Probabilidad: Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

1.º Bachillerato

Contenidos

Probabilidad

Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos

1. Introducción

Después de haber trabajado el tema anterior imaginamos que ya eres capaz de calcular probabilidades de muchos hechos cotidianos. Unas son más fáciles que otras, atendiendo a la probabilidad teórica. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que te toque el gordo de Navidad?, o considerando las frecuencias relativas como en el caso de que quieras saber, ¿cuál es la probabilidad de que la primera persona que entre en una peluquería unisex sea un hombre? o algunas más generales como ¿y la probabilidad de que mañana nieve?

En este tema veremos que hay sucesos cuya probabilidad depende de los sucesos que han ocurrido antes. Por ejemplo, la probabilidad de ser atendido en una gran superficie depende de la cola en que te hayas situado. También te enseñaremos una técnica de recuento muy útil para que ordenes los sucesos que puedes obtener sin que se te olvide ninguno.

¡Adelante, nos ponemos en marcha!

Imagen de geralt en Pixabay. Dominio Público

2. Experimentos

La vida es complicada. Muchas veces las situaciones en que nos encontramos están compuestas de muchos aspectos distintos. Por ejemplo, en tu caso, posiblemente además de estar estudiando este curso con mucho esfuerzo, tienes la suerte, en estos tiempos, de tener un trabajo y quizás además debes atender a una familia.

En la vida cotidiana son muy corrientes experimentos o situaciones que son compuestas o que dependen de varios elementos. Por ejemplo, si para ir a tu trabajo tienes que tomar dos transportes, por ejemplo un autobús y después un metro, la probabilidad de tardar más o menos dependerá de lo que tengas que esperar a cada uno de esos transportes. A veces el resultado de un experimento influye en el siguiente, por ejemplo, si viajas en avión desde Canarias hasta Canadá haciendo transbordo en Barcelona, el hecho de que el primer vuelo se retrase puede hacerte perder el segundo vuelo.

Imagen de JESHOOTScom en Pixabay. Dominio Público

Como te imaginarás, en este apartado vamos a trabajar con experimentos compuestos, por lo que para calcular las probabilidades habrá que tener en cuenta varias cosas.

2.1. Experimentos simples y compuestos

Imagina que esta tarde la tienes muy ocupada. Tienes cita en el dentista y después tienes también cita en el sastre o en la modista donde te estás haciendo un traje a medida. Está claro que la tarde la tienes completa, está formada por dos situaciones distintas pero que unidas son todas tus ocupaciones vespertinas. Además, pueden considerarse que son cosas independientes , pero puede que no sean así, ya que si por un casual (más corriente de lo que parece) en la consulta del dentista se atrasa el momento en que te reciba o está más tiempo contigo del previsto, puede ser que llegues tarde a la cita de prueba de tu traje. Es decir, la probabilidad de que vuelvas a casa con todos los mandados hechos depende de una experiencia compuesta.

En el mundo del azar es muy corriente que trabajemos con experimentos que están formados por varios experimentos más sencillos. Por ejemplo, si lanzamos tres monedas podemos considerar que estamos realizando tres experimentos cada uno consistente en lanzar una moneda.

Importante

Un **experimento** es **simple** cuando se realiza una única acción, es decir, si no podemos descomponerlo en situaciones más simples. Por ejemplo, lanzar una moneda, estimar el tiempo que tardará el autobús que estamos esperando o extraer una bola de una bolsa opaca.

Un **experimento** es **compuesto** cuando puede descomponerse en varios simples. Por ejemplo lanzar una moneda y girar una ruleta, extraer tres cartas de una baraja, lanzar un dado y según su valor, extraer una bola de un conjunto de bolsas.

Comprueba lo aprendido

Indica si es verdadero o falso que los siguientes experimentos son compuestos.
Extraer dos cartas de una baraja.
Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Es cierto, se puede considerar compuesto por dos experimentos de extraer una carta de una baraja.

Lanzamos dos dados y sumamos los números de sus caras superiores.
Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso

No es compuesto, sólo obtenemos un resultado, aunque se lancen dos dados.

Ver si el gordo de Navidad acaba en múltiplo de 3 o en número primo.
Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Sigue siendo un solo experimento, ver en que acaba el gordo de Navidad.

Se lanza un dado. Si sale par se lanza una moneda y si sale impar se lanzan dos monedas.
Sugerencia

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

En este caso tenemos un experimento compuesto de lanzar un dado y después lanzar monedas.

Caso práctico

Considera el experimento compuesto que consiste en lanzar una moneda y observar si sale cara o cruz y además extraer una bola de una bolsa con 100 fichas numeradas del 1 al 100 y ver si la ficha extraída tiene un número par o impar.

