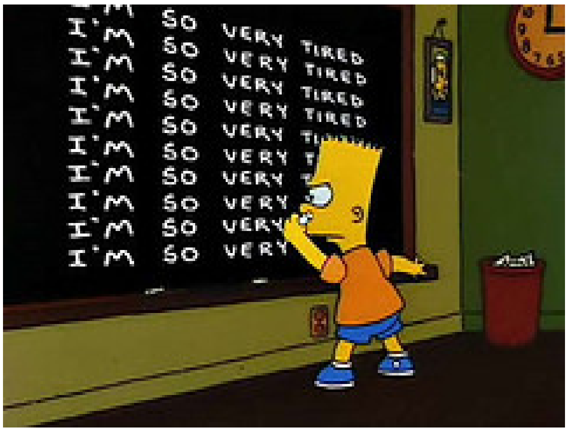


Imagen en Flickr de quicheisinsane bajo CC

El intervalo $(-3,2)$ **en forma de desigualdad se expresa** $-3 \leq x \leq 2$

Verdadero Falso

Falso

La expresión $2 \leq x < 5$ **representa al intervalo** $[2,5)$

Verdadero Falso

Verdadero

El intervalo $(0,1)$ **en forma de desigualdad se expresa:** $0<x<1$

Verdadero Falso

Verdadero

La expresión $-7<x\leq-3$ **representa al intervalo** $[-7,-3)$

Verdadero Falso

Falso

La desigualdad $x<0$ **representa a la semirrecta** $(-\infty,0)$

Verdadero Falso

Verdadero

La semirrecta $(-\infty,-2)$ **se expresa en forma de desigualdad como.** $x>-2$

Verdadero Falso

Falso

2.2. Representación de intervalos

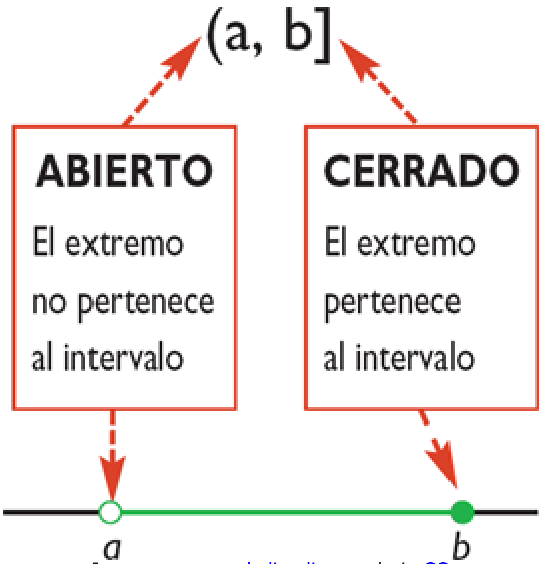
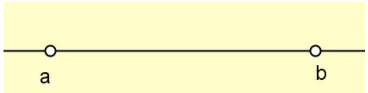
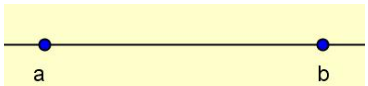
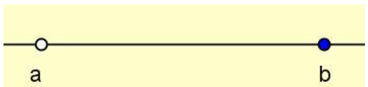
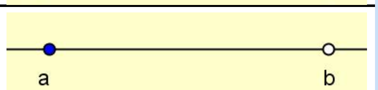
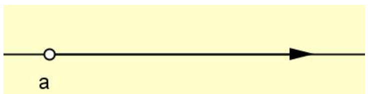
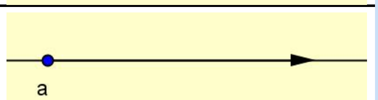
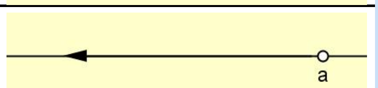
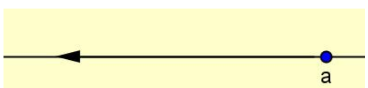


Imagen en www.kalipedia.com bajo CC

Hemos visto en el apartado "Intervalos" que un número se representa en la recta real simplemente con un punto. ¿Cómo se representará un intervalo que contiene infinitos números? Pues con infinitos puntos, es decir, dibujando el tramo de la recta real que representa a dicho intervalo. Vamos a verlo a continuación.

Importante

Nombre	Intervalo	Desigualdad	Representación Gráfica
Intervalo abierto	(a,b)	$a < x < b$	
Intervalo cerrado	$[a,b]$	$a \leq x \leq b$	
Intervalos semiabiertos	$(a,b]$	$a < x \leq b$	
	$[a,b)$	$a \leq x < b$	
Semirrectas	$(a,+\infty)$	$x > a$	
	$[a,+\infty)$	$x \geq a$	
	$(-\infty,a)$	$x < a$	
	$(-\infty,a]$	$x \leq a$	

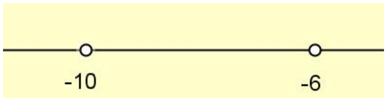
Fuente Propia bajo CC

Ejercicio resuelto

Imagen en Flickr de Universidad de Navarra bajo CC

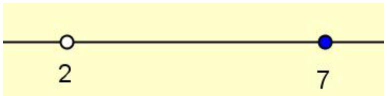
Representa gráficamente el intervalo $(-10,-6)$

Mostrar retroalimentación



Fuente propia bajo CC

Expresa en forma de desigualdad el siguiente intervalo:



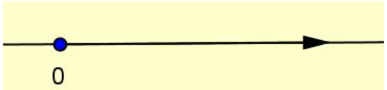
Fuente propia bajo CC

Mostrar retroalimentación

$2 < x \leq 7$

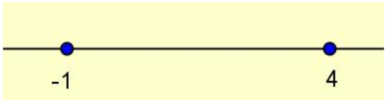
Representa gráficamente la semirrecta $[0,+\infty)$

Mostrar retroalimentación



Fuente propia bajo CC

Expresa en forma de intervalo la siguiente representación gráfica:



Fuente propia bajo CC

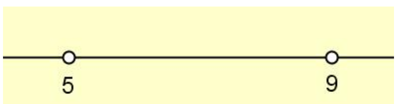
Mostrar retroalimentación

$[1,4]$

Comprueba lo aprendido

Imagen en Flickr de Universidad de Navarra bajo CC

El intervalo $[5,9]$ se representa así:

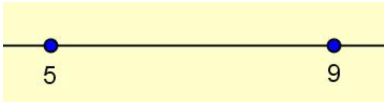


Fuente propia bajo CC

Verdadero Falso

Falso

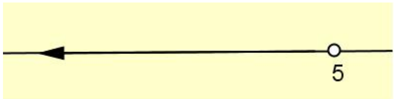
La representación correcta es:



Fuente propia bajo CC

Cuando los extremos del intervalo vienen entre corchetes esto indica que pertenecen al mismo, por lo que el segmento que lo representa viene delimitado por puntos cerrados ● .

El siguiente gráfico corresponde a la semirrecta $(-\infty,5)$



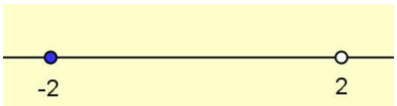
Fuente propia bajo CC

Verdadero Falso

Verdadero

La gráfica es correcta. En este caso el extremo de la izquierda al ser $-\infty$ viene representado por una flecha, mientras que el extremo de derecha al estar acompañado de un paréntesis esto indica que no pertenece al intervalo por lo que viene representado por un punto abierto ○ .

El intervalo $-2 \leq x < 2$ **se representa así:**



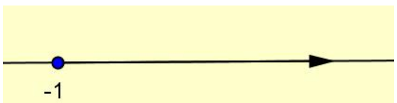
Fuente propia bajo CC

Verdadero Falso

Verdadero

La representación gráfica es correcta. En este caso el signo $\leq$ indica que el extremo de la izquierda pertenece al intervalo por lo que viene representado por un punto cerrado ● , mientras que el signo $<$ indica que el extremo de la derecha no pertenece al intervalo por lo que viene representado por un punto abierto ○ .

La siguiente gráfica corresponde a la semirrecta $(-\infty,-1]$



Fuente propia bajo CC

Verdadero Falso

Verdadero Falso

Falso

La gráfica corresponde al intervalo $[-1,+\infty)$. En la representación gráfica la flecha del extremo derecho hace alusión al símbolo ∞ y por lo tanto esto no se corresponde con el intervalo que se propone en la pregunta, el cual en su extremo derecho figura el -1.

