2º de Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

Programación lineal:
Aplicación de la programación lineal a las ciencias sociales.

1. Introducción

Existen tres grandes problemas clásicos que la programación lineal intentó resolver en un principio (haz clic sobre la siguiente presentación para ir pasando las páginas):

Vamos a ver cada uno de ellos por separado.

2. Aplicación a las ciencias sociales

Vamos a intentar dar solución a una serie de problemas de programación lineal que sean identificativos de los problemas que suelen aparecer relativos a las ciencias sociales.

Imagen de geralt en Pixabay. Licencia CC

Imagen modificada de yuichi.sakuraba bajo licencia CC

La confitería "Tartasoro" es famosa por sus dos especialidades en tartas: la Tarta Imperial y la Tarta de Lima.

La Tarta de Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 16€. La tarta de Lima necesita 1 Kg de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de 20€. En el almacén quedan 10 Kilos de azúcar y 120 huevos.

Vamos a ayudarles para saber cuantas unidades de cada especialidad tienen que hacerse para obtener el mayor ingreso por ventas.

1. Organizamos los datos

Lo primero que haremos es organizar los datos en una tabla.

Tartas	Número	Azúcar	Huevos	Ganancias
Imperial	x	0,5x	8x	16x
Lima	y	1y	8y	20y
Total		0,5x+y	8x+8y	16x+20y

Nuestro objetivo es maximizar las ganancias, por lo tanto, nuestro objetivo es maximizar la función F(x,y)=16x+20y

Las restricciones a nuestro problema son:

1. Tanto x como y tienen que ser positivas o nulas, es decir: $x \geq 0$, $y \geq 0$.
2. La cantidad de azúcar total no puede ser superior a 10 kg: $0{,}5x+y \leq 10$.
3. La cantidad de huevos tiene que ser inferior a 120 unidades: $8x+8y \leq 120$.

Por lo tanto, el planteamiento de nuestro problema será:

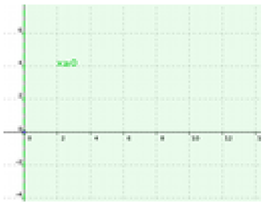
Máx F(x,y)=16x+20y

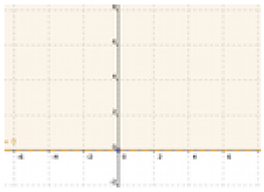
Sujeto a
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$0{,}5x+y \leq 10$
$8x+8y \leq 120$

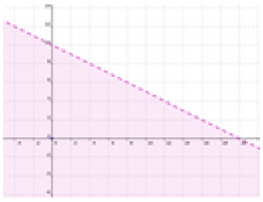
2. Representamos la región factible

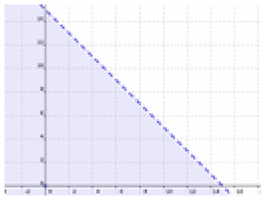
En este caso tenemos 4 desigualdades. Vamos a ayudarnos del programa Geogebra para hallar la región factible de nuestro problema.

En la siguiente galería tienes las 4 imágenes correspondientes a la solución de cada una de las desigualdades.



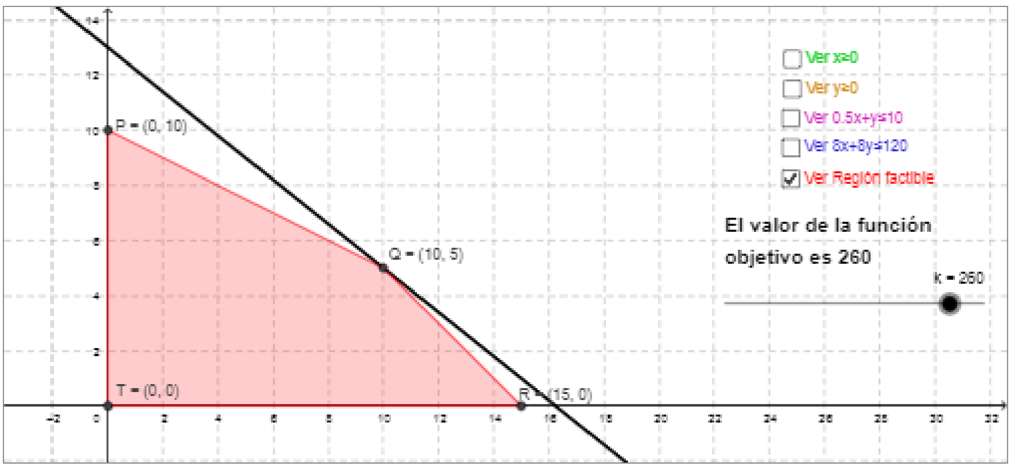






3. Resolvemos el problema

En la siguiente escena de Geogebra podemos ver la región factible (Intersección de todas las restricciones). Moviendo el deslizador k, vemos como va variando la función objetivo y su valor.