Escribe el espacio muestral correspondiente a ese experimento compuesto.

Tenemos que ver todos los resultados que podemos obtener y para ello relacionamos todos y cada uno de los resultados de uno de los experimentos con todos y cada uno de los del otro. De esa forma, el espacio muestral estaría formado por cuatro sucesos elementales:

E={Cara-Par, Cara-Impar, Cruz-Par, Cruz-Impar}

Importante

Dos experimentos se llaman **dependientes** si el resultado de uno de ellos influye en el resultado del otro. En caso contrario se llaman **independientes**.

En el ejercicio anterior es evidente que lo que salga en la moneda no nos influye en el número que va a salir en la bolsa, pero imagina esta otra situación. Si sale cara, extraemos una bola de una bolsa donde hay 3 bolas blancas y 2 negras, mientras que si sale cruz extraemos una bola de una bolsa donde hay 1 bola blanca y 4 negras. Lógicamente, si queremos saber que posibilidades hay de obtener una bola blanca al final, el resultado depende del primer experimento que hemos hecho. Por eso es importante saber si los experimentos influyen unos en otros.

Comprueba lo aprendido

Indica si los siguientes experimentos son dependientes o independientes.

1) Lanzamos dos dados y tomamos los números que salgan.

Sugerencia

- ○ Dependientes.
- ○ Independientes.

No. El valor que sale en un dado no influye en lo que salga el otro.

Correcto.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

2) Lanzamos un dado y sacamos una bola de una bolsa.

Sugerencia

- ○ Dependientes.
- ○ Independientes.

¿Crees que el valor del dado influye en la bola que salga? Nosotros creemos que no.

Muy bien.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

3) Tomamos dos fichas de dominó del conjunto de fichas.
Sugerencia

- ○ Dependientes
- ○ Independientes.

Correcto. La segunda extracción queda influida por la primera.

No. La segunda ficha es dependiente de lo que haya salido en la primera.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

Hay muchos experimentos aleatorios compuestos que consisten en repetir un mismo experimento varias veces, en concreto muchos de ellos corresponden a la extracción de varios elementos de un determinado lugar, por ejemplo, extraer cinco cartas de una baraja, tres bolas de una urna, dos tornillos de una caja de tornillos, etc. Según como se realice esa extracción, el experimento se puede considerar que está formado por sucesos dependientes o independientes. Veamos un ejemplo típico.

Tenemos una baraja de cartas y extraemos una carta, anotamos cuál es y la volvemos a introducir dentro de la baraja. Después extraemos otra carta. Otro experimento sería extraer la carta de la baraja y, sin volverla a introducir, extraer otra carta de la baraja. En estos dos experimentos la probabilidad de obtener dos ases sería distinta pues en el primer caso nos podría salir los dos ases de copas, cosa imposible en el segundo caso.

Importante

Una extracción se dice que es **sin reemplazamiento** cuando el elemento extraído no vuelve a introducirse dentro del recipiente del que se ha extraído.

Diremos que una extracción se realiza **con reemplazamiento** si después de extraer un elemento y anotar su valor se vuelve a introducir en el recipiente antes de volver a realizar otra extracción. En este caso la segunda vez que realizamos la extracción la hacemos en las mismas condiciones iniciales en que se hizo la primera.

Ejemplo:

Si tenemos un conjunto de personas que realizan una carrera y queremos hallar qué dos personas pueden quedar en los dos primeros puestos, este experimento sería sin reemplazamiento ya que una misma persona no podría quedar en los dos lugares. Sin embargo, si estamos estudiando a qué personas le pueden tocar el gordo de Navidad y el primer premio de El Niño, entonces es un experimento con reemplazamiento ya que por designios del azar puede tocarle a la misma persona.

Reflexiona

Tenemos una bolsa donde hay tres bolas numeradas del 1 al 3.

1. Extraemos al azar una bola y, tras dejarla fuera, extraemos otra bola. Escribe cuál sería el espacio muestral de los resultados posibles si solo consideramos los números que han salido, es decir, nos da igual el orden (es lo mismo 2 y 3 que 3 y 2).
2. Escribe ahora el espacio muestral en el caso de que la primera bola se devuelva a la bolsa.