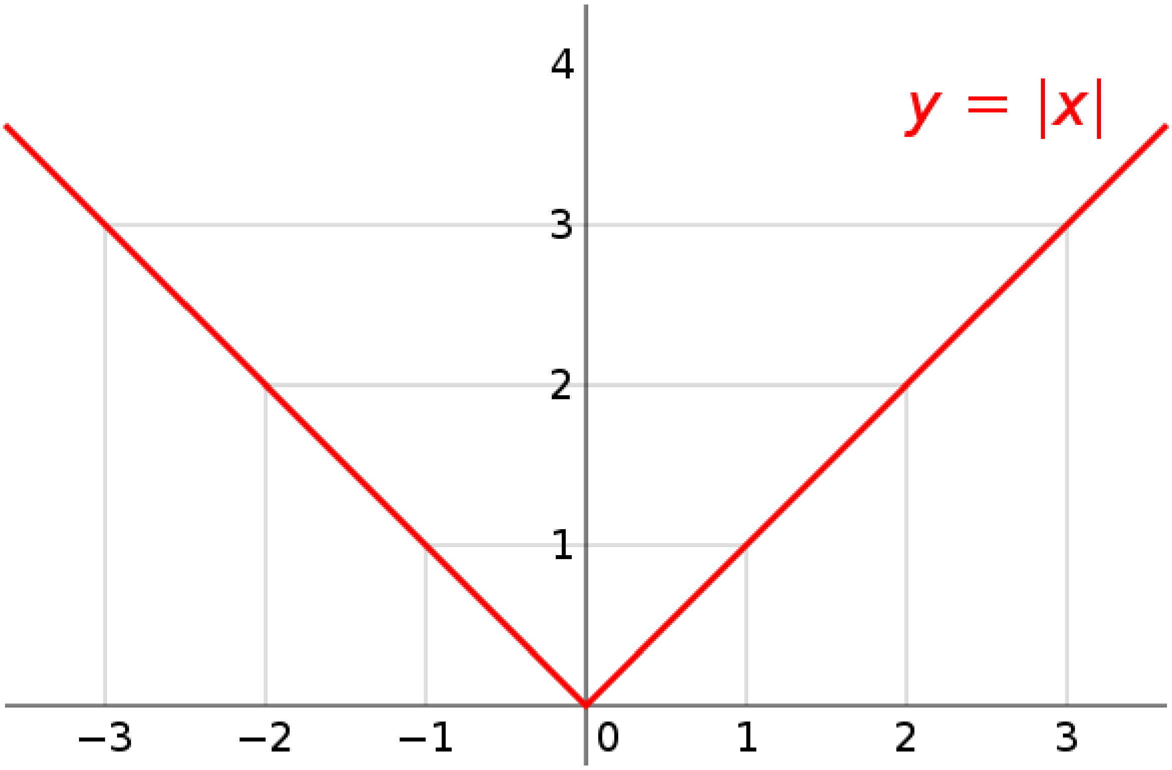


Imagen en Wikimedia Commons de Qef bajo CC

¿Es importante el signo en los números? Siempre no. Si es cierto que no es igual estar a -18 grados que a 18 grados, tener 2.000 € en tu cuenta corriente que -2.000 €. ¿Pero cuál es la distancia, en km, entre Almería y Sevilla, 422? ¿y de Sevilla a Almería?. Nos vale el mismo dato 422 km.

Son números donde el signo no interesa. En matemáticas le llamamos **valor absoluto.**

Importante

El valor absoluto de un número x se representa por $|x|$ y es:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Importante

Algunas propiedades

1. El valor absoluto de un numero real es el mismo si este es positivo:

$$|5| = 5 \quad \text{pues} \quad 5 > 0$$

2. El valor absoluto de un numero negativo es el mismo cambiado de signo:

$$|-3|=3 \text{ pues } -3<0$$

3. El valor absoluto de cero es cero: $|0|=0$

4. Un numero y su opuesto tienen el mismo valor absoluto. $|4|=|-4|=4$

Ejercicio resuelto

Hallar el valor absoluto de:

a. -6

b. $\sqrt{5}$

c. $3-\sqrt{10}$

¿Cuáles son los valores de x si $|x|=1$?

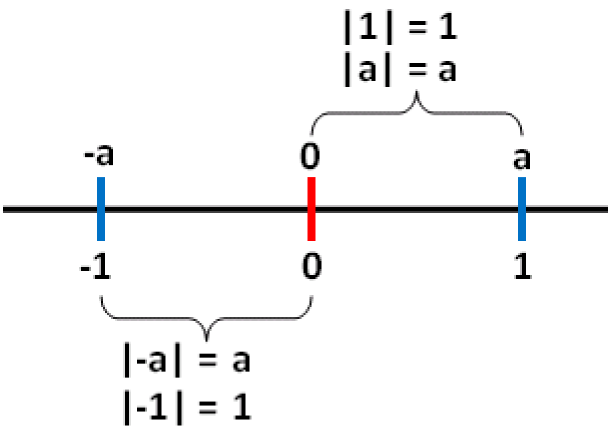


Imagen en Wikimedia Commons de Helder.wiki bajo CC

Mostrar retroalimentación

a. $|-6|=6$ pues $-6<0$

b. $|\sqrt{5}|=\sqrt{5}$ ya que $\sqrt{5}>0$

c. $|3-\sqrt{10}|=-(3-\sqrt{10})=\sqrt{10}-3$ Ten en cuenta que $3-\sqrt{10}<0$

Como $|1|=|-1|=1$ entonces $x=1$ o $x=-1$

Importante

Distancia del número real a al b es el valor absoluto de la diferencia. Es decir:

$$d(a,b) = |a-b|$$

La distancia cumple las siguientes condiciones:

1. $d(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b$
2. $d(a,b)>0 \Leftrightarrow a \neq b$
3. $d(a,b)=d(b,a)$
4. $d(a,b) \leq d(a,c)+d(c,b)$

Importante

Otra forma de representar intervalos de la recta real es mediante la utilización de desigualdades en valor absoluto. Veamos los siguientes casos:

Fotografía en Flickr de InfoMofo bajo CC

1. $|x| < a$ siendo a un número real cualesquiera.
   Si queremos hallar los valores de x para los cuales se cumple la desigualdad de arriba estos son: $-a < x < a$, los cuales en forma de intervalo se pueden poner como: $(-a,a)$. De forma análoga se resuelve esta expresión cuando viene dada en la forma: $|x| \leq a$, en este caso el intervalo que recoge las soluciones de la desigualdad sería cerrado, tanto por la derecha como por la izquierda, $[-a,a]$.

2. $|x-b| < a$ siendo a y b números reales cualesquiera.
   Si queremos hallar los valores de x para los cuales se cumple la desigualdad de arriba estos son: $b-a<x<b+a$, los cuales en forma de intervalo se pueden poner como: $(b-a,b+a)$. De forma análoga se resuelve la expresión cuando viene dada en la forma: $|x-b| \leq a$ en este caso el intervalo que recoge las soluciones de la desigualdad sería cerrado, tanto por la derecha como por la izquierda, $[b-a,b+a]$.

3. $|x| > a$ siendo a un número real cualesquiera.
   Si queremos hallar los valores de x para los cuales se cumple la desigualdad de arriba estos son: $x<-a$ y $x>a$, los cuales en forma de intervalo se pueden poner como: $(-\infty,-a) \cup (a,\infty)$. De forma análoga se resuelve la expresión cuando viene dada en la forma: $|x| \geq a$, en este caso los intervalos que recogen las soluciones de la desigualdad serían; cerrado por la derecha el primero y por la izquierda el segundo, $(-\infty,-a] \cup [a,\infty)$.

4. $|x-b| > a$ siendo a y b un número real cualesquiera.

Si queremos hallar los valores de x para los cuales se cumple la desigualdad de arriba estos son: $x<b-a$ y $x>b+a$, los cuales en forma de intervalo se pueden poner como: $(-\infty,b-a)\cup(b+a,\infty)$. De forma análoga se resuelve la expresión cuando viene dada en la forma: $|x-b|\geq a$, en este caso los intervalos que recogen las soluciones de la desigualdad serían; cerrado por la derecha el primero y por la izquierda el segundo, $(-\infty,b-a]\cup[b+a,\infty)$.

Fotografía en Flickr de fdecomite bajo CC

Cuando escribimos un número decimal infinito, estamos representando, como su nombre indica, un número que tiene infinitas cifras decimales. Pero al vernos en la imposibilidad de escribir las infinitas cifras, representamos el número sólo con un cierto número de ellas, por lo que estamos cometiendo un error.