4. Conclusión

En el punto Q(10,5) se obtiene el máximo valor de la función objetivo, que en este caso es 260.

Esto quiere decir que el máximo beneficio, 260 €, se obtiene cuando fabrican 10 Tartas Imperiales y 5 Tartas de Lima.

Reflexiona

Imagen de Rubyran bajo licencia Creative Commons

En la joyería "Mibrillante" fabrican pendientes y sortijas.

Para hacer unos pendientes se usan 2 gramos de oro y 1 gramo de plata , mientras que para hacer las sortijas necesitan 2 gramos de oro y 3 gramos de plata.

Los pendientes los venden a 50€ y las sortijas a 60€.

Disponen de 400 gramos de oro y 400 gramos de plata.

Ayuda a los joyeros a decidir cuántas joyas tienen que fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio.

Mostrar retroalimentación

Lo primero que tenemos que hacer es organizar los datos en una tabla:

	N.º Joyas	Gramos de Oro	Gramos de Plata	Ganancias
Pendientes	x	2x	x	50x
Sortijas	y	2y	3y	60y
Total	x+y	2x+2y	x+3y	50x+60y

Nuestro objetivo es maximizar las ganancias, por lo tanto, tendremos que maximizar las Ganancias-Total: Max $F(x,y)=50x+60y$

Si consideramos como unidad monetaria 10€ la función objetivo queda como: **Max $F(x,y)=5x+6y$.** Solo hay que recordar que cuando demos la respuesta tenemos que multiplicar por 10 el valor de la función objetivo para saber cuántos euros son.

Las restricciones las sacamos de la tabla:

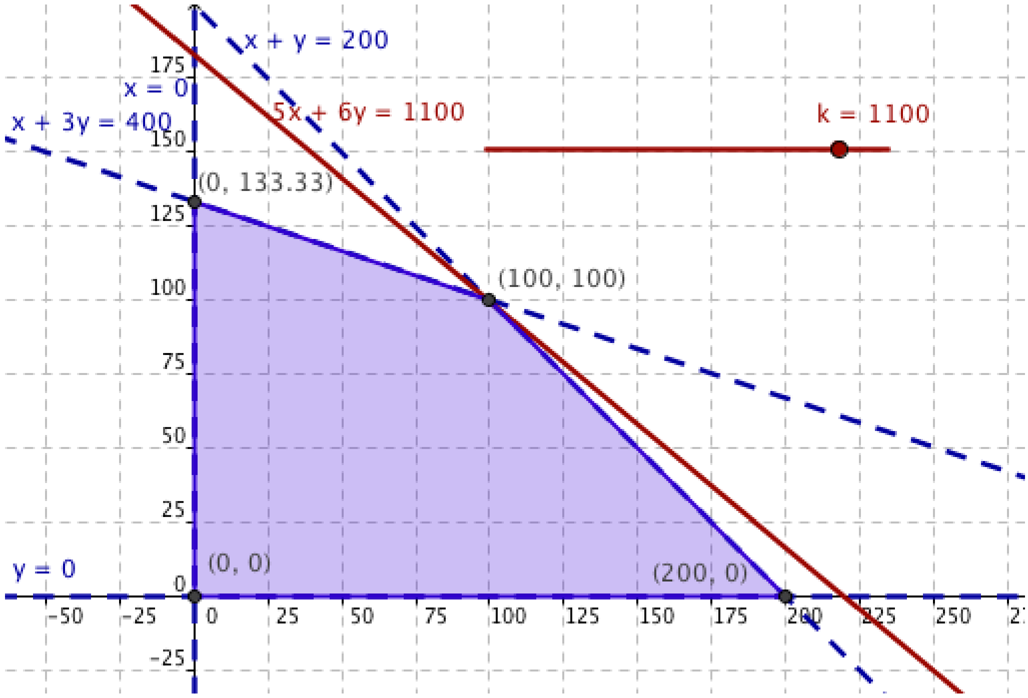
- La primera es obvia $x\geq 0$ e $y\geq 0$.
- Los gramos de oro utilizados en la fabricación de las joyas deben ser inferior a 400 gr: $2x+2y\leq 400$. Podemos simplificar la inecuación por 2 y nos queda: $x+y\leq 200$
- Los gramos de plata que son utilizados para la fabricación de joyas han de ser menor a 400 gr: $x+3y\leq 400$.