1. El espacio muestral en este caso sería {1-2, 1-3, 2-3}.
2. Si la extracción es con reemplazamiento, es posible que se repitan los valores y por tanto el espacio muestral es: {1-1, 1-2, 1-3, 2-2, 2-3, 3-3}

2.2. Diagramas de árbol

En el punto anterior te has encontrado un ejercicio resuelto en el que se hallaba el espacio muestral de un experimento compuesto. En el caso que hemos visto no teníamos mucha dificultad porque había muy pocos casos, pero si el número de posibilidades aumenta, el conocer todos los posibles resultados se convierte en un problema. Para ver como solucionarlo te vamos a mostrar un método de recuento que es muy interesante para no olvidarse ningún caso posible y que además, como verás en el siguiente apartado, nos servirá para hallar probabilidades en experimentos compuestos. Observa la siguiente presentación.

https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vTgkdSqLvP71rapKDhTOtzU8KlAWZD8C73lgHOQzHMekGv9TrS10MZscLO04JT7pBcf2aeR2PRAwAoL/embed?start=false&loop=false&delayms=3000

Importante

La estructura que has visto en la proyección anterior recibe el nombre de diagrama en árbol pues puedes observar como van ramificándose los resultados como las ramas de un árbol. El **diagrama en árbol** consiste en una representación gráfica en la que se muestran todos los resultados posibles de un experimento.

La forma de construirlo es dibujar una rama por cada resultado del primer experimento, en cada una de ellas se dibuja una rama por cada resultado del segundo experimento y así sucesivamente según el número de experimentos que haya.

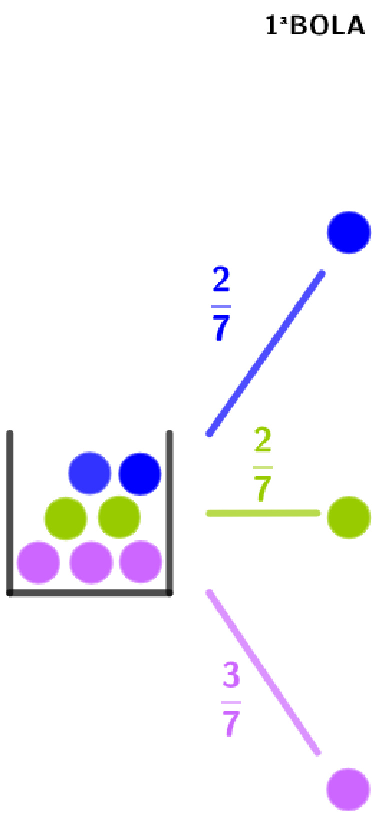
Ejemplos:

Aquí tienes dos ejemplos de construcción de un árbol. En el primero está formado por dos sucesos independientes, mientras que en el segundo se trabaja con sucesos dependientes ya que corresponde a una doble extracción sin reemplazamiento.

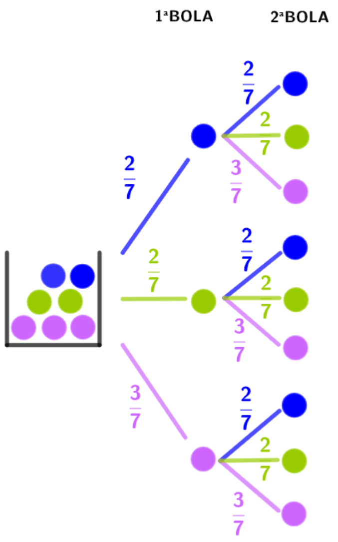
EXPERIMENTO INDEPENDIENTE:

Tenemos una urna con siete bolas de tres colores distintos. Cuando sacamos la primera bola la devolvemos a la urna antes de sacar la segunda.

EXPERIMENTO INDEPENDIENTE: PRIMERA EXTRACCIÓN



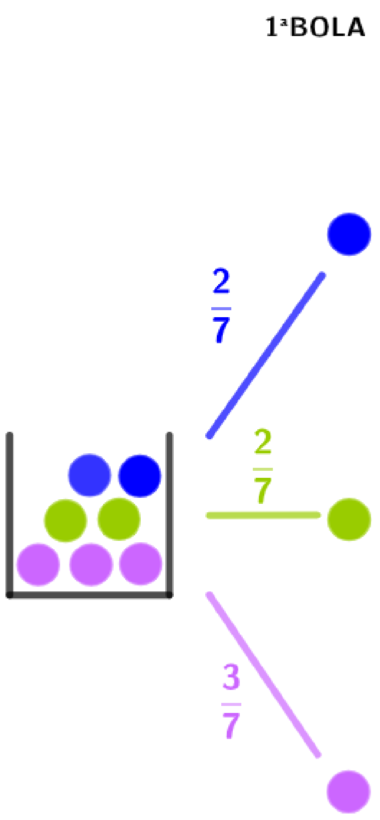
EXPERIMENTO INDEPENDIENTE: PRIMERA Y SEGUNDA EXTRACCIÓN



EXPERIMENTO DEPENDIENTE:

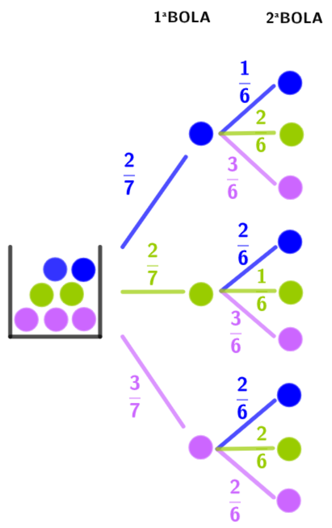
EXPERIMENTO DEPENDIENTE: PRIMERA EXTRACCIÓN

Tenemos una urna con siete bolas de tres colores distintos. Cuando sacamos la primera bola **no** la devolvemos a la urna y sacamos la segunda.



EXPERIMENTO DEPENDIENTE: PRIMERA Y SEGUNDA EXTRACCIÓN

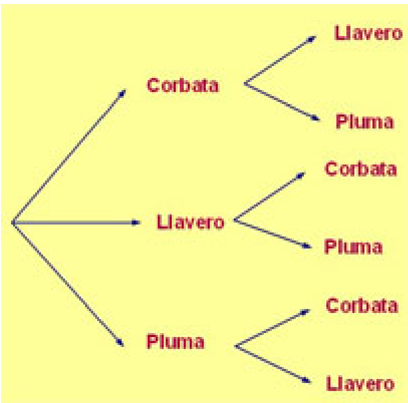
EXPERIMENTO DEPENDIENTE: PRIMERA Y SEGUNDA EXTRACCIÓN



Reflexiona

Llevamos en una bolsa tres regalos: una corbata, un llavero y una pluma guardados en paquetes iguales. Vamos a regalarle un par de esos regalos a dos amigos para lo que sacamos un primer regalo para uno y después un segundo regalo para el otro. Haz el diagrama de árbol de la distribución de los dos regalos y el espacio muestral que corresponde a los resultados posibles.

El diagrama de árbol sería el siguiente:



Por tanto, el espacio muestral de este experimento sería:

{Corbata-Llavero, Corbata-Pluma, Llavero-Corbata, Llavero-Pluma, Pluma-Corbata. Pluma-Llavero}

Aclaración:
Corbata-Llavero; significa al primer amigo una corbata y un llavero al segundo. Por tanto no es lo mismo que Llavero-Corbata.

Para saber más

A continuación un vídeo de cómo enfrentarnos a este tipo de problemas:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/wPmi1pcoDq8

3. Sucesos dependientes e independientes

A medida que vamos adentrándonos en la Unidad comprobarás que nuestra vida cotidiana tiene muchos aspectos regidos por el azar. Hay veces que en situaciones complejas, unos elementos dependen o no de otros. Por ejemplo, si tu hijo pequeño se pone enfermo eso no influye en tu trabajo si cuentas con alguien que pueda quedarse con él en casa, tu pareja, algún familiar, algún vecino o amigo, pero en caso contrario quizás te encuentres en la necesidad de faltar a tu trabajo, si es que puedes. O imagina que te estás arreglando para salir te quieres poner una falda y sólo tienes limpia en ese momento una con cuadros, eso te influye en la blusa que te quieres poner que no debería ser estampada, para no ir "dando el cante". En resumidas cuentas, y tal como vimos en el apartado anterior, hay situaciones que son dependientes y otras independientes de lo que haya sucedido anteriormente.

En el mundo de la probabilidad es también corriente que en situaciones compuestas, el resultado de una de ellas influya en la probabilidad de obtener los distintos resultados del segundo experimento. En este apartado veremos como hallar la probabilidad de experimentos que son dependientes o independientes. Antes de comenzar puedes ver el siguiente vídeo sobre un problema muy famoso en el mundo de la probabilidad, conocido como el problema de Monty Hall.

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/_mbO-ndr74Q

Para saber más

Si no te quedo claro el razonamiento, quizás con este video si.

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/QsWwNbr8G0o

3.1. Probabilidad condicionada

A lo largo del tema ya hemos visto ejemplo de situaciones en que un resultado influye en los resultados siguientes, por ejemplo, si vas a trabajar en coche sabes que hay veces que si sales cinco minutos antes de casa llegas con mucho tiempo de antelación al trabajo, pero si sales cinco minutos después llegas tarde porque te pilla el tráfico de horas punta. En este apartado vamos a calcular las probabilidades de sucesos que dependen unos de otros.

Importante

Se define la **probabilidad condicionada** como la probabilidad de que suceda un suceso A sabiendo que ha sucedido un suceso B. Se escribe **P(A/B)** y se lee probabilidad de A condicionada a B.