Por ejemplo, tenemos el número real $\sqrt{3}$; si efectuamos la raíz podemos obtener tantas cifras decimales como queramos: $\sqrt{3}=1{,}732050808...$ Podemos realizar las siguientes aproximaciones de $\sqrt{3}$

Aproximación hasta las décimas.

Podemos coger como valor aproximado de $\sqrt{3}$ o bien $1{,}7$ o $1{,}8$ ya que $1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$ en este caso estamos cometiendo un error menor de $0{,}1$.

Si cogemos como valor aproximado $1{,}7$ estamos cometiendo un **error por defecto** ya que: $\sqrt{3}=1{,}732050808...$ y se cumple que:

$$1{,}732050808-1{,}7=0{,}032050808>0$$

Si cogemos como valor aproximado 1,8 estamos cometiendo un **error por exceso** ya que: $\sqrt{3}=1{,}732050808...$ y se cumple que:

$$1{,}732050808-1{,}8=-0{,}067949192<0$$

Aproximación hasta las centésimas.

Podemos coger como valor aproximado de $\sqrt{3}$ o bien $1{,}73$ o $1{,}74$ ya que $1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74$ en este caso estamos cometiendo un error menor de $0{,}01$.

Si cogemos como valor aproximado $1{,}73$ estamos cometiendo un **error por defecto** ya que: $\sqrt{3}=1{,}732050808...$ y se cumple que:

$$1{,}732050808-1{,}73=0{,}002050808>0$$

Si cogemos como valor aproximado $1{,}74$ estamos cometiendo un **error por exceso** ya que: $\sqrt{3}=1{,}732050808...$ y se cumple que:

$$1{,}732050808-1{,}74=-0{,}007949192<0$$

Y así sucesivamente.

A partir de ahora al valor exacto de un número real lo designaremos por x , y al valor aproximado por x^* , es decir, en el ejemplo de la aproximación hasta las décimas de arriba en el caso de que elijamos como valor aproximado $1{,}7$.

$$x=1{,}732050808...$$

$$x^*=1{,}7$$

Importante

Error absoluto

Cuando aproximamos estamos cometiendo un error, siendo éste la diferencia entre el valor exacto y el aproximado. Este error se llama absoluto y lo denotaremos por E_a , y como hemos explicado su valor es:

$$E_a=x-x^*$$

Según el signo de Ea podemos distinguir entre error por exceso o por defecto:

- Si $E_a>0$ error por defecto; la aproximación es más pequeña que el valor real.
- Si $E_a<0$ error por exceso; la aproximación es mayor que el valor real.

Importante

Error relativo

El error relativo en la aproximación es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto, se denota como E_r .

$$E_r=\frac{E_a}{x}$$

Lo mas frecuente es denotarlo en tanto por ciento, es decir, multiplicando por cien el resultado obtenido en la división; $E_r \cdot 100$

A la hora de aproximar se utilizan dos tipos de aproximaciones:

a. Truncamiento
b. Redondeo

Importante

Truncamiento

El truncamiento consiste en cortar el número exacto sin preocuparnos de cómo continúa la expresión decimal después.

Ejemplo: Jesús tiene en realidad $43{,}347222...$ años pero el sólo responde 43. Lo que acaba de hacer es un **truncamiento**.

Ejercicio resuelto

Aproxima por truncamiento de $\pi = 3{,}14159...$

Mostrar retroalimentación

- Truncamiento de las unidades $\pi \approx 3$
- Truncamiento de las décimas $\pi \approx 3{,}1$
- Truncamiento de las centésimas $\pi \approx 3{,}14$
- Truncamiento de las milésimas $\pi \approx 3{,}141$

Imagen en Flickr de Daniel F.Pigatto bajo CC

Importante

La aproximación por **truncamiento** (en **números positivos**) es siempre por **defecto**, es decir, el valor aproximado x^* es más pequeño que el valor exacto x ; $x^* < x$.

Como has visto, los años de Jesús $43{,}34722$ es mayor que la aproximación que se utiliza por truncamiento.

La aproximación por **truncamiento** (en **números negativos**) siempre es por **exceso**, es decir, $x^* > x$.

Ejercicio resuelto

Aproxima por truncamiento $-\pi = -3{,}14159...$

Mostrar retroalimentación

- Truncamiento de las unidades $-\pi \approx -3$
- Truncamiento de las décimas $-\pi \approx -3{,}1$
- Truncamiento de las centésimas $-\pi \approx -3{,}14$
- Truncamiento de las milésimas $-\pi \approx -3{,}141$

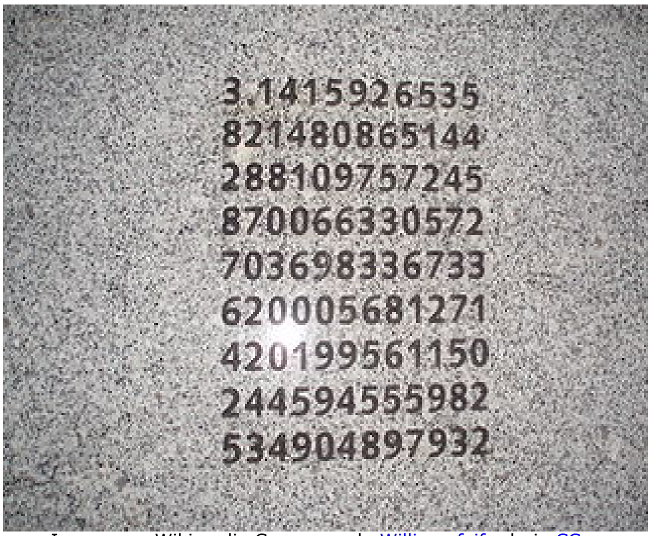


Imagen en Wikimedia Commons de Williampfeifer bajo CC

Importante

Redondeo

En el redondeo la aproximación puede ser por defecto o por exceso, depende del valor de la cifra siguiente a la que aproximamos.

De esta forma:

- Si la **cifra siguiente** al orden de aproximación es **menor que 5** la aproximación por redondeo es la misma que la de **truncamiento** y por tanto la aproximación es por redondeo es la misma que la de **truncamiento** y por tanto la aproximación es por defecto.

- Si la **cifra siguiente** al orden de aproximación es **mayor o igual que 5** la aproximación por redondeo es por exceso, con lo que **sumamos una unidad** a la **última** cifra **decimal que ponemos.**

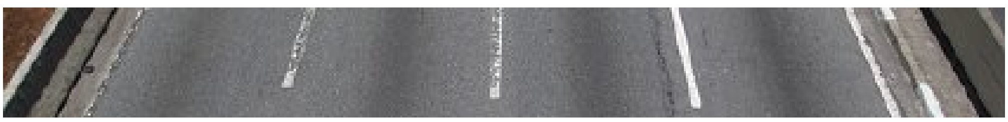
Ejercicio resuelto

Aproximación por redondeo de $\pi = 3{,}14159$...

Mostrar retroalimentación

- Redondeo de las unidades $\pi \approx 3$ (por defecto)
- Redondeo de las décimas $\pi 1 \approx 3{,}1$ (por defecto)
- Redondeo de las centésimas $\pi 1 \approx 3{,}14$ (por defecto)
- Redondeo de las milésimas $\pi \approx 3{,}141 + 0{,}001 = 3{,}142$ (por exceso)

Ejercicio resuelto



Fotografía en Flickr de Teosaurio bajo CC

Halla las aproximaciones hasta las milésimas y las diezmilésimas de $\sqrt{3}$ usando los procedimientos de truncamiento y redondeo. Indica los tipos de errores cometidos en cada caso.

Mostrar retroalimentación

Aproximación hasta las milésimas.

- El valor aproximado de $\sqrt{3}$ por truncamiento es $1{,}732$

Si cogemos como valor aproximado $1{,}732$ estamos cometiendo un **error por defecto** ya que: $\sqrt{3} = 1{,}732050808...$ y se cumple que:

$$1{,}732050808 - 1{,}732 = 0{,}000050808 > 0$$

En este caso estamos cometiendo un error menor de $0{,}001$.

- El valor aproximado de $\sqrt{3}$ por redondeo es $1{,}732$, ya que la cifra de la diezmilésima es menor que 5 por lo que la cifra de la milésima queda igual.

El tipo de error en que incurrimos es el mismo que en el caso anterior.

En este caso también estamos cometiendo un error menor de $0{,}001$

Aproximación hasta las diezmilésimas.

- El valor aproximado de $\sqrt{3}$ por truncamiento es $1{,}7320$.

