INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

2º de Bachillerato

Matemáticas II

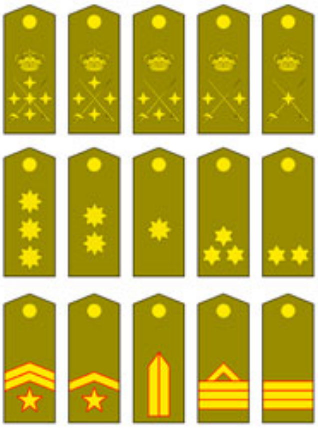
Contenidos

Álgebra lineal: Aplicaciones de las matrices. Ecuaciones matriciales

1. Rango de una matriz

Ya conoces una forma de clasificar las matrices por una característica propia, su orden. Este orden se representa nxm, donde n es el número de filas y m el número de columnas. Esta misma clasificación la podríamos utilizar en los escuadrones militares, clasificándolos según el número de filas y de columnas que tiene cada escuadrón.

Desfile militar. Imagen obtenida del banco de imágenes del ITE.



Insignias militares. Ilustración obtenida de el Economista

Pero el ejército también tiene otras formas de clasificar a sus escuadrones a través de otra característica propia de los mismos. Esta otra forma es mediante los galones más altos del militar que pertenece al escuadrón. En este caso un escuadrón podría ser de Teniente si de entre todos los militares que pertenecen al mismo el de mayor rango es un Teniente, o podría ser capitán o coronel... dependiendo del oficial de mayor rango que pertenezca a ese escuadrón

Cada uno de estos galones se identifica mediante una insignia que representa el rango militar que tiene.

En el caso de las matrices también vamos a poder identificar una característica que la identifica como si fuera un rango militar.

1.1. Definición de rango de una matriz

Ahora vamos a estudiar una característica propia de las matrices que nos va a simplificar los cálculos y operaciones que debamos hacer utilizándolas.

Retomemos el caso de la cadena de supermercados que gestiona Raimundo. En este caso podríamos estar hablando de decenas de supermercados y de cientos de productos de los que llevar la gestión en esos supermercados. Por tanto, la matriz con la que llevaría Raimundo la gestión sería enorme. Si consiguiéramos quitar algunas filas o columnas de esa matriz, estaríamos ahorrando cálculos ante el tratamiento matemático de esa matriz.

Veamos un ejemplo para que pueda ilustrar lo que estamos contando. Supongamos que la matriz de pedido de tres tipos de leche en cinco de los supermercados de los que lleva la gestión es la siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 8 & 15 & 13 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso observamos que se ha realizado un pedido de 15 del tipo de leche 2 para el supermercado 4. Pero lo que a nosotros nos interesa es lo siguiente:

1.- El pedido de leche del supermercado 4 es el mismo que la suma de los pedidos de leche del supermercado 1, del supermercado 2 y del supermercado 3. Es decir:

$$(8\ 15\ 13)=(3\ 5\ 2)+(4\ 6\ 8)+(1\ 4\ 3)\longrightarrow F_4=F_1+F_2+F_3$$

2.- El pedido de leche del supermercado 5 es el mismo que el pedido del supermercado 1, menos la mitad del pedido del supermercado 2 mas el pedido del supermercado 3. Es decir:

$$(2\ 6\ 1)=(3\ 5\ 2)-\tfrac{1}{2}(4\ 6\ 8)+(1\ 4\ 3)\longrightarrow F_5=F_1-\tfrac{1}{2}F_2+F_3$$

De esta forma, si todos los cálculos que necesitemos realizar, en lugar de hacerlos con la matriz A lo hacemos con la matriz que sólo tiene en cuenta los pedidos de leche de los supermercados 1, 2 y 3, es decir, la matriz

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

simplificaremos los cálculos enormemente. Posteriormente, para saber lo que ocurre con el supermercado 4 solamente deberemos utilizar la combinación lineal que se ha indicado en el anterior punto 1 y para saber lo que ocurre con el supermercado 5 solamente deberemos utilizar la combinación lineal que se ha indicado en el anterior punto 2.

En el caso anterior, las filas 4 y 5 son linealmente dependientes de las tres primeras, mientras que las tres primeras filas son linealmente independientes. En el caso anterior, podemos decir que el rango de A es 3 y lo expresaremos de la siguiente forma:

$$rg(A)=3$$

Además, es claro que $rg(B)=rg(A)=3$, por lo que observamos que, si a partir de una matriz cualquiera B obtenemos otra matriz C, añadiéndole a B filas o columnas que sean linealmente dependientes con las que ya tiene la matriz B, el rango de las dos matrices es el mismo, es decir $rg(B)=rg(C)$

Importante

Así, se llama ***rango*** de una matriz **A** al número de filas (o columnas) ***linealmente independientes***. Se representa por **rg (A)**. En cualquier matriz el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes. El valor máximo que puede tener el ***rango*** de una matriz es el menor de los números correspondientes al número de filas y columnas.

Pescadería. Imagen obtenida del banco de imágenes del ITE.

De la definición anterior tenemos que el rango de una matriz a lo sumo puede ser el número de filas o el número de columnas que tenga, el que sea más pequeño de los dos. Así, si una matriz es de orden 5×7, el rango de esa matriz a lo sumo puede ser 5, es decir, el rango podría ser 1, 2, 3, 4 ó 5.

Imagina en el caso de la gestión de la pescadería de los supermercados que lleva Raimundo, cómo podría ser de grande la matriz de pedidos del pescado para 15 supermercados. Inténtalo, solamente tienes que añadir a la matriz una columna por cada tipo de pescado que se venda... ¡¡Impresionante!!, por lo que quitando las filas y columnas que sean linealmente dependientes, simplificaríamos bastante los cálculos a realizar. De ahí la importancia de calcular el rango de una matriz y de obtener las filas y columnas que sean linealmente independientes.

En los siguientes puntos veremos dos formas de calcular el rango de una matriz. Ya verás que los dos son bastante sencillos.

Comprueba lo aprendido

Selecciona en cada caso la opción u opciones que consideres correctas.