Caso práctico

Posiblemente recordarás que en el tema anterior trabajamos con las tablas de contingencia y en concreto hicimos algún ejercicio con los números de matriculados en la enseñanza a distancia para adultos. Teníamos la siguiente tabla.

	Hombre	Mujeres	Totales
Secundaria	180	260	440
Bachillerato	190	220	410
Totales	370	480	850

Si elegimos una persona al azar, de los matriculados en esta enseñanza. ¿Cuál es la probabilidad de ser?

a) Alumna de secundaria.

b) Alumno de bachillerato.

c) Si la persona que hemos elegido es de bachillerato, ¿cuál es ahora la probabilidad de que sea un alumno?

d) Si hemos elegido una persona al azar y sabemos que es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculada en secundaria?

Las dos primeras probabilidades ya las habíamos calculado en el tema anterior. Como puedes ver corresponden a una intersección de sucesos.

a) Si consideramos el suceso A={ser mujer} y B={matriculado en secundaria}, en este caso nos están pidiendo

$$P(A \cap B) = \frac{260}{850} = 0{,}31$$

b) En este caso nos están pidiendo:

$$P(hombre \ \cap \ bachillerato) = \frac{190}{850} = 0{,}22$$

En los otros dos apartados ya nos están pidiendo probabilidades condicionadas, en cuyo caso ya no trabajamos con los mismos números.

c) Si hemos elegido una persona matriculada en bachillerato, ya nos estamos refiriendo solamente a los 410 alumnos que hay de bachillerato, de los que 190 son hombres, por lo que la probabilidad pedida sería:

$$P(hombre \mid bachillerato) = \frac{190}{410} = 0{,}46$$

d) De la misma forma, en este apartado trabajamos solo con las 480 mujeres que hay matriculadas y entonces tendremos:

$$P(secundaria\ |\ mujer)=\frac{260}{480}=0{,}54$$

Importante

La probabilidad de que ocurran a la vez dos sucesos varía según sean dos sucesos dependientes o independientes. Si A y B son dos **sucesos independientes** la probabilidad de su intersección es:

$$P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

La expresión anterior se utiliza también, a veces, para definir dos sucesos independientes. Otra forma de comprobar si el suceso A es independiente de B es cuando se verifica que **P(A/B) = P(A) .**

Si A y B son **sucesos dependientes**, entonces la probabilidad de que ocurran ambos es igual a:

$$P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$$

Caso práctico

En una bolsa tenemos 10 bolas, 4 blancas y el resto negras. Extraemos primero una bola y después una segunda bola. Queremos hallar cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean negras si:

1. La primera bola se devuelve a la bolsa, tras anotar su valor.
2. La primera bola se deja fuera de la bolsa antes de extraer la segunda.

1. En el primer caso nos encontramos en una extracción con reemplazamiento, quiere decir que cuando vayamos a extraer la segunda bola estamos en las mismas condiciones que antes de realizar la primera extracción, luego son sucesos independientes, por tanto, su probabilidad sería:

$$P(1^a\ bola\ negra\ \cap\ 2^a\ bola\ negra)=P(1^a\ bola\ negra)\cdot P(2^a\ bola\ negra)=\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{36}{100}=0{,}36$$

2. En el segundo caso, tenemos sucesos dependientes, ya que al dejar fuera una bola, en la segunda extracción la probabilidad de sacar negra ya no es la misma pues solo quedan 9 bolas de las cuales hay 5 negras. Por tanto, la probabilidad en este caso sería:

$$P(1^a\ negra\ \cap\ 2^a\ negra)=P(1^a\ bola\ negra)\cdot P(2^a\ bola\ negra\ |\ 1^a\ ha\ sido\ negra)=$$

$$=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{30}{90}=0{,}33$$

Comprueba lo aprendido

En la siguiente escena, alojada en proyectodescartes.org, y elaborada por *María José García Cebrian* puedes comprobar como la probabilidad cambia cuando un suceso depende de otro. Mira primero los ejemplos que aparecen resueltos y pulsa después en el botón para hacer los ejercicios.

Probabilidad condicionada

Importante

En general, si queremos hallar la probabilidad de que ocurran varios sucesos dependientes a la vez, hay que calcular la probabilidad del primer suceso, multiplicarlos por la probabilidad de que ocurra el segundo suceso, supuesto que ha ocurrido el primero, por la probabilidad de que ocurra el tercer suceso suponiendo que han ocurrido los dos primeros, y así sucesivamente.
Para tres sucesos correspondería la expresión:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

El resultado anterior se conoce como **Teorema de la probabilidad compuesta** y puede generalizarse a cualquier número de sucesos.

Reflexiona

Existe un grupo de personas donde hay 12 hombres y 18 mujeres. Elegimos dos personas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean mujeres?