Por lo que el planteamiento del problema queda así:

Max $F(x,y)=5x+6y$

Sujeto a
$x\geq 0,\ y\geq 0$
$x+y\leq 200$
$x+3y\leq 400$

Una vez planteado el problema, representamos la región factible y calculamos el valor máximo. En la siguiente gráfica puedes ver el resultado:



Conclusión.

El máximo valor de la función objetivo se alcanza para el punto (100, 100) y toma un valor de 1100. Si lo traducimos al planteamiento de nuestro problema, nos indica que hay que fabricar 100 pendientes y 100 sortijas, y el precio total de la venta es de 11.000 €. Recuerda que teníamos que multiplicar por 10 el valor de la función objetivo.

Imagen de Natalia Lobato bajo licencia Creative Commons

La empresa "Mi Mascota, S.A." se dedica a la elaboración de comida para mascotas. Están trabajando en la elaboración de un nuevo producto para la alimentación de perros teniendo en cuenta que tiene que cubrir sus necesidades mínimas con 3 vitaminas V_1, V_2 y V_3 al menor coste posible.

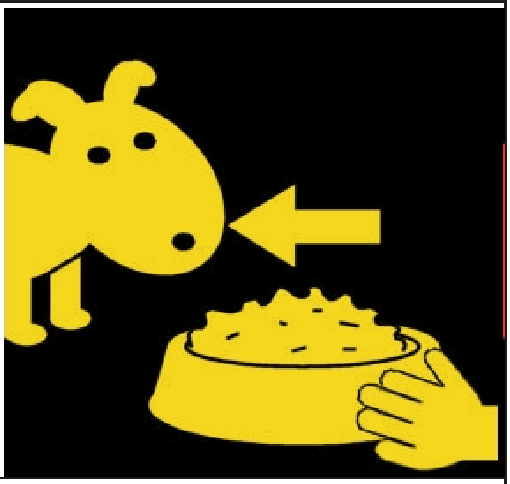


Imagen modificada de cony.fu bajo licencia Creative Commons

Cuenta con dos tipos de pienso P_1 y P_2 que quieren mezclar en las proporciones adecuadas.

La siguiente tabla muestra las dosis de cada vitamina que tienen 1 Kg de cada uno de los dos tipos de pienso:

	V_1	V_2	V_3
P_1	4	2	1
P_2	1	1	2

Para que el alimento mezclado sea adecuado a las necesidades del perro debe contener, como mínimo, 8 dosis de V_1, 6 de V_2 y 6 de V_3.

El coste de cada Kg de P_1 es de 20 €, y el de cada Kg. de P_2 de 10 €.

Vamos a ayudarles para saber en que cantidades tienen que mezclar los dos tipos de piensos para obtener un producto adecuado al menor coste posible. Sabemos que los dos tipos de pienso se venden por Kg, no pudiendo comprarse fraccionadamente, por lo que la solución debe ser de valores enteros.

1. Organicemos los datos

Vamos a llamar x a la cantidad de pienso P_1 e y a la de pienso P_2. Ponemos todos los datos en una tabla:

	Cantidad	V_1	V_2	V_3	Coste
P_1	x	4x	2x	x	20x

P_2	y	y	y	2y	10y
Total		4x+y	2x+y	x+2y	20x+10y

Nuestro objetivo es minimizar los costes, por lo tanto, habrá que minimizar F(x,y)=20x+10y

Vamos con las restricciones. Las dos primeras son obvias: x≥0 e y≥0, es decir, la cantidad de cada una de los piensos debe ser positiva o nula.

Las otras tres restricciones saldrán de las cantidades mínimas de cada vitamina:

Vitamina 1 : 4x+y≥8   Vitamina 2: 2x+y≥6   Vitamina 3: x+2y≥6

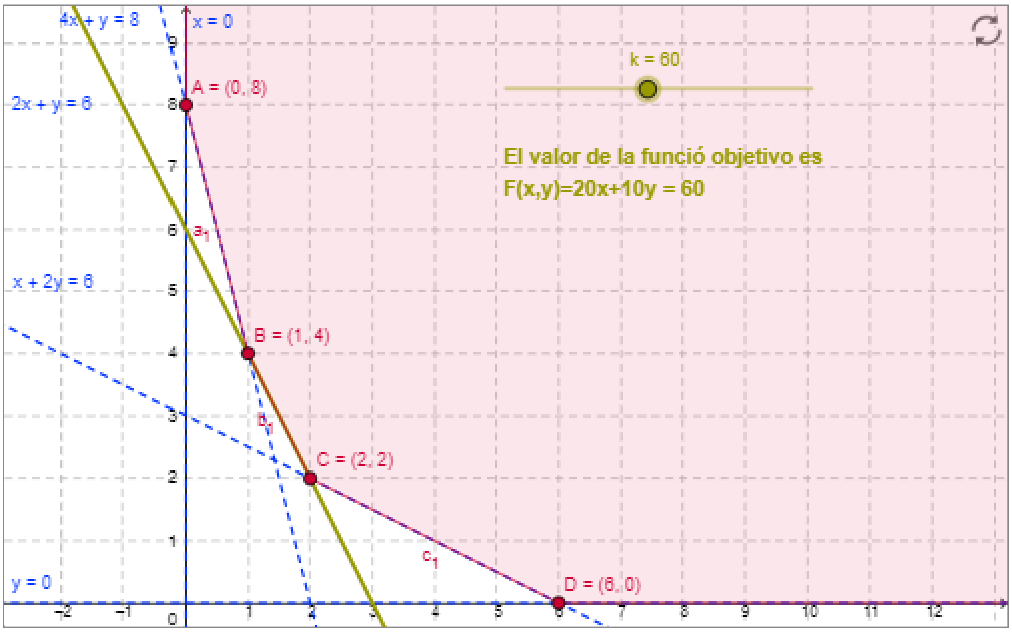
Con lo que el planteamiento del problema será:

Min F(x,y)=20x+10y

Sujeto a
x≥0, y≥0
4x+y≥8
2x+y≥6
x+2y≥6

2. Representamos la región factible y resolvemos el problema

Como podemos ver en la siguiente escena de Geogebra la región factible es no acotada. Mueve el deslizador k para ver como se desplaza la función objetivo según el valor de ese número k.



3. Conclusión

Hay dos vértices B(1,4) y C(2,2) donde la función objetivo alcanza el mínimo. Como la solución tiene que ser entera, en ese segmento sólo están estos dos puntos con coordenadas enteras.

Si esto no fuera así serían solución todos los puntos del segmento BC. Observa que esto ocurre así porque la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

Por lo tanto, en nuestro problema hay dos posibles soluciones:

- B(1,4) en esta primera posibilidad hay que mezclar 1 kg del Pienso 1 con 4 kg del Pienso 2. El coste es de 60 €.
- C(2,2) en este caso hay que mezclar 2 kg de Pienso 1 con 2 kg de Pienso 2. El coste es también de 60 €.

Reflexiona


Imagen del Banco de Imágenes y sonidos del ITE

La empresa de *catering* "Kerrico S. A." está diseñando un menú para un comedor escolar. El colegio les informa de que la dieta debe cumplir los siguientes requisitos:

- El número de calorías no ha de ser inferior a 2000.
- Debe contener un total de, al menos, 60 gr. de proteínas.
- Debe contener un total de, al menos, 80 gr. de grasas.

Para ello dispone de dos tipos de platos con las siguientes características:

	Calorías	Proteínas	Grasas
Primer Plato (100 gr.)	250	10	15
Segundo Plato (100 gr.)	800	15	20

El precio de 100 gramos del primer plato es de 1 € y del segundo plato de 2 €.

Ayuda a esta empresa a calcular cuántos gramos se deben servir de cada plato para que el coste sea mínimo y cuál es ese coste.

Mostrar retroalimentación

Lo primero que tenemos que hacer es organizar los datos en una tabla:

	Gramos de comida(x100)	Calorías	Proteínas	Grasas	Costes
Primer Plato (100 gr.)	x	250x	10x	15x	x
Segundo Plato (100 gr.)	y	800y	15y	20y	2y
Total	x+y	250x+800y	10x+15y	15x+20y	x+2y

Nuestro objetivo es minimizar los costes, por lo tanto, tendremos que minimizar la celda Costes-Total: Min $F(x,y)=x+2y$

La función objetivo nos queda como: **Min $F(x,y)=x+2y$.**

Las restricciones las sacamos de la tabla:

- La primera es obvia $x\geq 0$ e $y\geq 0$.
- Las calorías no deben ser inferiores a 2000: $250x+800y\geq 2000$. Podemos simplificar la inecuación dividiendo toda la expresión por 50 y nos queda: $5x+16y\geq 40$
- Debe contener un total de, al menos, 60 gr. de proteínas: $10x+15y\geq 60$. Dividimos ahora por 5 para simplificar la inecuación: $2x+3y\geq 12$.
- Debe contener un total de, al menos, 80 gr. de grasas: $15x+20y\geq 80$. Simplificamos de nuevo dividiendo los dos términos de la inecuación por 5:

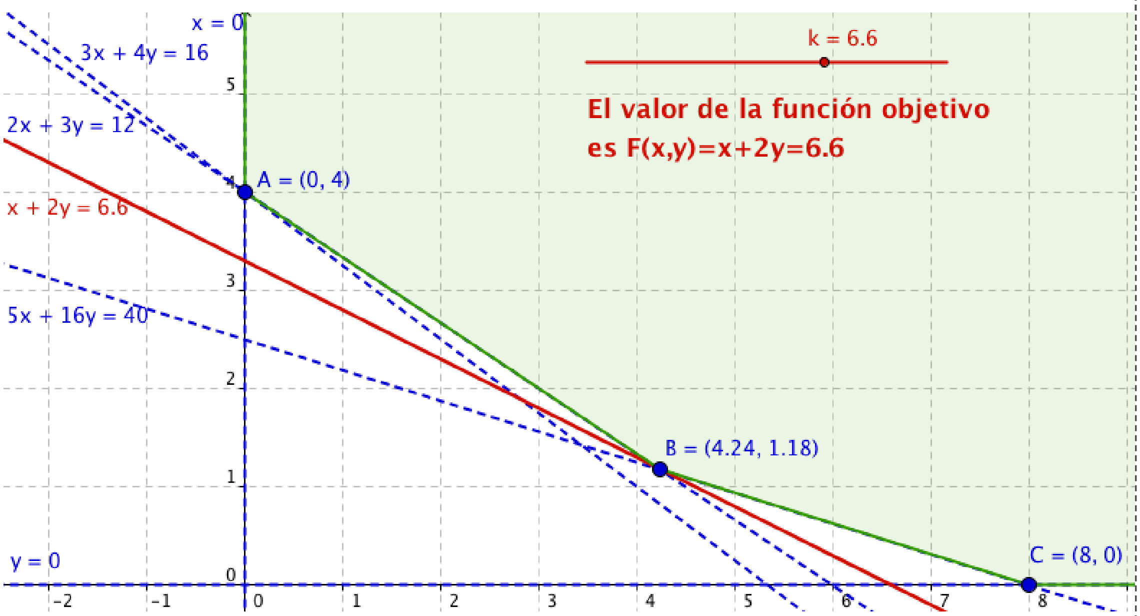
Simplificamos de nuevo dividiendo los dos términos de la inecuación por 5:
3x+4y≥16

Por lo que el planteamiento del problema queda así:

Min F(x,y)=x+2y

Sujeto a
x≥0, y≥0
5x+16y≥40
2x+3y≥12
3x+4y≥16

Una vez planteado el problema, representamos la región factible y calculamos el valor máximo. En la siguiente gráfica puedes ver el resultado:



Conclusión:

El mínimo valor de la función objetivo se alcanza para el punto B(72/17, 20/17), dividiendo B(4.24, 1.18) y toma un valor de 6.6.

Si lo traducimos al planteamiento hay que servir 424 gramos del primer plato y 118 gramos del segundo, con un coste total de 6 euros y 60 céntimos.

Imagen de barto bajo licencia Creative Commons

A la empresa TRANS VELOX de transporte ha llegado la oferta del transporte de pescado a las ciudades de Córdoba, Granada y Sevilla. El origen de la mercancía procede de las ciudades de Málaga y Cádiz.

En la siguiente tabla puedes ver los costes, en euros, de transportar una caja de pescado desde las ciudades costeras a las ciudades interiores:

	Córdoba	Granada	Sevilla
Cádiz	2	3	1
Málaga	1	1	2

La oferta desde la ciudad de Málaga es de 250 cajas, y desde Cádiz es de 150. La demanda desde Sevilla es de 200 cajas, 150 por parte de Córdoba y 50 por parte de Granada.

¿Cuál es la mejor opción para distribuir el pescado de forma que los costes de transporte sean los más bajos posibles y de forma que todas las ciudades de destino sean totalmente abastecidas con las cantidades demandadas?

1. Organizamos los datos

Lo primero que hacemos, como siempre es organizar los datos en una tabla. Haz clic sobre la presentación para ver la construcción de la tabla.