Si cogemos como valor aproximado $1{,}7320$ estamos cometiendo un **error por defecto** ya que: $\sqrt{3} = 1{,}732050808...$ y se cumple que:

$$1{,}732050808 - 1{,}7320 = 0{,}000050808 > 0$$

En este caso estamos cometiendo un error menor de $0{,}0001$

- El valor aproximado de $\sqrt{3}$ por redondeo es $1{,}7321$, ya que la cifra de la cienmilésima es 5 por lo que a la cifra de la diezmilésima se le suma una unidad cienmilésima es 5 por lo que a la cifra de la diezmilésima se le suma una unidad.

Si cogemos como valor aproximado $1{,}7321$ estamos cometiendo un **error por exceso** ya que: $\sqrt{3}=1{,}732050808...$ y se cumple que:

$$1{,}732050808-1{,}7321=-0{,}000049192<0$$

En este caso también estamos cometiendo un error menor de $0{,}0001$.

Comprueba lo aprendido

Aproxima las cantidades que se indican

2,995131… en las centésimas

- 2,99
- 3,00

¡Incorrecto! 2,99 sería por truncamiento.

¡Correcto! 2,99+0,01=3,00

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

$\sqrt{2}$ ... en las décimas

- 1,4
- 1,5

¡Correcto! La cifra de las centésimas es menor que 5.

¡Incorrecto!

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto

132,345... en las milésimas

- 132,345
- No se puede aproximar por redondeo pues no conocemos el valor de la cifra de las diezmilésimas

¡Incorrecto! No sabes si el número está más cerca de 132,345 o de 132,346 al desconocer si la cifra que va a continuación de la milésima es menor que cinco o no.

¡Correcto!

Solution

1. Incorrecto

1. Incorrecto
2. Opción correcta

-3,21951… en las milésimas

- -3,220
- -3,210

¡Correcto! -(3,219+0,001)=-3,220

¡Incorrecto!

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto

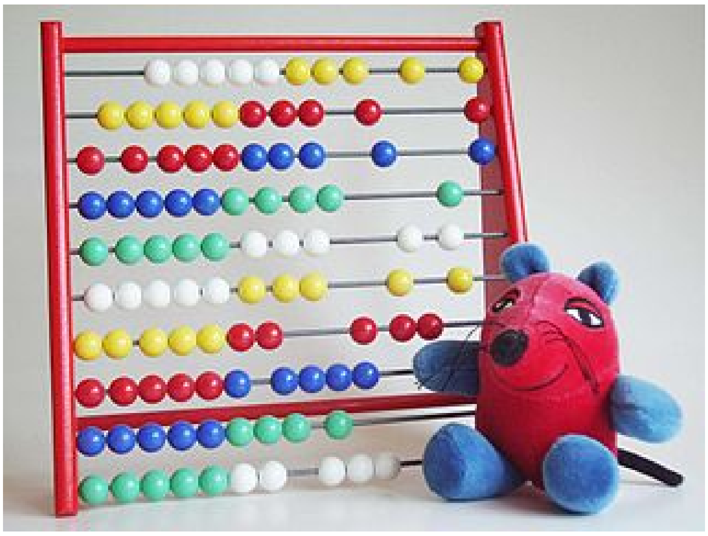


Imagen en Wikimedia Commons de Liftarn bajo CC

Curiosidad

Antes de empezar a usar la calculadora vamos a aclarar que nos centraremos en las más usuales actualmente, que son las llamadas *Direct Algebraic Logic*, que quiere decir algo así como: "escribir directamente en la calculadora como la lógica algebraica nos dice", y como nosotros escribimos en un papel. Vamos a detenernos en tres detalles: la tecla "SHIFT" o "INV", la forma de redondear con una calculadora y cómo trabajar con raíces. En el apéndice de este tema puedes encontrar enlaces a recursos de interés relacionados con el manejo de calculadoras científicas y online.

<u>La tecla INV o SHIFT</u>

Como ves encima de cada tecla de la calculadora hay escrita una serie de funciones matemáticas que nos pueden ayudar no pocas veces, a dar solución al problema o ejercicio que tengamos delante. Pues bien, la manera de utilizarla es a través de esa tecla que está arriba a la izquierda, y según la calculadora se llama "INV" o "SHIFT".

fuente propia bajo CC

<u>Redondeos</u>

Cuando hacemos una operación con nuestra calculadora, esta siempre nos da la solución por redondeo. Pero podemos cambiar el número de decimales que queremos que nos de. Esto lo realizamos con la sentencia "fix", que suele estar dentro de los distintos "MODE" que tiene la calculadora. Normalmente, pulsando

MODE 7 3

conseguimos que el número que esté en pantalla se escriba con 3 decimales. Por ejemplo si tuviesemos π en la calculadora, y escribimos **MODE 7 3**, la calculadora nos escribirá: 3,142; y ante **MODE 7 1**, veremos en el visor 3,1.

Raíces

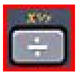
Para escribir raíces, tenemos varias teclas que son las siguientes:

fuente propia bajo CC

- La primera como se ve es para la raíz cuadrada: pulsamos esta tecla, después la cantidad y la calculadora nos da la solución, tras eso podemos elegir la cantidad de decimales que queremos, tal como hemos explicado más arriba.
- La segunda, es para elevar al cuadrado un número.
- La tercera, es para elevar al número que deseemos, y al darle a "SHIFT" o "INV" podemos hacer la raíz del índice que queramos. Como ejemplo calcularemos la raíz de índice 5 de 24:

Tecleamos "5"; tecleamos "SHIFT" y seguido  ; por último, tecleamos "24"; la solución es: 1,888175023

Hay calculadoras que también incluyen la tecla  , que nos da el cubo de un número y su función inversa, esto es, al teclear "SHIFT" podemos utilizar la raíz cúbica.

Por último, otras calculadoras tienen la tecla  que nos sirve, tras teclear "SHIFT", para lo mismo que la tecla vista dos líneas más arriba.

Curiosidad

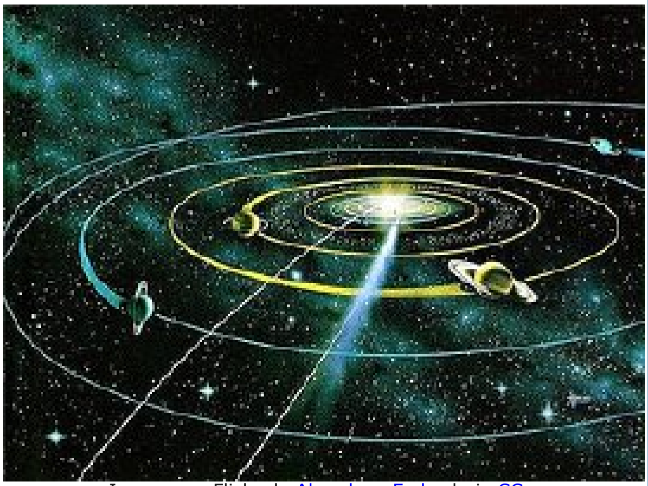


Imagen en Flickr de Almudena Fndez bajo CC

¿Te has planteado alguna vez a qué distancia estamos del Sol?

Seguro que sí, y seguro que has visto alguna vez la solución, aunque ahora mismo no la recuerdes.

Estamos a ciento cincuenta millones de kilómetros, chispa más o menos, porque con esa cantidad no nos vamos a plantear las decenas de kilómetros, ni los metros, o sea, evidentemente es una aproximación (recuerda el apartado anterior).

Pero ahora lo que nos ocupa es la cantidad, esto es, los ciento cincuenta millones de kilométros, que en números es algo así como: 150000000 km. ¡Vaya tela!, ¡imagínate escribir la distancia del Sol a Plutón! Te preguntarás, ¿y cómo los matemáticos no se han planteado escribirlo más cómodamente, más pequeño? Pues sí, lo hemos hecho, podemos escribirlo así: $1{,}5 \cdot 10^8$ km.

Para poder escribir esta cantidad de esta manera, hay que saber utilizar la segunda parte del nombre de este tema, la notación científica; y para saber utilizar la notación científica es necesario conocer y dominar lo estudiado en el tema 1 sobre las potencias.

Vayamos pues, paso a paso, a ser capaz de escribir cantidades tan grandes.

O tan pequeñas, porque si nos planteamos la masa de un electrón, a ver como la expresas ¿con 31 ceros en los decímales? no, más bien con las potencias y la notación científica.

La masa de un electrón es: 0,00000000000000000000000000000091 kg, uff, que pasada, fíjate ahora: $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; ¿mejor verdad?