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz es

- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] 3

Mostrar retroalimentación

Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Elige la matriz que tenga rango 1

- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Mostrar retroalimentación

Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ observamos que $F_2=3\cdot F_1$. Entonces se dice que:

☐ F_1 y F_2 son linealmente independientes

☐ F_1 y F_2 son linealmente dependientes

☐ F_1 y F_2 no son proporcionales

Mostrar retroalimentación

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ si le añadimos la fila $F4=F1+F2=(3\ 7\ 5\ 4\ 2)+(3\ 2\ 7\ 7\ 1)=(6\ 9\ 12\ 11\ 3)$ obteniendo la matriz $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & 12 & 11 & 3 \end{pmatrix}$

☐ En este caso tenemos que $rg(B)$ es mayor que $rg(A)$

☐ En este caso tenemos que $rg(B)$ es menor que $rg(A)$

☐ Para calcular el rango de la matriz B bastaría con calcular el rango de la matriz A

☐ En este caso tenemos que el rango de la matriz B puede que sea el mismo que el rango de la matriz A

☐ En este caso tenemos que $rg(A)=rg(B)$

☐ En este caso tenemos que $rg(B)=rg(A)+1$

Mostrar retroalimentación

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Correcto
4. Incorrecto
5. Correcto
6. Incorrecto

Si tenemos una matriz D de orden $3{\times}6$, selecciona la opción o las opciones que consideres correctas:

- [ ] El rango de la matriz D podría ser 2
- [ ] El rango de la matriz D a lo sumo podría ser 6
- [ ] El rango de la matriz D es 3
- [ ] El rango de la matriz D podría ser 1

Mostrar retroalimentación

Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Correcto

1.2. Cálculo del rango de una matriz por los menores

Vamos a comenzar ahora a utilizar una técnica para calcular el rango de una matriz. Ánimo, ya verás lo fácil que te resulta ya que vamos a basarnos en algo que ya conoces: los determinantes.

Recuerda que para calcular el determinante de una matriz utilizábamos algunos ***menores*** que componían la misma. Ahora vamos a hacer algo parecido. No debes perder de vista que, a la hora de calcular el rango de una matriz, debemos indicar el número de filas y el número de columnas (el que sea menor de los dos) que sean linealmente independientes.

Para aplicar esta técnica de cálculo del rango de una matriz lo vamos a hacer a través de un ejemplo. Sabemos que si el determinante de una matriz es cero, sus filas son linealmente dependientes y sus columnas son linealmente dependientes, por lo que vamos a intentar buscar la submatriz de mayor orden cuyo determinante sea distinto de cero y esas filas y columnas que contenga serán linealmente independientes. Observa bien el proceso.

En el siguiente vídeo puedes ver un ejemplo de como aplicar este método para hallar el rango de una matriz.

RANGO de una matriz por determinantes

Vídeo alojado en Youtube

Importante

Con esta forma de cálculo que hemos visto en el vídeo anterior, no solamente hallamos el rango de la matriz, sino que también observamos que podemos definirlo como el orden más grande de la submatriz cuadrada con determinante distinto de cero, es decir, como el mayor orden de los menores distintos de cero.

Comprueba lo aprendido

Seguimos adelante ahora con el supermercado de Raimundo. En la gestión que está realizando del mismo hemos seleccionado cuatro tablas relacionadas con la distribución de lacteos por distintos supermercados. En este caso solamente deseamos determinar el rango de esas matrices para que posteriormente nos aparezcan unos cálculos más simplificados a la hora de operar con ellas. Las matrices que hemos seleccionados son:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 13 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -5 & -7 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Con las anteriores matrices sabemos que el rango de la matriz A es ☐ , el rango de la matriz B es ☐ , el rango de la matriz C es ☐ y el rango de la matriz D es ☐

Enviar

1.3. Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss

Presentación del Método de Gauss para cálculo del rango
Vídeo alojado en Youtube

El ***método de Gauss*** para calcular el rango de la matriz consiste en transformar, mediante determinadas operaciones, la matriz dada en otra que sea triangular superior. Así intentaremos que el elemento $\mathbf{a_{11}}$ sea distinto de cero, pero todos los de la primera columna que están por debajo sean ceros; el elemento $\mathbf{a_{22}}$ también tiene que ser distinto de cero y nulos todos los situados debajo en la misma columna; el elemento $\mathbf{a_{33}}$ tiene que ser distinto de cero pero todos los elementos de la tercera columna situados por debajo tiene que ser ceros; y así sucesivamente. Durante el proceso se eliminarán las filas o columnas con todos sus elementos nulos. El rango de la matriz será el número de filas con algún elemento distinto de cero.

Las operaciones que se pueden realizar en una matriz sin que varíe su rango son:

a) Permutar dos filas o dos columnas.

b) Multiplicar o dividir todos los elementos de una fila o columna por un número real distinto de cero.

c) Sumarle a una fila (o columna) otra paralela a ella.

d) Sumarle a una fila (o columna) otra paralela a ella multiplicada por un número.

e) Suprimir las filas o columnas cuyos elementos sean todos nulos.

f) Suprimir una fila (o columna) proporcional a otra.

En el caso más sencillo de que la matriz sólo tenga dos filas (o dos columnas), será suficiente comprobar si dichas filas (o columnas) son proporcionales. Si son proporcionales el rango es 1 y si no lo son el rango es 2.

En el siguiente ejemplo vamos a ver cómo aplicamos el método de Gauss para calcular el rango de una matriz:

Ejercicio resuelto

Una empresa nacional de transporte de mercancías envía camiones desde Madrid a distintos puntos de la geografía española a lo largo de la semana. Nos hemos fijado en varias

española a lo largo de la semana. Nos hemos fijado en varias de esas localidades: Sevilla, Valladolid, Barcelona, Bilbao y Badajoz y hemos recogido en una tabla el número de camiones que envía a cada una de ellas durante la semana, obteniendo la siguiente tabla:

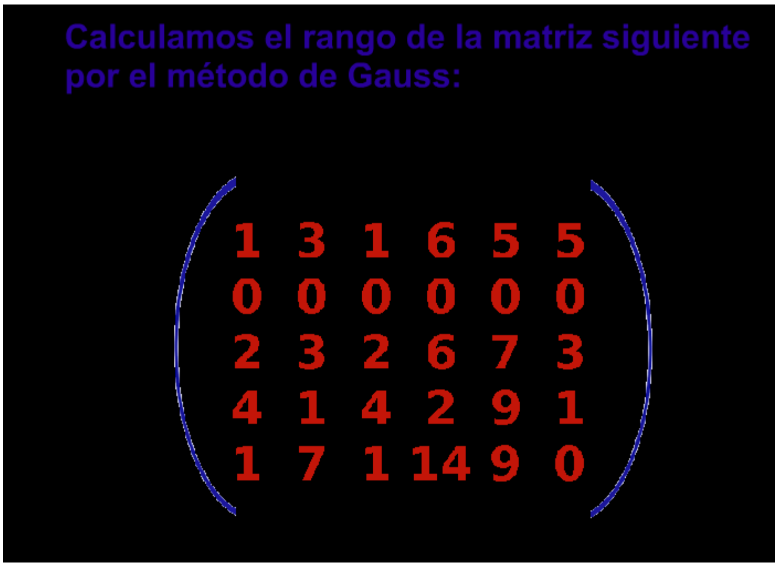
Carga de camiones. Imagen obtenida del banco de imágenes del ITE.

	Lunes	Martes	Miercoles	Jueves	Viernes	Sabado
Sevilla	1	3	1	6	5	5
Valladolid	0	0	0	0	0	0
Barcelona	2	3	2	6	7	3
Bilbao	4	1	4	2	9	1
Badajoz	1	7	1	14	9	0

Como podemos observar, la matriz que nos resulta es de orden 5x6, por lo que vamos a calcular el rango de dicha matriz pero esta vez utilizando el método de Gauss:

Mostrar retroalimentación

Mira la siguiente presentación:



Diapositiva 1

Presentación alojada en Google Slides

Al aplicar el método de Gauss, cada vez que sustituyas una fila cualquiera F por una combinación lineal de filas de la matriz, en esa combinación lineal de filas debe aparecer la fila sustituida.

Una vez que has visto en el ejercicio anterior la resolución mediante Gauss, practica un poco en los siguientes:

Selecciona el tipo de números con el que quieres trabajar y pulsa sobre el botón "Generar matriz". Cada vez que pulses sobre este botón aparecerá una matriz nueva de la que tendrás que calcular el rango utilizando el método de Gauss.

EjerMatrik - **Rango**

Generar matriz

Escoge opción:

- **Naturales**
- **Enteros**

- Toma un *pivote* en la diagonal principal
- Opera fila pivote con *cada* fila inferior a ella
- Para ello utiliza el **m.c.m**. de *pivote* y elemento
- Y conseguirás ceros debajo de cada *pivote*

$$\begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Pivote = a11

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para obtener un 0 en a21 hacemos que

☐ · **F1** ☐ · F2 ---> F2 ¿Bien?

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \square & \square & \square \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

¿Bien?

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Para obtener un 0 en a31 hacemos que

☐ · **F1** ☐ · F3 ---> F3 ¿Bien?

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

¿Bien?

Pivote = a22

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Para obtener un 0 en a31 hacemos que

☐ · **F2** ☐ · F3 ---> F3 ¿Bien?

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

¿Bien?

Observa el número de filas, o columnas, *no nulas* que tiene la matriz triangulada. ¿Cuál es su rango? ☐ ¿Bien?

Ejercicio tomado de la página de Álgebra matricial, de Cristina Díaz y Luis Vaamonde.

Para saber más

Para seguir profundizando, en el siguiente enlace encontrarás más ejercicios con los que seguir practicando el cálculo del rango de una matriz. selecciona el tipo de número que deseas utilizar, las dimensiones de la matriz y cada vez que pulses en

utilizar, las dimensiones de la matriz y, cada vez que pulses en el botón "Generar matriz" aparecerá una matriz nueva. Cuando hayas calculado el rango, podrás comprobar una forma de hacerlo por el método de Gauss. Ánimo y prueba con matrices de distintas dimensiones.

Investigando. Imagen obtenida del banco de imágenes del ITE.

2. Inversa de una matriz

Despegue de un cohete espacial. Imagen obtenida del banco de imágenes del ITE.

¿Estás preparado o preparada para girar? Pues comenzamos...

Siempre que se tienen los medios para realizar una determinada operación, ya sea de tipo quirúrgico, biológico, químico, matemático, etc. una de las primeras investigaciones que se realiza tiene el objetivo de encontrar el proceso inverso de forma que la vuelva a la situación de partida sea posible.

En nuestro caso, en el estudio de las matrices que nos ocupa, si a una matriz A le sumo una matriz B, obtengo una nueva matriz A+B ¿Qué matriz debemos sumarle para que me vuelva a resultar la matriz inicial A que tenía? en este caso es sencillo ya que basta sumar la opuesta de B (A+B)+(-B) = A

Por ejemplo: si tenemos $A=\begin{pmatrix} 8 & 9 & -1 & 7 & 6 \\ 5 & -7 & 4 & 10 & 1 \\ 6 & -4 & -8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

del valor $B=\begin{pmatrix} 6 & -4 & -8 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & -2 & -8 & 5 \\ 2 & -1 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow -B=(-1)^{*}B=\begin{pmatrix} -6 & 4 & 8 & 0 & -3 \\ -5 & -6 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 1 & 6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

Investigando. Imagen obtenida del banco de imágenes del ITE.

$$A+B=\begin{pmatrix} 14 & 5 & -9 & 7 & 9 \\ 10 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & -5 & -14 & 7 & 11 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$(A+B)+(-B)=\begin{pmatrix} 8 & 9 & -1 & 7 & 6 \\ 5 & -7 & 4 & 10 & 1 \\ 6 & -4 & -8 & 0 & 3 \end{pmatrix}=A$$

Pero, ¿qué hacemos en el caso del producto?

Investiguemos.

2.1. Inverso de un número

Vamos a comenzar por un caso simple del que ya conocemos como funciona.

Si elegimos un número cualquiera, nos encontramos con una caso especial de una matriz cuadrada de orden 1. En este caso vamos a practicar con la matriz

$$A=(6)$$

Imagen del ITE.