	Córdoba	Granada	Sevilla	Total
Cádiz	x	y	150-x-y	150
Málaga	150-x	50-y	x+y+50	250
Total	150	50	200	400

Vamos a explicar como hemos construido la tabla

La función objetivo será el total del número de cajas enviada entre dos ciudades multiplicado por lo que cuesta cada envío:

2x+1(150-x)+3y+1(50-y)+1(150-x-y)+2(x+y+50)=2x+3y+450

Min F(x,y)=2x+3y+450

Las restricciones del problema salen de obligar a que todas las variables de a tabla anterior sean positivas o nulas.

Por lo tanto, se debe resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Min } F(x,y)=2x+3y+450$$

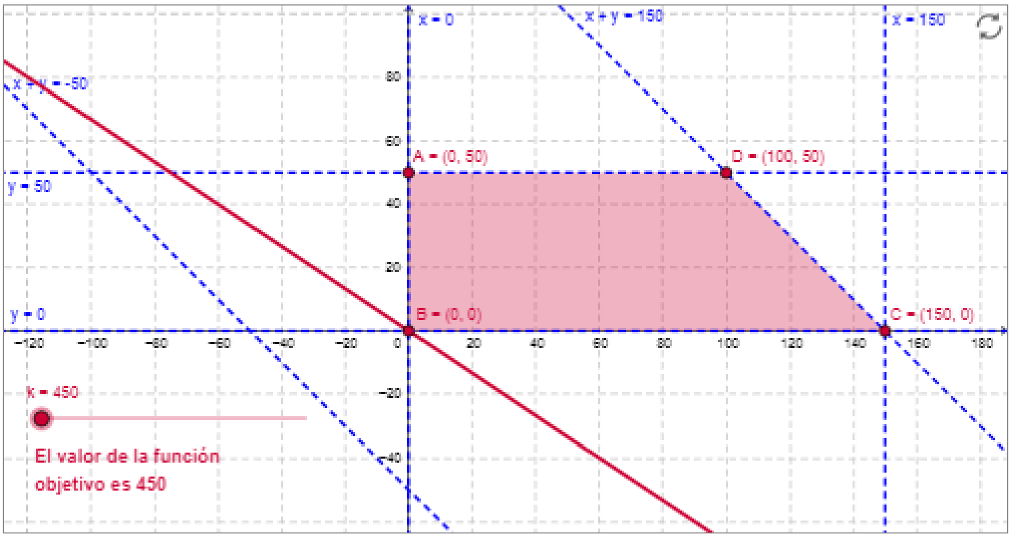
Sujeto a:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 150 \\ 0 \leq y \leq 50 \\ x+y \leq 150 \\ x+y \geq -50 \end{cases}$$

2. Resolvemos el problema

Como puedes ver en la escena siguiente de Geogebra el valor mínimo de nuestra función objetivo se alcanza en el punto A(0,0) y toma un valor de 450. Puedes mover el deslizador k y ver como va variando el valor de la función objetivo

La restricción x+y>-50 es redundante, es decir, no es necesaria; pues, aunque no la incluyamos, la región factible sigue siendo la misma.



3. Conclusión

La solución a nuestro problema, x=0 e y=0, consiste en enviar 150 cajas a Córdoba desde Málaga, 50 cajas a Granada desde Málaga, 150 cajas a Sevilla desde Cádiz y 50 cajas a Sevilla desde Málaga.

Para saber más

Para acabar el tema te voy a dejar unos enlaces a páginas web donde encontrarás ejercicios resueltos de programación lineal para que puedas seguir practicando:

- Página del ITE creado por *José Álvarez* (En la parte izquierda tienes un enlace a Problemas, documento PDF que contiene problemas y sus soluciones)
- En los recursos de Thales tienes la página de *Teodoro Coronado* en la que hay actividades resueltas y actividades propuestas.

Importante

Existen una serie de problemas "modelo" asociados a la programación lineal. Entre ellos, **el problema de la producción, el problema de la dieta y el problema del transporte.**

Para resolverlos debes seguir los mecanismos asociados a la resolución de un problema de programación lineal:

a) Identifica las variables.

b) Intenta escribir en forma de tabla los datos asociados al problema.

c) Identifica la función objetivo.

d) Escribe las restricciones (inecuaciones) que se derivan del enunciado del problema.

e) Representa la región factible.

f) Valora la función objetivo en los vértices de dicha región.

g) Determina la solución óptima al problema planteado.