Como hemos visto al principio del tema, hay números que son tan grandes o tan pequeños que resulta difícil nombrarlos y escribirlos y por eso nos ayudamos de las potencias para expresarlos de forma más simplificada. La **notación científica** es una forma

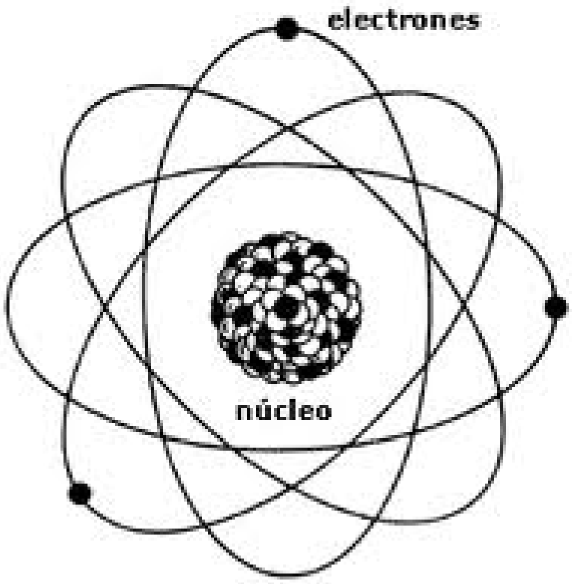


Imagen en Wikimedia Commons de Thalia Inga bajo CC

particular de escribir estos números utilizando las potencias.

Así la forma de expresar la distancia de la Tierra al Sol como $1{,}5\cdot 10^{8}$ km, o la masa de un electrón como $9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg se llama notación científica.

Importante

Una cantidad se expresa en **notación científica** como un número por una potencia de 10 (de exponente positivo o negativo). Dicho número tiene que cumplir unas condiciones:

1. Si es entero tiene que tener una sola cifra, **por ejemplo:** $5\cdot 10^{7}$.
2. Si es decimal, la parte entera tiene que tener una sola cifra del 1 al 9, es decir, la parte entera no puede ser cero.

Por ejemplo la cantidad $0{,}75\cdot 10^{9}$ **no está** expresada **en notación científica** pues la parte entera del número es un cero. Sin embargo la cantidad $7{,}5\cdot 10^{8}$ **sí está** bien expresada **en notación científica** pues la parte entera del número es una cifra comprendida entre 1 y 9.

Veamos algunos **ejemplos** que nos pueden ayudar a la hora de expresar un número en notación científica, en los que se observa que al **multiplicar** un número **por una potencia de 10 de exponente positivo**, lo que hacemos es multiplicar por la unidad seguida de tantos ceros como indique el exponente, mientras que al **multiplicar por una potencia de 10 de exponente negativo**, lo que hacemos es dividir por la unidad seguida de tantos ceros como indique el exponente:

$a\cdot 10^{n}$	$a\cdot 10^{-n}$
$50 = 5\cdot 10$	$0{,}5 = 5:10 = 5\cdot 10^{-1}$
$500 = 5\cdot 100 = 5\cdot 10^{2}$	$0{,}05 = 5:100 = 5\cdot 10-2$
$5000 = 5\cdot 1000 = 5\cdot 10^{3}$	$0{,}005 = 5:1000 = 5\cdot 10^{-3}$
$50000 = 5 \cdot 10000 = 5 \cdot 10^{4}$	$0{,}0005 = 5 : 10000 = 5 \cdot 10^{-4}$
$500000 = 5 \cdot 100000 = 5 \cdot 10^{5}$	$0{,}00005 = 5 : 100000 = 5 \cdot 10^{-5}$
$5000000 = 5 \cdot 1000000 = 5 \cdot 10^{6}$	$0{,}000005 = 5 : 1000000 = 5 \cdot 10^{-6}$

Ejercicio resuelto

Imagen en Flickr de fcomsalamanca bajo CC

Expresa los siguientes números en notación científica:

a. $3.000.000$

b. $34.000.000.000$

c. $235\cdot10^{6}$

d. $0{,}000003$

e. $0{,}000000632$

f. $234{,}7\cdot10^{-10}$

Mostrar retroalimentación

a. $3\cdot10^{6}$

b. $3{,}4\cdot10^{10}$ pues detrás de la coma hay 10 cifras, el 4 y nueve ceros.

c. $2{,}35\cdot10^{8}$ pues $235\cdot10^{6}=2{,}35\cdot10^{2}\cdot10^{6}=2{,}35\cdot10^{8}$

d. $3\cdot10^{-6}$ pues desde el 3 hasta la coma hay seis cifras.

$6{,}32\cdot10^{-7}$

e. $0{,}32\cdot10^{-}$ pues entre el seis y la coma hay seis cifras.

f. $2{,}347\cdot10^{-8}$ pues $234{,}7\cdot10^{-10}=2{,}347\cdot10^{2}\cdot10^{-10}=2{,}347\cdot10^{-8}$

Comprueba lo aprendido

El diámetro del Sol es 1.400.000 km aproximadamente. Exprésalo en notación científica.

Sugerencia

- $14\cdot10^{5}$ km
- $1{,}4\cdot10^{6}$ km
- $1{,}4\cdot10^{-6}$ km

Lee la sugerencia.

¡Correcto!

Sería un sol diminuto, pues $1{,}4\cdot10^{-6}=0{,}0000014$

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

2. El radio de un protón es 2,2 · 10^{-9} m. Exprésalo con todas sus cifras.

Sugerencia

- a) 0,0000000022 m
- b) 0,000000022 m
- c) 220000000m

¡Correcto!

Te falta un cero, recuerda que desde el 2 hasta la coma tiene que haber nueve cifras.

¡Uf!, demasiado grande.

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

3. Nuestro planeta está muy mayor, tiene 4,5 · 10^{9} años. ¿Sabrías expresar con todas sus cifras la edad de la Tierra?

Sugerencia

a) 450.000.000 años.

b) 45.000.000.000 años.

c) 4.500.000.000 años.

Demasiado joven.

Demasiado viejo.

¡Correcto!

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

4. ¿Sabías que el tamaño del virus del resfriado común es 0,00000000005 m? Expresa su tamaño en notación científica.

Sugerencia

a) $5 \cdot 10^{11}$ m.

b) $5 \cdot 10^{-11}$ m.

c) $5 \cdot 10^{-10}$ m.

Nuestro planeta sería demasiado pequeño para él.

¡Correcto!

Hay que **contar las cifras** que hay desde el 5 hasta la coma, **no los ceros**.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

5. El número $0,25 \cdot 10^{-6}$ no está bien expresado en notación científica. ¿Sabrías escribirlo correctamente?

Sugerencia

a) $2,5 \cdot 10^{-7}$

b) $25 \cdot 10^{-8}$

c) $2,5 \cdot 10^{-5}$

¡Correcto!

El número no puede tener dos cifras enteras.

¡Incorrecto! Recuerda que $0,25 = 2,5 : 10 = 2,5 \cdot 10^{-1}$

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

6. El número $365{,}7 \cdot 10^8$ está bien escrito, pero su expresión no corresponde a la notación científica, transforma esta expresión para que sea notación científica.

Sugerencia

a) $3{,}657 \cdot 10^{11}$

b) $3{,}657 \cdot 10^{6}$

c) $3{,}657 \cdot 10^{10}$

¡Incorrecto!

Lee la sugerencia y recuerda las propiedades de las potencias.

¡Correcto!

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

Fotografía en Flickr de jpstanley bajoCC

¿Te imaginas que tuvieras que resolver la siguiente multiplicación?