Buscamos una matriz B, de forma que al multiplicarla por la matriz A, nos resulte la matriz identidad, en este caso de orden 1, es decir:

$$A{\cdot}B=B{\cdot}A=I\rightarrow(6){\cdot}B=B{\cdot}(6)=(1)$$

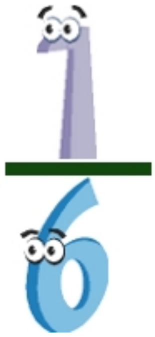


Imagen del ITE

En este caso sabemos que $B=\left(\frac{1}{6}\right)$

Según lo que conoces de la parte de números, sabes que a B se le denomina el inverso de A y que se representa como

A^{-1} es decir $A^{-1}=\left(\frac{1}{6}\right)$

Por tanto, para el caso de los números y el producto de números es fácil encontrar el inverso ya que el inverso de un número n es $\frac{1}{n}$. Pero esto es así siempre que el número n sea distinto de cero. El cero es el único número que no tiene inverso.

Comprueba lo aprendido

Marca las respuestas correctas.

Dado un número cualquiera k

- [ ] El inverso es $\frac{1}{k}$ siempre
- [ ] Al multiplicar k por su inverso el resultado siempre es 1.
- [ ] Al multiplicar el inverso de k por el número k el resultado siempre es 1
- [ ] El número 0 no tiene inverso.
- [ ] El inverso de cero es cero
- [ ] El inverso del inverso de k es el mismo número k .

Mostrar retroalimentación

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Correcto
4. Correcto
5. Incorrecto
6. Correcto

Observa los precios de tres prendas de vestir que hemos seleccionado en unos almacenes:

El precio de cada prenda varía si es el precio normal, el precio en rebajas o el precio super-rebajado. Así observamos un cuadro de precios como el que sigue:

Imágenes de elaboración propia

$$\begin{array}{lccc} & Chaleco & Camisa & Pantalones \\ Normal & 12 & 22 & 35 \\ Rebajas & 11 & 15 & 30 \\ Super-rebajas & 8 & 14 & 25 \end{array} \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 12 & 22 & 35 \\ 11 & 15 & 30 \\ 8 & 14 & 25 \end{pmatrix}$$

Si en el centro comercial las ventas de cada una de las prendas en cada uno de los trimestres fueron las que se recogen en el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{lcccc} & Trimestre1 & Trimestre2 & Trimestre3 & Trimestre4 \\ Chalecos & 10 & 12 & 15 & 10 \\ Camisas & 4 & 15 & 12 & 4 \\ Pantalones & 9 & 10 & 0 & 4 \end{array} \Longrightarrow B=\begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 & 10 \\ 4 & 15 & 12 & 4 \\ 9 & 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Para conocer la cantidad de dinero que ganaríamos en cada trimestre dependiendo de si ese trimestre los precios son los normales, es un trimestre de rebajas o es un trimestre de super-rebajas, solamente necesitaríamos multiplicar la primera matriz por la segunda:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 12 & 22 & 35 \\ 11 & 15 & 30 \\ 8 & 14 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 & 10 \\ 4 & 15 & 12 & 4 \\ 9 & 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 523 & 824 & 444 & 348 \\ 440 & 657 & 345 & 290 \\ 361 & 556 & 288 & 236 \end{pmatrix}=M$$

Según lo anterior, tendríamos que la cantidad de dinero ganada por trimestre dependiendo de si ese trimestre era normal, de rebajas o de super-rebajas es:

$$\begin{array}{lcccc} & Trimestre1 & Trimestre2 & Trimestre3 & Trimestre4 \\ Normal & 523 & 824 & 444 & 348 \\ Rebajas & 440 & 657 & 345 & 290 \\ Super-rebajas & 361 & 556 & 288 & 236 \end{array}$$

De esta forma, si el centro comercial hubiera estado de rebajas el segundo trimestre habría ganado 657€ con la venta de chalecos, camisas y pantalones.

Imagen del ITE.

En este caso conocíamos la matriz de precios A y la matriz de ventas por trimestre B y hemos podido calcular con una simple operación la matriz de ganacias M. Pero, ¿cómo podríamos calcular la matriz B si conociéramos la matriz A y la matriz M? Para responder a esta pregunta, imagina que tuviéramos una matriz F de forma que al multiplicar F por A resultara la matriz identidad. En ese caso tendríamos:

$$A\cdot B=M\rightarrow F\cdot A\cdot B=F\cdot M\rightarrow$$
$$\rightarrow I\cdot B=F\cdot M\rightarrow B=F\cdot M$$

Si tuviésemos la matriz F ya lo tendríamos solucionado.

Importante

Dada una matriz cualquiera A llamamos **inversa** de A a otra matriz que denotaremos A^{-1} que cumpla que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

donde I es la matriz identidad.

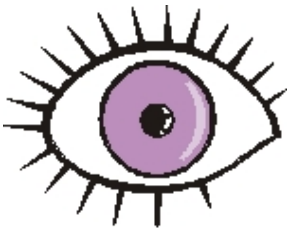


Imagen del ITE

De la igualdad anterior podemos deducir que si la matriz A tiene orden $n \times m$ y la matriz A^{-1} tiene de orden $p \times q$:

1.- Como debemos multiplicar A por A^{-1} entonces $m = p$.

2.- Como debemos multiplicar A^{-1} por A entonces $q = n$.

3.- Como el resultado de ambos productos debe ser la matriz identidad que es una matriz cuadrada entonces $m = p = n = q$, por tanto , para que una matriz tenga matriz inversa, debe ser una matriz cuadrada

4.- Como el determinante de un producto de matrices es igual que el producto de los determinantes de ambas matrices entonces, el determinante de la matriz A no puedes ser cero ya que el determinante de la matriz identidad es 1.

Comprueba lo aprendido

Comprueba ahora lo que has aprendido marcando las opciones que sean correctas.