En este caso tenemos un caso de extracción sin reemplazamiento. La segunda persona depende de quién haya salido en la primera selección, que no puede ser la misma.

$$P(1^a \ sea \ mujer \ y \ 2^a \ sea \ mujer) = P(1^a \ mujer) \cdot P(2^a \ sea \ mujer \mid 1^a \ ha \ sido \ mujer)$$

$$= \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145} = 0{,}35$$

Comprueba lo aprendido

Tomamos una baraja española con 40 cartas y extraemos tres cartas al azar. La probabilidad de que las tres cartas extraídas sean de oros es:

(*Recuerda escribir la probabilidad con "," decimal y redondeada a dos cifras decimales*)

1. ______ si las cartas se devuelven al mazo después de cada extracción.
2. ______ si las cartas que se extraen no se devuelven al mazo.

1. En el primer caso son sucesos independientes, la probabilidad sería

$$P(1^a \ oros \cap 2^a \ oros \cap 3^a \ oros) = P(1^a \ oros) \cdot P(2^a \ oros) \cdot P(3^a \ oros) =$$

$$= \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{64} = 0{,}02$$

2. En este caso tenemos sucesos dependientes: $P(1^a \ oros \cap 2^a \ oros \cap 3^a \ oros) =$

$$= P(1^a \ oros) \cdot P(2^a \ oros \mid 1^a \ ha \ sido \ oros) \cdot P(3^a \ oros \mid 1^a \ y \ 2^a \ han \ sido \ oros) =$$

$$= \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{720}{59280} = 0.01$$

3.2. Teorema de la probabilidad total

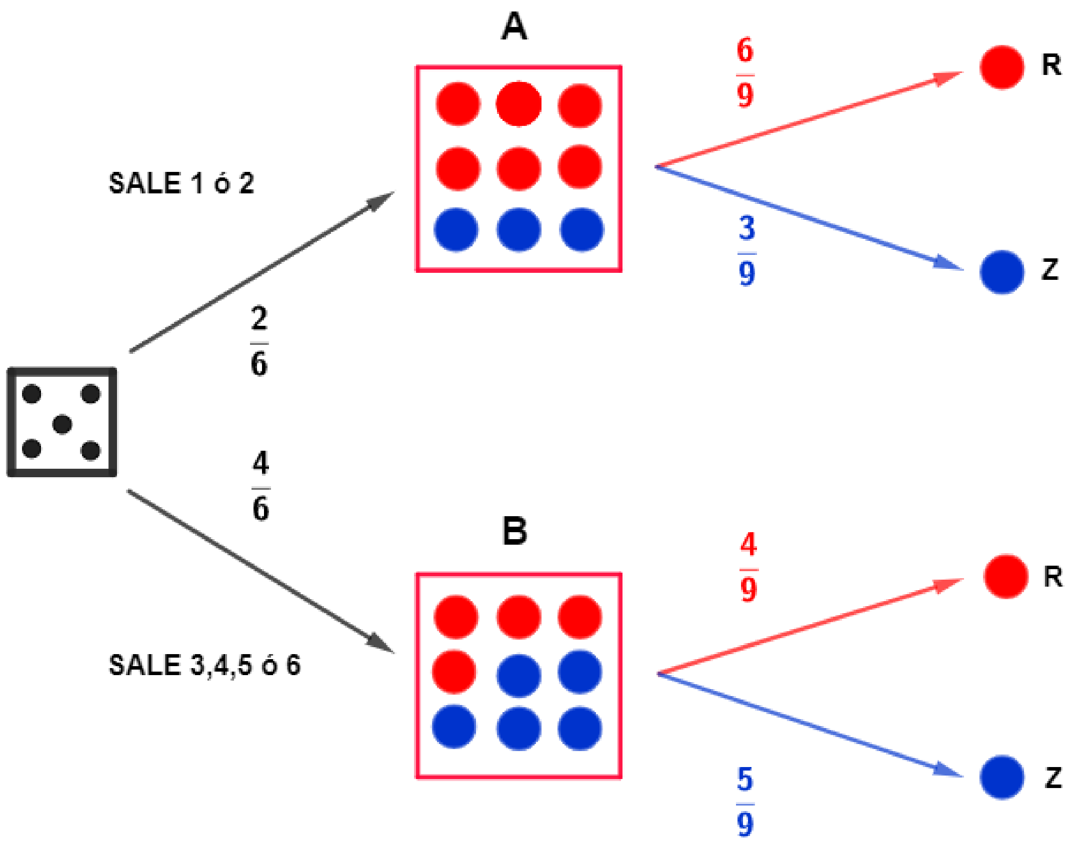
Vamos a ver la ley fundamental que permite calcular probabilidades de sucesos que dependen de distintas situaciones. Comenzaremos con un ejemplo típico de estas situaciones.