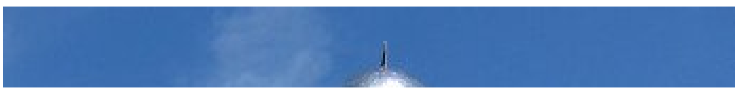
235.000.000.000.000.000.000.000 x 643.000.000.000.000.000.000.000.000

¡Te pasarías un buen rato escribiendo ceros! O si intentaras hacerla con la calculadora te darías cuenta de que no te caben todas las cifras. Vamos entonces a utilizar lo que hemos aprendido en los apartados anteriores para convertir una operación tan larga en otra mucho más sencilla, para ello basta con escribir estas cifras en notación científica:

$$(2{,}35\cdot 10^{23})\cdot(6{,}43\cdot 10^{26})$$

Imagen en Flickr de Wagner_arts bajo CC

Importante



Fotografía en Flickr de jpmm bajo CC

Vamos a explicar las operaciones a partir del ejemplo anterior:

PRODUCTO

$$(2{,}35\cdot10^{23})\cdot(6{,}43\cdot10^{26})=(2{,}35\cdot6{,}43)\cdot(10^{23}\cdot10^{26})=15{,}1105\cdot10^{49}=1{,}51105\cdot10^{50}$$

COCIENTE

$$(2{,}35\cdot10^{23}):(6{,}43\cdot10^{26})=(2{,}35:6{,}43)\cdot(10^{23}:10^{26})=0{,}36547\cdot10^{-3}=3{,}6547\cdot10^{-4}$$

SUMA Y RESTA

$$(2{,}35\cdot10^{23})+(6{,}43\cdot10^{26})=(2{,}35+6{,}43\cdot10^{3})\cdot10^{23}=(2{,}35+6430)\cdot10^{23}=6432{,}35\cdot10^{23}=6{,}43235\cdot10^{26}$$

$$(2{,}35\cdot10^{23})-(6{,}43\cdot10^{26})=(2{,}35-6{,}43\cdot10^{3})\cdot10^{23}=(2{,}35-6430)\cdot10^{23}=-6427{,}65\cdot10^{23}=-6427{,}65\cdot10^{26}$$

Para sumar y restar hay que sacar factor común de la potencia de 10 cuyo exponente (en valor absoluto) sea más pequeño.

Ejercicio resuelto

Resuelve las siguientes operaciones en notación científica y expresa el resultado en notación científica:

a. $(2{,}35 \cdot 10^{-7}) \cdot (3{,}7 \cdot 10^{12})$

b. $(5{,}4 \cdot 10^{15}) \div (6{,}25 \cdot 10^{12})$

c. $\dfrac{4{,}7 \cdot 10^{20}}{3{,}3 \cdot 10^{23}}$

d. $\dfrac{(6{,}5 \cdot 10^{-12}) \cdot (3 \cdot 10^{15})}{(5{,}4 \cdot 10^{9})}$

e. $(2{,}7 \cdot 10^{12}) + (3{,}46 \cdot 10^{9})$

f. $\dfrac{5{,}4 \cdot 10^{8} - 6{,}25 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 10^{12}}$

g. $\dfrac{6{,}1 \cdot 10^{18}}{7{,}5 \cdot 10^{7}} + 7 \cdot 10^{9}$

Mostrar retroalimentación

a. $(2{,}35 \cdot 3{,}7) \cdot (10^{-7} \cdot 10^{12}) = 8{,}695 \cdot 10^{5}$

b. $(5{,}4 \div 6{,}25) \cdot (10^{15} \div 10^{12}) = 0{,}864 \cdot 10^{3} = 8{,}64 \cdot 10^{2}$

c. $\dfrac{4{,}7}{3{,}3} \cdot \dfrac{10^{20}}{10^{23}} = 1{,}42 \cdot 10^{-3}$

d. $d) \dfrac{6{,}5 \cdot 3}{5{,}4} \cdot \dfrac{10^{-12} \cdot 10^{15}}{10^{9}} = 3{,}61 \cdot 10^{-6}$

e.
$10^{9} \cdot (2{,}7 \cdot 10^{3} + 3{,}46) = 10^{9} \cdot (2700 + 3{,}46) = 2703{,}46 \cdot 10^{9} = 2{,}70346 \cdot 10^{12}$

f.
$\dfrac{10^{8} \cdot (5{,}4 - 6{,}25 \cdot 10^{2})}{2 \cdot 10^{12}} = \dfrac{10^{8} \cdot (5{,}4 - 625)}{2 \cdot 10^{12}} = \dfrac{-619{,}6 \cdot 10^{8}}{2 \cdot 10^{12}} = -309{,}8 \cdot 10^{-4} = -3{,}098 \cdot 10^{-2}$

g.
$\frac{6{,}1}{7{,}5} \cdot \frac{10^{18}}{10^{7}} + 7 \cdot 10^{9} = 0{,}813 \cdot 10^{11} + 7 \cdot 10^{9} = 10^{9} \cdot (0{,}813 \cdot 10^{2} + 7) = (81{,}3 + 7) \cdot 10^{9} = 88{,}3 \cdot 10^{9} = 8{,}83 \cdot 10^{10}$

Comprueba lo aprendido

El resultado de la división $(3{,}5 \cdot 10^{-6}) \div (5{,}2 \cdot 10^{-10})$ expresado en notación científica es:

- $0{,}673 \cdot 10^4$
- $6{,}73 \cdot 10^3$
- $6{,}73 \cdot 10^5$

¡Incorrecto! El resultado está bien, pero la parte entera de 0,673 es un cero, por lo tanto la expresión del resultado no está expresada en notación científica.

¡Correcto!

¡Incorrecto! Recuerda que $0{,}673 = 6{,}73 \cdot 10^{-1}$ y que $10^{-1} \cdot 10^4 = 10^3$

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

Indica cuál de los siguientes resultados corresponde a esta operación:

$$\frac{(6{,}5 \cdot 10^{14}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{-10})}{1{,}25 \cdot 10^{14} - 2{,}4 \cdot 10^{13}}$$

- $1{,}35 \cdot 10^{17}$
- $1{,}35 \cdot 10^{-9}$

¡Incorrecto!

¡Correcto!

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

5.2. Uso de la calculadora

La tecla EXP

fuente propia bajo CC

Esta tecla la tenemos en la parte de abajo de la calculadora, junto a la tecla del punto decimal, y nos sirve para escribir la potencia de 10 del número en notación científica. Veamos un ejemplo para explicarnos mejor.

Supongamos que queremos escribir en la calculadora la expresión: $3{,}42 \cdot 10^5$, pues bien, en ese caso debemos teclear en la calculadora lo siguiente:

$\boxed{3.42}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{5}$ y la calculadora nos mostrará $\boxed{3.42\ ^{05}}$

Si queremos introducir la expresión: $2{,}54 \cdot 10^{-3}$; debemos hacerlo como sigue:

$\boxed{2.54}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{3}$ y la calculadora nos mostrará $\boxed{2.54\ ^{-03}}$

Esto también nos debe valer para cuando recibamos la información de la calculadora ante una operación realizada por nosotros, por ejemplo si ante una operación la calculadora nos muestra:

$\boxed{4.38\ ^{08}}$ esto quiere decir $4{,}38 \cdot 10^8$

Suma y restas con números en notación científica

Veamos ahora como podemos hacer una suma, o resta, de dos números que tenemos en notación científica con nuestra calculadora científica.
Supongamos que tenemos que hacer la suma siguiente: $3.42 \cdot 10^7 + 6{,}4 \cdot 10^7$; bastaría con tener cuidado con meter cada número entre paréntesis para poder calcular su suma. Así haremos

$\boxed{(}$ $\boxed{3.42}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{)}$ + $\boxed{(}$ $\boxed{6.4}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

y la calculadora nos mostrará la solución que es $\boxed{9.82\ ^{07}}$ que como bien sabes quiere decir: $9{,}82 \cdot 10^7$

Producto, división y raíces con números en notación científica

Exactamente igual que antes, esto es, teniendo cuidado con escribir cada número entre paréntesis, y siendo cuidadosamente ordenado, podemos introducir en la calculadora cualquier expresión con números en notación científica. Veamos como ejemplo algo complicado, con cocientes, producto y potencias. Sirva como ejemplo el siguiente problema de física, en el que se tratan cuestiones de astronomía.