Dada una matriz A sabemos que:

- [ ] 1.- Para que tenga inversa debe ser cuadrada.
- [ ] 2.- Si tiene orden 3x2, la matriz inversa tiene orden 2x3
- [ ] 3.- El determinante de la matriz debe ser distinto de cero.
- [ ] 4.- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$

Mostrar retroalimentación

Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto
4. Correcto

Importante

Dada una matriz A , la fórmula por la que podemos calcular la inversa de la matriz, si tiene determinante distinto de cero, es:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

Es decir, la inversa de una matriz es igual a la matriz traspuesta de su adjunta multiplicada por el inverso del determinante

Ejercicio resuelto

Vamos a calcular la matriz inversa de

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Para ello vamos a aplicar la fórmula que nos han indicado anteriormente:

Mostrar retroalimentación

Para calcular el determinante de la matriz A lo podemos hacer desarrollando por adjuntos por cualquiera de las filas o columnas.

Calculamos todos los menores para calcular la matriz adjunta

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ $A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}=28$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ $A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}=-16$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ $A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=8$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ $A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}=0$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ $A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}=9$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ $A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-4 \qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4$$

De esta forma tenemos que:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} 28 & -16 & 8 \\ 0 & 9 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Así:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)^t=\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 28 & 0 & -4 \\ -16 & 9 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{28}{36} & \frac{0}{36} & \frac{-4}{36} \\ \frac{-16}{36} & \frac{9}{36} & \frac{1}{36} \\ \frac{8}{36} & \frac{0}{36} & \frac{4}{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Reflexiona

Comprueba que en el ejercicio anterior, al multiplicar A por A^{-1} resulta lo mismo que multiplicar A^{-1} por A y el resultado es la matriz identidad

Mostrar retroalimentación

Recuerda bien como se multplicaban dos matrices:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{7}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{9}+\frac{2}{9} & 0 & -\frac{1}{9}+\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9}-\frac{16}{9}+\frac{2}{9} & \frac{4}{4} & -\frac{2}{9}+\frac{4}{36}+\frac{1}{9} \\ -\frac{14}{9}+\frac{14}{9} & 0 & \frac{2}{9}+\frac{7}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} \frac{7}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{9}+\frac{2}{9} & 0 & \frac{7}{9}-\frac{7}{9} \\ -\frac{4}{9}+\frac{2}{4}-\frac{2}{36} & \frac{4}{4} & -\frac{4}{9}+\frac{1}{4}+\frac{7}{36} \\ \frac{2}{9}-\frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9}+\frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Practica ahora lo que has aprendido.

1.- Introduce la matriz A de la que quieras calcular su matriz inversa

2.- Recuerda que ahora debes calcular el determinante de la matriz que has introducido ya que solamente se puede calcular la matriz inversa si el determinante es distinto de cero. Cuando lo hayas calculado pulsa sobre el botón Det(A) para comprobar que lo has hecho bien

3.- Ahora debes calcular la matriz adjunta de la matriz A. Cuando lo hayas hecho, pulsa sobre el botón Adj(A) y comprueba si la has calculado bien.

4.- Con los datos que tienes, puedes calcular la matriz inversa. una vez que la hayas calculado, pulsa sobre el botón Inv(A) y comprueba si te ha salido correctamente:

Matriz **A** :	Adjunta de A :	Inversa de A :
Borrar A		

Operaciones de paso:		**Determinante:**
	Adj(A)	Det(A)
	Inv(A)	

Curiosidad

Si deseas utilizar las herramietas que te proporcionamos en el "Practica ahora" pero con una matriz de orden 2, por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

introduce la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y observa dónde aparece la inversa de A

Para saber más

Una matriz A diremos que es una **matriz ortogonal** si al multiplicarla por su traspuesta resulta la matriz identidad, es decir:

$$A \cdot A^t = I$$

De lo que se deduce que si A es una matriz cuadrada, A^t sería la matriz inversa.

Comprueba que la matriz siguiente es ortogonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4. Cálculo de la inversa de una matriz por el método de Gauss

Presentación del Método de Gauss para calcular la inversa de una matriz

Vídeo alojado en Youtube

Vamos a utilizar ahora el método de triangularización de Gauss para conseguir la matriz inversa. Este método consiste en realizar transformaciones lineales en una matriz cuadrada A con determinante distinto de cero, de forma que consigamos obtener la matriz identidad. Estas mismas transformaciones se las aplicaremos a la vez a la matriz identidad correspondiente de forma que al finalizar el proceso, lo que inicialmente era la matriz identidad se transforma en A^{-1} .

Para que lo veas mejor lo vamos a hacer con un ejemplo.

Ejercicio resuelto

Vamos a calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Para calcular la matriz inversa vamos a aplicar el método de Gauss. Recuerda que ya hemos utilizado el método de Gauss para calcular el rango de una matriz. Las operaciones que se pueden realizar en una matriz sin que varíe su rango son:

a) Permutar dos filas o dos columnas.

b) Multiplicar o dividir todos los elementos de una fila o columna por un número real distinto de cero.

c) Sumarle a una fila (o columna) otra paralela a ella.

d) Sumarle a una fila (o columna) otra paralela a ella multiplicada por un número.

e) Suprimir las líneas (filas o columnas) cuyos elementos sean todos nulos.

f) Suprimir una fila (o columna) proporcional a otra.

En este caso, las opciones e) y f) no vamos a necesitar realizarlas ya que para que una matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

Mostrar retroalimentación

Ahora lo aplicamos paso a paso. Mira el siguiente vídeo y apréndete el truco que viene al final:

Matriz INVERSA por el método de GAUSS

Vídeo alojado en Youtube

Reflexiona

Comprueba que en el ejercicio anterior, al multiplicar A por A^{-1} es lo mismo que multiplicar A^{-1} por A y el resultado es la matriz identidad

Mostrar retroalimentación

Recuerda bien como se multplicaban dos matrices:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}3&5\\4&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-5/4\\-1&3/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2-5\cdot 1&-15/4+15/4\\4\cdot 2-8\cdot 1&-20/4+24/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -5/4 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - {}^{5 \cdot 4}/_{4} & 2 \cdot 5 - {}^{5 \cdot 8}/_{4} \\ -1 \cdot 3 + {}^{3 \cdot 4}/_{4} & -1 \cdot 5 + {}^{3 \cdot 8}/_{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Te proponemos una actividad con ejercicios guiados. Cada vez que pulses sobre el botón "Generar (A|10)" aparecerá una matriz nueva para calcular la inversa. Escribe la trasformación lineal que consideres (ojo, sólo te aceptará la más sencilla) y pulsa sobre el botón **"¿Bien?"** para verificar si lo has hecho bien. Posteriormente escribe el resultado de hacer la trasformación correspondiente. Ánimo que, como has podido ver, es cuestión de multiplicar y sumar...