Ejemplo:

Lanzamos un dado cúbico. Si sale 1 ó 2 extraemos una bola de una bolsa, que denominamos A, la cual contiene 6 bolas rojas y 3 azules. Si sale en el dado 3, 4, 5 ó 6 se extrae una bola de una bolsa, que denominamos B, esta contiene 4 bolas rojas y 5 azules.

Como puedes suponer, la probabilidad de obtener una bola roja depende de la bolsa de la que la hayamos sacado y eso depende del resultado del dado. Una forma fácil de resolver este tipo de ejercicios es construir un diagrama de árbol y asignar probabilidades a cada una de sus ramas. Lo podemos ver en la siguiente presentación:

Esquema en árbol



$$P(R) = \frac{2}{6} \cdot \boxed{\frac{6}{9}} + \frac{4}{6} \cdot \boxed{\frac{4}{9}} = \frac{28}{54} = 0,52$$

FORMALIZANDO:

$$P(R) = P[(A \cap R_A) \cup (B \cap R_B]$$

$$P(R) = P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B)$$

Probabilidades

En la forma anterior de resolver el ejemplo nos encontramos con el problema de que tenemos que construir el árbol completo, aunque hay ramas que no se utilicen. Por eso, en algunas ocasiones, es más rápido hacerlo directamente a través de las probabilidades.

Trabajaríamos de la siguiente forma:

$P(\text{obtener bola roja}) = P(\text{obtener bola roja de la bolsa 1}) + P(\text{obtener bola roja de la bolsa 2}) =$

$P(\text{elegir la bolsa 1}) \cdot P(\text{bola roja} \mid \text{en la bolsa 1}) + P(\text{elegir la bolsa 2}) \cdot P(\text{bola roja} \mid \text{en la bolsa 2}) =$

$= \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{9} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9} + \frac{8}{27} = \frac{14}{27} = 0{,}52$

Como puedes observar las operaciones que se realizan son las mismas que hemos visto al utilizar el diagrama de árbol.

Importante

Supongamos un suceso B que depende de varios sucesos A_1, A_2 y A_3, que tienen la característica de que abarcan todas las posibilidades de un experimento aleatorio. Para hallar la probabilidad del suceso B utilizamos la siguiente fórmula.

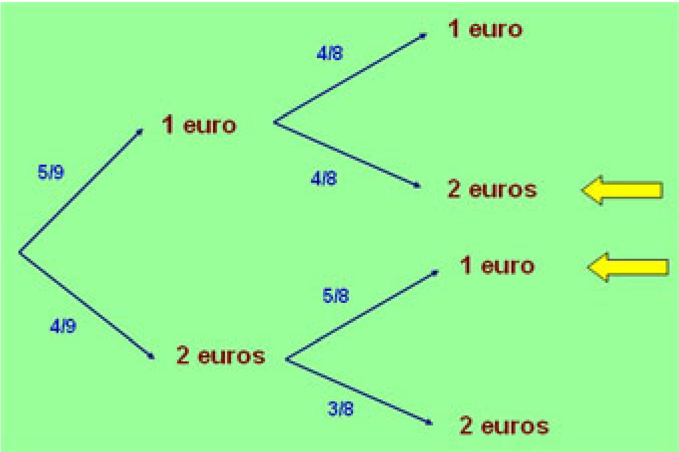
$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)\cdot P(B|A_3)$$

Este resultado se conoce como el **Teorema de la probabilidad total**. Puede ampliarse a cualquier conjunto de sucesos A_i siempre que esos sucesos sean **incompatibles** y juntos reúnan todos los resultados del experimento.

Caso práctico

En un bolsillo tenemos 5 monedas de un euro y 4 de dos euros. Sacamos dos monedas al azar. ¿Cuál es probabilidad de que hayamos sacado en total 3 euros?

Si realizamos el árbol de probabilidades obtenemos la imagen adjunta donde las flechas amarillas representan los valores que vamos buscando.



También podemos hacerlo directamente por la probabilidad. Para ello tenemos en cuenta que para conseguir 3 euros hay que tener una moneda de 1 y otra de 2 euros, pero puede ser que la primera sea de 1 euro y la segunda de 2 o al revés.

P(obtener 3 euros)=P(1ª de 1 euro y 2ª de 2 euros)+P(1ª de 2 euros y 2ª de 1 euro)=

=P(1ª de 1 euro)·P(2ª de 2 euros | la 1ª ha sido de 1 euro) + P(1ª de 2 euros)·P(2ª de 1 euro | la 1ª ha sido de 2 euros) =

$=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{40}{72}=\frac{5}{9}=0{,}56$

Caso práctico

Realiza el ejercicio de probabilidad total que te plantea este enlace, alojado en proyectodescartes.org.