Calcula la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y la Luna, cuya fórmula es $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, sabiendo los siguientes datos:

La constante de gravitacion universal $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$;

Masa de la Tierra $m_1 = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$;

Masa de la Luna $m_2 = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}$;

Distancia entre la Tierra y la Luna $r = 3{,}84 \cdot 10^{8}\ m$

Con estos datos podemos calcular F. Vamos a ver las teclas a introducir (como no estamos en física vamos a obviar las unidades para facilitar la comprensión del cálculo). En esta ocasión pondremos cada número en una sólo tecla para simplificar, y tenemos en cuenta que, en realidad G está en el numerador de la fracción, o sea, multiplicando a m_1 y a m_2:

$\boxed{(}$ $\boxed{(\ 6.67\ \text{EXP}\ (-)\ 11\ )}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{(\ 5.98\ \text{EXP}\ 24\ )}$ $\boxed{\text{X}}$
$\boxed{(\ 7.35\ \text{EXP}\ 22\ )}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(\ (\ 3.84\ \text{EXP}\ 8\ )\,\hat{}\ 2\ )}$
$\boxed{=}$

la solución que nos dará la calculadora es: $\boxed{1.988162638\ ^{20}}$, que debemos interpretar, una vez redondeado a dos decimales, como: $1{,}99 \cdot 10^{20}$

En cuanto a las raíces, veamos otro ejemplo de astronomía, la Tercera ley de Kepler, que nos dice que "el cuadrado de periodo de revolución de un planeta alrededor del Sol, es proporcional al cubo de la distancia del planeta al Sol". Esto lo podemos formular de la siguiente manera:

$$T^2 = k \cdot r^3$$

donde k es la constante de proporcionalidad que es igual para todos los planetas. En realidad,

$$T = \sqrt{k \cdot r^3}$$

Podemos ahora calcular el periodo de revolución de nuestra querida Tierra alrededor del Sol. Para ello solo necesitamos saber el valor de k y la distancia media de la Tierra al Sol:

$k = 3{,}35 \cdot 10^{18}\ \frac{\mathrm{m}^3}{s^2}$

por lo que la distancia media de la Tierra al Sol es

$r = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$

En la calculadora tecleamos:

$\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{(}$ $\boxed{(}$ $\boxed{3.35\ \text{EXP}\ 18}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{(}$
$\boxed{(\ 1.5\ \text{EXP}\ 11\ )\ \hat{}\ 3}$ $\boxed{)}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Y la calculadora nos contestará: $\boxed{1.063308516\ ^{26}}$; que tenemos que leer como: $1{,}0633 \cdot 10^{26}$ evidentemente en segundos, que al pasarlo a días nos sale aproximadamente 365 días, al pasarlo a meses la solución es 12, y en años la solución es 1 año.

<u>OBSERVACIÓN</u>: Todo lo que va dentro de la raíz debe ir entre paréntesis. Lo mismo ocurre si escribimos un numerador o un denominador que lleva varias operaciones, que debe ir todo el conjunto entre paréntesis. En general, y ante la duda, es mejor que pongamos paréntesis en cada tramo para indicar/separar bien lo que va dentro de cada operación parcial. De lo contrario, la calculadora aplicará por defecto la prioridad de las operaciones y puede que no coincida con lo que realmente queremos calcular si no aplicamos los paréntesis adecuadamente.

Ejercicio resuelto

Resuelve con la calculadora científica las siguientes operaciones. Una vez resueltas pincha en *Mostrar información* y verás si has acertado o no. La respuesta que se ofrece es la salida que muestra la calculadora:

a) $\left(3{,}65 \cdot 10^{7}\right) + \left(2{,}86 \cdot 10^{7}\right)$

Mostrar retroalimentación

6.51 07

b) $\left(4{,}82 \cdot 10^{-5}\right) - \left(9{,}23 \cdot 10^{-4}\right)$

Mostrar retroalimentación

-8.748 -04

c) $\left(2{,}15 \cdot 10^{23}\right) \cdot \left(5{,}7 \cdot 10^{11}\right)$

Mostrar retroalimentación

1.2255 35

d) $\dfrac{8{,}91 \cdot 10^{17}}{9{,}87 \cdot 10^{8}}$

Mostrar retroalimentación

9.02735 08

e) $\left(4{,}65 \cdot 10^{7}\right)^{3}$

Mostrar retroalimentación

1.00544625 23

Imagen en Wikimedia Commons de Adrignola bajo CC

Como ya has visto en apartados anteriores de este tema, el conocimiento de la ciencia ha hecho necesaria las potencias y la utilización de la notación científica. ¿Cómo podríamos escribir y operar con las distancias de las estrellas o saber la masa de una bacteria?

La utilización de esta notación se hace imprescindible en cantidades llamadas "astronómicas" o en las microcantidades.

Ahora ensayarás tus conocimientos en la realización de problemas con aplicaciones de estas cantidades.

Ejercicio resuelto

Imagen en Wikimedia Commons de Lafoudre 1523 bajo Dominio Público

1 año luz es 9.460.000.000.000 km, es decir la distancia que recorre la luz en un año (velocidad de la luz = 300.000 km/sg).

(Velocidad de la luz = 300.000 km/seg).

1 segundo luz es, por tanto, 300.000.000 m= $3 \cdot 10^8$ m.

a. Expresa 1 año luz en metros y notación científica.

b. Sabiendo que la luna esta a 1,3 seg-luz, ¿cuántos metros son?

c. El sol está a $1{,}5 \cdot 10^{11}$ metros de la tierra, ¿cuántos seg-luz son?, ¿qué significa este resultado?

d. El telescopio Hubble ha encontrado una estrella, según los científicos la más alejada de la Tierra, a 0,4 trillones de seg-luz. ¿De cuántos kilómetros estamos hablando?, ¿cuántos años tardaríamos en apreciar, de empezar a brillar ahora, la luz de esa estrella? (1 trillón es 10^{18}).

Mostrar retroalimentación

a. 1 año luz = $9{,}46 \cdot 10^{12}\ \mathrm{km} = 9{,}46 \cdot 10^{12}\ (10^3\ \mathrm{m}) = 9{,}46 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}$

b. $1{,}3\ \mathrm{seg{-}luz} = 1{,}3 \cdot (3 \cdot 10^8\ \mathrm{m}) = 3{,}9 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$

c. Como el sol dista de la Tierra $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, dividiendo entre los metros que tiene un seg-luz, obtentendriamos el resultado. Es decir, $\frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 0{,}5 \cdot 10^3$ m. Podemos decir que un rayo de sol tarda 500 seg en llegar a la Tierra.

d. 0,4 trillones son $4 \cdot 10^{17}$. Como un seg-luz es $3 \cdot 10^8$ m, tenemos que

$$4 \cdot 10^{17}\ \mathrm{seg{-}luz} = 4 \cdot 10^{17} \cdot (3 \cdot 10^8\ \mathrm{m}) = 12 \cdot 10^{17+8}\ \mathrm{m} = 1{,}2 \cdot 10^{26}\ \mathrm{m} = 1{,}2 \cdot 10^{26} \cdot \left(\frac{1}{10^3}\ \mathrm{km}\right) = 1{,}2 \cdot 10^{23}\ \mathrm{km}$$

Como un año-luz son $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km, dividiendo resulta $\frac{1{,}2 \cdot 10^{23}}{9{,}46 \cdot 10^{12}} = 0{,}127 \cdot 10^{23-12} = 1{,}27 \cdot 10^{10}$ años. ¡Imagina! 12.700.000.000 años. ¡Doce mil setecientos millones de años!

Comprueba lo aprendido

La masa, en kg, de un sello de correos es:

- 10^{10}
- 10^{-12}
- 10^{-3}

¡Incorrecto! ¡Qué pedazo de sello!

¡Incorrecto! Ni lo ve el cartero. Te devuelve la carta.

¡Correcto! 0.001 kg o lo que es lo mismo un gramo.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

La masa, en kg, de la pirámide de Keops es:

- 10^{10}
- 10^{-12}
- 10^{3}

Puede ser , correcto.

¡Incorrecto!

¡Incorrecto! ¿Solo 1000 kg? ¿Y para eso 10 años?

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

La masa, en kg, de una bacteria es:

- 10^{-3}
- 10^{-12}
- 10^{10}

¡Incorrecto! Si pesa un gramo, no puede ser una bacteria.

¡Correcto!

¡Incorrecto! ¿Una bacteria tan grande como la pirámide de Keops?, ¡qué miedo!