EjerMatrik
Inversa

Generar (A|10)

Escoge opción:
- **Naturales**
- **Enteros**

- Forma la "matriz" (A | 10)
- *Triangula* tomando como pivote a11
- *Retriangula* tomando como pivote a22
- Haz *unos* en la diagona principal
- "Extrae" la matriz A^{-1} de la (10 | A^{-1})

$\left(\begin{array}{cc|cc} x & x & 1 & 0 \\ x & x & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & x & x \end{array}\right)$

1. Triangulamos

Pivote = a11

$\left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ \square & \square & \square & \square \end{array}\right)$ ¿Bien?

Obtener **0** en a21 ☐ · **F1** ☐ · F2 ---> F2 ¿Bien?

2. Retriangulamos

Pivote = a22

$\left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|cc} \square & \square & \square & \square \\ * & * & * & * \end{array}\right)$ ¿Bien?

Obtener **0** en a12 ☐ · **F2** ☐ · F1 ---> F1 ¿Bien?

3. Hacemos unos en la diagonal principal

$\left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|cc} \square & \square & \square & \square \\ * & * & * & * \end{array}\right)$ ¿Bien?

Obtener **1** en a11 ☐ · F1 ---> F1 ¿Bien?

$\left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ \square & \square & \square & \square \end{array}\right)$ ¿Bien?

Obtener **1** en a22 ☐ · F2 ---> F2 ¿Bien?

Luego la inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$

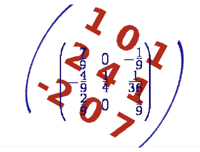
Applet alojado en el ntic.educacion.es

Para saber más

Para seguir profundizando, en el siguiente enlace encontrarás más ejercicios con los que seguir practicando el cálculo de la inversa de una matriz. Selecciona el tipo de número que deseas utilizar, las dimensiones de la matriz y, cada vez que pulses en el botón "Generar matriz" aparecerá una matriz nueva.

Imagen del ITE

3. Ecuaciones matriciales



Ahora ya conoces la forma de marear algunas matrices, ya que hay otras que no se dejan por mucho que lo intentes. Te hemos mostrado dos métodos para marearlas, pero recuerda que debes marearlas a ellas sin marearte tú y, para ello, debes tener claro los conceptos que estás utilizando, cuándo puedes utilizarlos y cómo debes utilizarlos. Para aclararte un poco todo esto nos encontramos ahora aquí.

Importante

Si A es una matriz cuadrada nxn cuya inversa es A^{-1} y si X es una matriz incógnita y B una matriz conocida, ambas con n filas, entonces la solución de la **ecuación matricial**

AX=B

viene dada por

$$X = A^{-1}B$$

Al resultado anterior se llega de la siguiente forma

$$AX = B$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B; \quad A^{-1}A = I = matriz\ unidad$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}\ B$$

Comprueba lo aprendido

Ahora te proponemos un ejercicio más directo en el que observes que podemos resolver ecuaciones con matrices. En este caso la ecuación matricial que te proponemos es la siguiente:

$A \cdot X = B$

Donde las matrices que aparecen son: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

En este caso, la matriz X es

Enviar

Inténtalo multiplicando ambos lados de la ecuación por la parte izquierda por la matriz A^{-1}

En los siguientes videos puedes ver ejemplos de resolución de ecuaciones matriciales.

Cómo despejar ecuaciones matriciales
Vídeo alojado en Youtube

Ecuación matricial 01
Vídeo alojado en Youtube

Ecuación matricial 02
Vídeo alojado en Youtube

Ecuación matricial 03
Vídeo alojado en Youtube

Ejercicio resuelto

Una empresa de cacao importa este alimento desde dos zonas situadas cerca de la frontera de Colombia llamadas Cimborazo y Cotopaxi. Durante los tres primeros meses del año, por cada saco que exportaba de la primera zona pensaban pagar 2 euros y por cada saco de la segunda pagaba 3 euros.

Pero ahora llega una época de crisis y han decidido pagar 1 euro por cada saco venga de la zona que venga. El administrador de la empresa ha estado echando cuentas y ha obtenido una tabla en la que recoge el dinero que deberían haber pagado si hubieran mantenido el precio incial y el dinero que realmente van a pagar cada uno de los meses:

	Con precio inicial	Con precio final
Enero	97	38
Febrero	54	22
Marzo	138	53

Imagen obtenida del ITE.

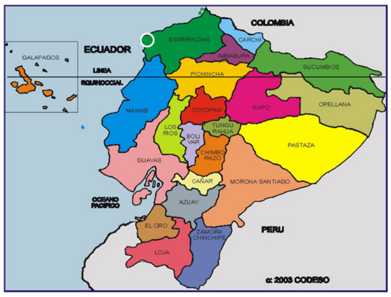


Imagen del ITE

Un segundo administrador se pregunta ¿Cuánto deberían haber pagado cada mes si hubiesen pagado 1 euro por cada saco proveniente de Cimborazo y 2 por cada saco proveniente de Cotopaxi? Evidentemente, para calcular esto, deberá conocer primeramente el número de sacos que ha comprado la empresa en cada una de las zonas. A ver si puedes echarle una mano.