Para practicar, una vez que hayas realizado el ejercicio, pulsa en el botón de otros valores para repetir el ejercicio con valores diferentes.

Comprueba lo aprendido

En una fábrica tenemos dos cajas de tornillos, en la primera son defectuosos el 5% de los tornillos mientras que en la segunda lo son el 3%. Elegimos una de las cajas al azar y extraemos un tornillo, también aleatoriamente.

La probabilidad de que ese tornillo no sea defectuoso es de ______ .

Las dos cajas tienen la misma oportunidad de ser elegidas por lo que la probabilidad de obtener un tornillo no defectuoso sería:

P(T.N.D.) = P(elegir la caja 1)·P(T.N.D. | de la caja 1) + P(elegir la caja 2)·P(T.N.D. | de la caja 2) =

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{95}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{97}{100}=\frac{192}{200}=0{,}96$$

Comprueba lo aprendido

Para practicar

La siguiente escena, alojada en proyectodescartes.org, y elaborada por *María José García Cebrian* muestra un ejercicio de ruletas, según el color que salga en la primera elegimos una ruleta distinta y queremos saber la probabilidad de obtener pares de valores. Ten presente que la suma de todas las probabilidades debe valor 1, como ya vimos en el tema anterior.

Ejercicio ruletas

Resumen

Importante

Un **experimento** es **simple** cuando se realiza una única acción, es decir, si no podemos descomponerlo en situaciones más simples. Por ejemplo, lanzar una moneda, estimar el tiempo que tardará el autobús que estamos esperando o extraer una bola de una bolsa opaca.

Un **experimento** es **compuesto** cuando puede descomponerse en varios simples. Por ejemplo lanzar una moneda y girar una ruleta, extraer tres cartas de una baraja, lanzar un dado y según su valor, extraer una bola de un conjunto de bolsas.

Dos experimentos se llaman **dependientes** si el resultado de uno de ellos influye en el resultado del otro. En caso contrario se llaman **independientes**.

Importante

Una extracción se dice que es **sin reemplazamiento** cuando el elemento extraído no vuelve a introducirse dentro del recipiente del que se ha extraído.

Diremos que una extracción se realiza **con reemplazamiento** si después de extraer un elemento y anotar su valor se vuelve a introducir en el recipiente antes de volver a realizar otra extracción. En este caso la segunda vez que realizamos la extracción la hacemos en las mismas condiciones iniciales en que se hizo la primera.

Importante

El **diagrama en árbol** consiste en una representación gráfica en la que se muestran todos los resultados posibles de un experimento.

La forma de construirlo es dibujar una rama por cada resultado del primer experimento, en cada una de ellas se dibuja una rama por cada resultado del segundo experimento y así sucesivamente según el número de experimentos que haya.

Importante

Se define la **probabilidad condicionada** como la probabilidad de que suceda un suceso A sabiendo que ha sucedido un suceso B. Se escribe **P(A/B)** y se lee probabilidad de A condicionada a B.

La probabilidad de que ocurran a la vez dos sucesos varía según sean dos sucesos dependientes o independientes. Si A y B son dos **sucesos independientes** la probabilidad de su intersección es:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

La expresión anterior se utiliza también, a veces, para definir dos sucesos independientes. Otra forma de comprobar si el suceso A es independiente de B es cuando se verifica que **P(A/B) = P(A) .**

Si A y B son **sucesos dependientes**, entonces la probabilidad de que ocurran ambos es igual a:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Importante

En general, si queremos hallar la probabilidad de que ocurran varios sucesos dependientes a la vez, hay que calcular la probabilidad del primer suceso, multiplicarlos por la probabilidad de que ocurra el segundo suceso, supuesto que ha ocurrido el primero, por la probabilidad de que ocurra el tercer suceso suponiendo que han ocurrido los dos primeros, y así sucesivamente.
Para tres sucesos correspondería la expresión:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

El resultado anterior se conoce como **Teorema de la probabilidad compuesta** y puede generalizarse a cualquier número de sucesos.

Importante

Supongamos un suceso B que depende de varios sucesos A_1, A_2 y A_3, que tienen la característica de que abarcan todas las posibilidades de un experimento aleatorio. Para hallar la probabilidad del suceso B utilizamos la siguiente fórmula.

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$$

Este resultado se conoce como el **Teorema de la probabilidad total**. Puede ampliarse a cualquier conjunto de sucesos A_i siempre que esos sucesos sean **incompatibles** y juntos reúnan todos los resultados del experimento.