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

Ejercicio resuelto

En España, el papel reciclado cada año equivale a 30 millones de árboles no talados.

a. Expresa el número de árboles no talados durante un siglo en notación científica.
b. Halla la raíz cuadrada del número de árboles no talados en 30 años gracias al reciclado y expresa el resultado en notación científica

Mostrar retroalimentación

a. 30 millones es $3 \cdot 10^7$, que multiplicado por los 100 años de un siglo nos queda $3 \cdot 10^7 \cdot 10^2 = 3 \cdot 10^9$ árboles no talados.

b. $30 \cdot 3 \cdot 10^7 = 9 \cdot 10^8$ Hallar la raiz cuadrada es elevar a $\frac{1}{2}$. Por tanto $(9 \cdot 10^8)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} \cdot (10^8)^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^{\frac{8}{2}} = 3 \cdot 10^4$

Ejercicio resuelto

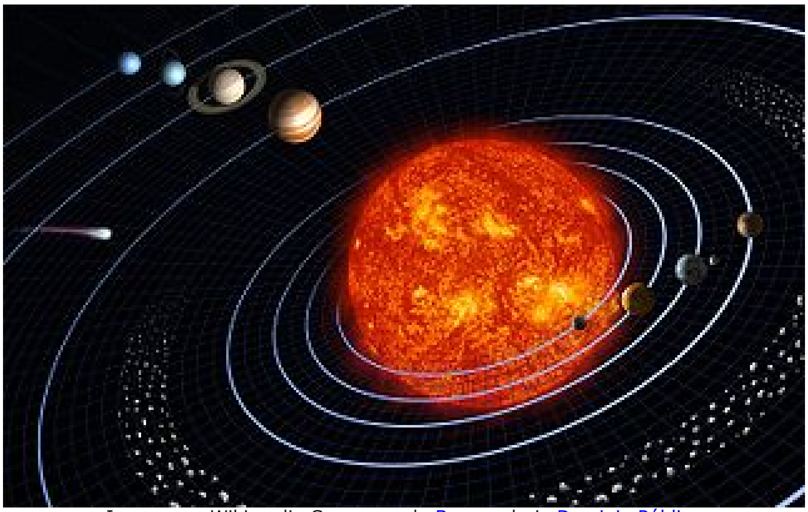


Imagen en Wikimedia Commons de Brevam bajo Dominio Público

El periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol es de un año, aproximadamente 365,25 días, y el periodo de Plutón es de 7.820.000.000 segundos.

a. Expresa en notación científica y en segundos el periodo de Plutón y la Tierra .
b. ¿Cuántos años terrestres tarda Plutón en dar una vuelta alrededor del Sol?

Mostrar retroalimentación

1. a) El periodo de Plutón es, en notación científica, de $7{,}8 \cdot 10^9$ segundos.

El periodo de la Tierra en segundos sería:

$$365{,}25 \text{ d} = 365{,}25 \cdot (24 \text{ h}) = 365{,}25 \cdot 24 \cdot (3600 \text{ s}) = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 31.557.600 \text{ s} = 3{,}15576 \cdot 10^7 \text{ s}$$

2. Cada año terrestre es el resultado en segundos del apartado anterior $3{,}15576 \cdot 10^7$. Si dividimos el periodo de Plutón entre este dato me obtendremos los años terrestres pedidos.

$$\frac{7{,}8 \cdot 10^9}{3{,}15576 \cdot 10^7} = 2{,}47 \cdot 10^{9-7} = 2{,}47 \cdot 10^2 = 247 \text{ años.}$$

Fotografía en Flickr de S@Z bajo CC

Curiosidad

Los números irracionales y la música

Un experimento curioso es asígnar a las cifras decimales de un decimal infinito una nota musical. Por ejemplo: al 1 se le asigna la nota Do, 2=Re, 3=Mi, 4=Fa-Sostenido, 5=Sol, 6=La, 7=Si, 8=Do y 9=Re, al 0 se le asigna una pausa. Si lo hacemos así, los decimales infinitos periódicos generan un melodía que se va repitiendo de forma indefinida mientras que los números irracionales generan una melodía que no se repite nunca.

En el siguiente enlace puedes encontrar más información sobre la fascinante relación entre las matemáticas y la música.

Curiosidad

¿Sabías que en música también se utilizan los intervalos?

Pues sí, en música, la distancia entre dos sonidos se conoce como intervalo musical.

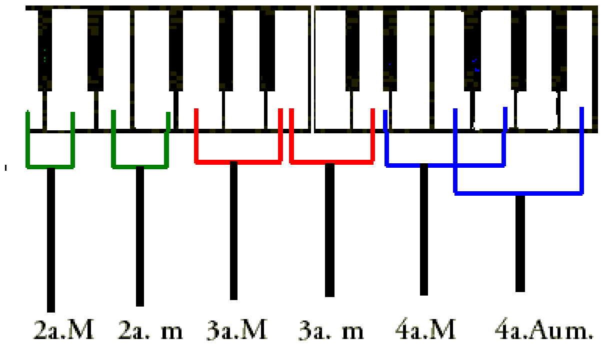
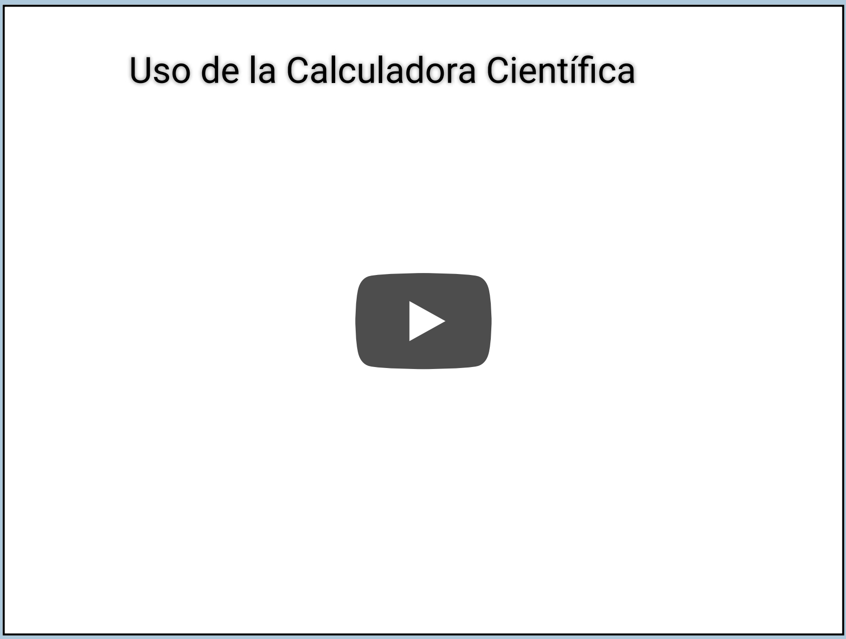


Imagen en www.gratispiano.com.ar bajo CC

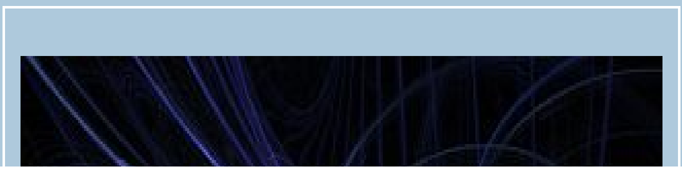
Curiosidad

Las calculadoras científicas y *online* son útiles herramientas para el aprendizaje de las matemáticas, de ahí que os animamos a utilizar estos dispositivos y aplicaciones. A continuación exponemos una relación de recursos de la red de sumo interés para aquellos que queráis ampliar conocimientos sobre este fascinante campo de las nuevas tecnologías aplicadas a las educación.



- Como usar una calculadora científica
- Manuales de calculadoras
- Web2.0calc

Curiosidad



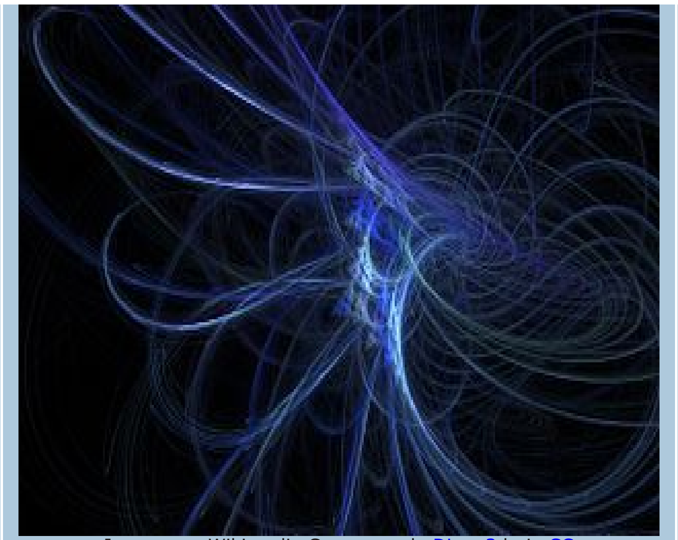


Imagen en Wikimedia Commons de Digon3 bajo CC

Las aplicaciones de cálculo símbólico y geometría dinámica *online* constituyen otro excelente recurso para el aprendizaje de las matemáticas. Las mismas tienen prestaciones superiores a las calculadoras de bolsillo y *online* y permiten realizar operaciones de matemáticas superiores, como es el resolver todo tipo de ecuaciones o sistemas de ecuaciones y la representación gráfica de todo tipo de funciones. Las dos principales herramientas de este tipo son las siguientes:

- Aplicación de cálculo simbólico Wiris/CalcMe
- Manual de ayuda de Wiris
- Aplicación de geometría dinámica Geogebra online
- Página oficial de Geogebra