Mostrar retroalimentación

Calculemos primero la matriz de precios P

$$\left|\begin{array}{lcc} & \text{Precio inicial} & \text{Precio final} \\ \text{Cimborazo} & 2 & 1 \\ \text{Cotopaxi} & 3 & 1 \end{array}\right| \Longrightarrow P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la matriz de dinero que se hubiera pagado cada mes y dinero que se va a pagar es:

$$\left|\begin{array}{lcc} & \text{Con precio inicial} & \text{Con precio final} \\ \text{Enero} & 97 & 38 \\ \text{Febrero} & 54 & 22 \\ \text{Marzo} & 138 & 53 \end{array}\right| \Longrightarrow C=\begin{pmatrix} 97 & 38 \\ 54 & 22 \\ 138 & 53 \end{pmatrix}$$

Ahora nos proponemos calcular una matriz A que tenga la forma

$$\left|\begin{array}{lcc} & \text{Sacos comprados en Cimborazo} & \text{Sacos comprados en Cotopaxi} \\ \text{Enero} & a_{11} & a_{12} \\ \text{Febrero} & a_{21} & a_{22} \\ \text{Marzo} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\rightarrow| \Longrightarrow X=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

De esta forma sabemos que $X \cdot P = C$

Observamos que la matriz P tiene determinante distinto de cero, por lo que podemos utilizar su matriz inversa (que existe) por lo que si multiplicamos a ambos lados de la igualdad por la matriz inversa de P, podremos despejar la X. Lo hacemos por la parte derecha ya que recuerda que en el producto de matrices el orden de los factores es único.

$X \cdot P \cdot P^{-1} = C \cdot P^{-1}$ por tanto, como el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad $X \cdot I = C \cdot P^{-1}$

Y como el producto de una matriz por la matriz identidad es la misma matriz, tenemos que

$X = C \cdot P^{-1}$

Por tanto, ya tenemos la forma de calcular la matriz X que necesitamos.

Comprueba lo aprendido

Escribe ahora la matriz X solución del ejercicio anterior y escribe debajo la matriz de lo que hubieran pagado cada mes según los cálculos del segundo administrador

1.- La matriz X es:

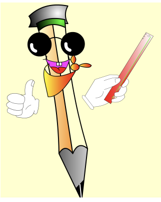
2.- Lo que hubieran pagado cada mes según los precios del segundo administrador sería

Enero:

Febrero:

Marzo:

Enviar



Ahora te proponemos unas serie de ejercicios aparecidos en selectividad relacionados con la matriz inversa o el rango de matrices de cara a que te sirvan de preparación de esta prueba. Recuerda que, como te hemos indicado en los temas anteriores, estos ejercicios no forman parte de tu formación a distancia sobre este tema, sino para profundizar por si fuera de tu interés preparar la selectividad. Aunque recuerda que los procesos de resolución son los mismos que utilizas en los ejercicios que debes hacer, por lo que quizás te sirvan de práctica.

Ejercicio resuelto

Sea A una matriz cuadrada que cumple que $A^2 = A + I$ donde I es la matriz identidad. Demuestra que la matriz A tiene inversa

Mostrar retroalimentación

Para que la matriz A tenga inversa debe cumplir dos cosas: que sea una matriz cuadrada y que su determinante sea distinto de cero. Vamos a intentar encontrar la inversa de la matriz A. Para ello vamos a partir de la propiedad que nos indican:

$$A^2 = A + I \Longrightarrow A^2 - A = I \Longrightarrow A(A - I) = I$$

Así, por las propiedades de los determinantes tenemos

$$\left|A(A-I)\right| = |I| = 1 \Longrightarrow |A| \cdot \left|(A-I)\right| = 1$$

Como el producto es uno, ninguno de los dos determinantes puede se cero, por lo que el determinante de A es distinto de cero.

De lo anterior deducimos que la matriz A tiene inversa.

Es más, $B = A - I$ podría ser la inversa de la matriz A, pero aún no lo sabemos, nos quedaría probar que $(A-I)A = I$. Comprobémoslo:

$$(A-I)A = A^2 - A = (A-I) + A = A + I - A = I$$

Ejercicio resuelto

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Calcula una matriz X de forma que $XAX^{-1}=B$.

Mostrar retroalimentación

Vamos a resolverlo en dos partes. Observa la primera y mira si después sabes continuar.

Selectividad (Parte 1)

Vídeo alojado en Youtube

Selectividad (Parte 2)

Vídeo alojado en Youtube

Comprueba lo aprendido

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula una matriz X de forma que $A^2 X = A$

La matriz A^2 es

2 3

y la matriz X es

Enviar

Para saber más

Aquí os presentamos un video donde se muestra los pasos a dar para la obtención de la inversa de una matriz.

Inversa de una matriz 3x3 (Fórmula)

Vídeo alojado en Youtube

Ejercicio resuelto

Calcula dos números naturales a y b menores que 10 de forma que la matriz A tenga rango 2, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Mostrar retroalimentación

El elemento $a_{11} = 2$ que no es cero, por lo que el rango de A al menos es 1.

También observamos que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

por lo que el rango de A al menos es 2. Para que sea exactamente 2, todos los menores de orden 3 que obtengamos pivotando sobre el anterior deben ser cero. Pero el único menor que existe de orden 3 es la propia matriz A, por lo que debe cumplirse que:

$$|2\ 2\ b|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 0$$

Así que desarrollamos

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 10b + 6a - 15b - 2a = -5b + 4a$$

Luego, para que el determinante sea cero tenemos que

$$-5b + 4a = 0 \Longrightarrow 4a = 5b \Longrightarrow a = \frac{5b}{4}$$

Dado que a y b tienen que ser números naturales, b debería ser múltiplo de 4, es decir, los valores de b podrían ser 4, 8, 12, 16... (Ojo, el cero no sirve ya que no es un número natural).

Pero además, a y b deben ser menores de 10, por lo que b sólo podría tomar los valores 4 y 8. Pero si toma el valor 8, el valor de a es 10 que no es menor que 10.

Por tanto, para que el detreminante de la matriz A sean igual a cero se debe cumplir que $b = 4$ y, por tanto $a = 5$. Con estos valores, el rango de la matriz A es 2.

Ejercicio resuelto

Calcula el rango de la matriz A en función del parámentro $\lambda \in \Re$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mostrar retroalimentación

Mira el siguiente vídeo:

Selectividad Castilla- La Mancha

Selectividad Castilla - La Mancha

Vídeo alojado en Youtube

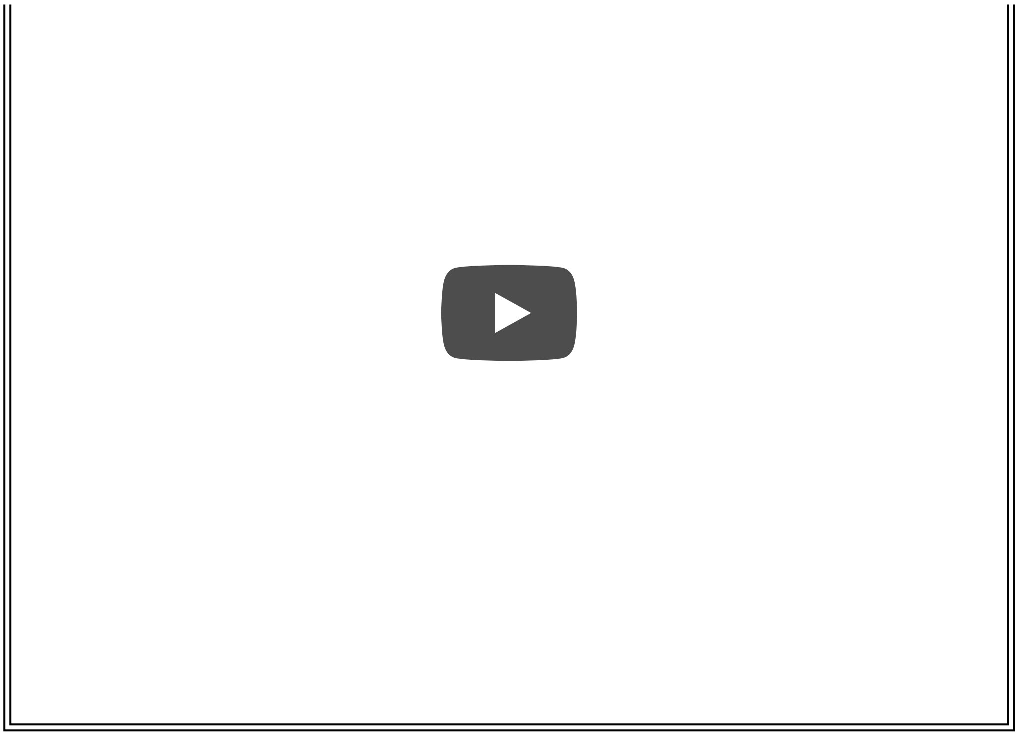
Ejercicio resuelto

Estudia el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

Mostrar retroalimentación

La solución de este ejercicio la vamos a obtener en dos pasos. Inténtalo tu primero...

Selectividad 2007



Selectividad (Parte 1)

Vídeo alojado en Youtube

Selectividad (Parte 2)

Vídeo alojado en Youtube

Comprueba lo aprendido

Determina el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro b

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & b \\ b & b-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $b=\frac{1}{2}$ el rango es ☐

Si $b=$ ☐ el rango es ☐ .

En caso contrario el rango es ☐

Enviar

Para saber más

En el enlace a la siguiente página puedes encontrar videos en donde se muestra la resolución de ejercicios sobre matrices.

Cálculo matricial

En concreto puedes fijarte en los siguientes ejercicios y explicaciones que aparecen en el enlace de arriba:

07. Suma de matrices equidimensionales.

08. Producto de un escalar por una matriz.

10. Producto de matrices.

11. Traspuesta de una matriz

15. Transformaciones elementales.

16. Determinante de una matriz cuadrada

17. Menor complementario. Cofactor o adjunto.

18. Desarrollo de los determinantes por los elementos de una línea.

20. Matriz adjunta de una matriz cuadrada.

21. Matriz inversa de una matriz cuadrada.

22. Submatrices y menores de una matriz.

23. Rango de una matriz.

25. Cálculo del rango.

Importante

Así, se llama ***rango*** de una matriz **A** al número de filas (o columnas) ***linealmente independientes***. Se representa por **rg (A)**. En cualquier matriz el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes. El valor máximo que puede tener el ***rango*** de una matriz es el menor de los números correspondientes al número de filas y columnas.

De la definición anterior tenemos que el rango de una matriz a lo sumo puede ser el número de filas o el número de columnas que tenga, el que sea más pequeño de los dos. Así, si una matriz es de orden $5{\times}7$, el rango de esa matriz a lo sumo puede ser 5, es decir, el rango podría ser 1, 2, 3, 4 ó 5.

Importante

Dada una matriz cualquiera A llamamos **inversa** de A a otra matriz que denotaremos A^{-1} que cumpla que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

donde I es la matriz identidad.

INVERSA DE MATRICES

Definición
Métodos
Aplicaciones

DEFINICIÓN

Dada una matriz A, ¿Podremos encontrar otra matriz B tal que A·B=B·A=I?

Esta matriz B existe aunque no siempre, de existir se le llama matriz inversa de A y se nota A-1. Para que exista la inversa de A, ésta tiene que ser cuadrada pues de lo contrario no se podría hacer el producto por la izquierda y por la derecha, luego cuando hablamos de matrices invertibles estamos hablando de matrices cuadradas.

Se dice que una matriz cuadrada A es inversible, si existe una matriz B con la propiedad de que:

A·B = B·A = *I*

siendo *I* la matriz identidad.

Denominamos a la matriz B la inversa de A y la denotamos por A-1.

Una matriz se dice que es inversible o regular si posee inversa. En caso contrario, se dice que es singular.

La matriz inversa de *A* es otra matriz que representamos por A^{-1} y que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

La matriz inversa de A es :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^T$$

Solamente tienen inversa las matrices cuadradas cuyo determinante es distinto

Inversa de matrices
Presentación de Arge Rangel alojada en SlideShare

Importante

Dada una matriz A, la fórmula por la que podemos calcular la inversa de la matriz, si tiene determinante distinto de cero, es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

Es decir, la inversa de una matriz es igual a la matriz traspuesta de su adjunta multiplicada por el inverso del determinante

Importante

Si A es una matriz cuadrada nxn cuya inversa es A^{-1} y si X es una matriz incógnita y B una matriz conocida, ambas con n filas, entonces la solución de la **ecuación matricial**

AX=B

viene dada por

$$X = A^{-1}B$$

Al resultado anterior se llega de la siguiente forma

$$AX = B$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B; \quad A^{-1}A = I = matriz \ unidad$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1} \ B$$

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio