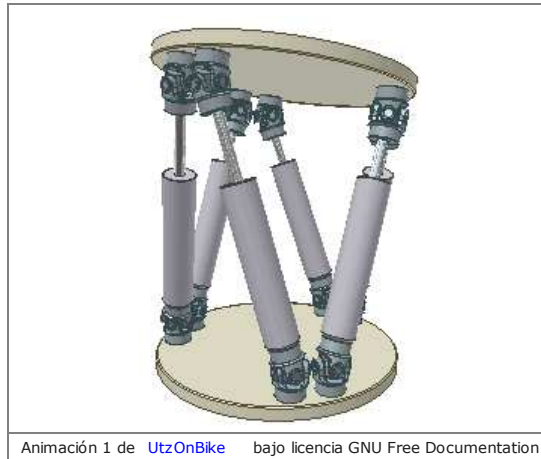


En el primer tema de esta unidad has estudiado las leyes que gobiernan la dinámica, las leyes de Newton. El trabajo se centró entonces en sistemas estáticos, que denominábamos en equilibrio. Sin embargo, la mayor parte de las situaciones que pueden encontrarse en nuestro entorno se caracterizan por su variabilidad: se encuentran en movimiento.

En este tema estudiarás sistemas dinámicos, que se definen como aquellos sistemas físicos que evolucionan en el tiempo. También verás algunas causas que pueden provocar esta evolución y, sobre todo, se plantearán distintos sistemas en los que tendrás que deducir sus ecuaciones de movimiento.



Animación 1 de [UtzOnBike](#) bajo licencia GNU Free Documentation

Estos sistemas serán simples modelizaciones de los casos más complejos que pueden observarse en la realidad, pero el uso de estos modelos te permitirá comprender mejor el comportamiento de los sistemas reales sin necesidad de cálculos excesivamente complicados.

1. Sistemas con un cuerpo

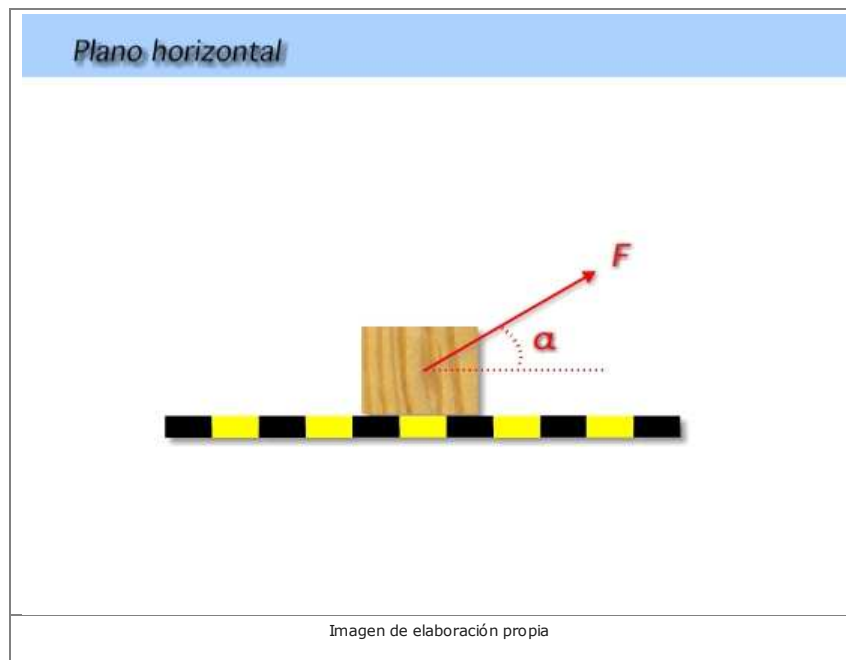
El caso más sencillo de estudio dentro de la dinámica es aquél en el que únicamente existe un cuerpo cuyo movimiento quiere estudiarse. Este tipo de problemas es fundamental, pues su método de resolución es similar al aplicado en problemas más complicados.

Importante

Cuando tengas que resolver un problema de aplicación de las leyes de la dinámica, es importante que sigas ordenadamente las siguientes pautas:

1. Identifica las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo, así como su origen, tipo y dirección.
2. Dibuja un diagrama de fuerzas lo más simple posible, pero que contenga toda la información que se haya suministrado. El punto de aplicación de todas las fuerzas será el centro geométrico del cuerpo sobre el que actúan.
3. Escoge un sistema de referencia cartesiano de forma que uno de los ejes coincida con la dirección esperada de movimiento del cuerpo. La componente perpendicular al plano de movimiento se denomina **Normal** mientras que la paralela al mismo es la componente **Tangencial**.
4. Descompón todas las fuerzas en sus componentes según los ejes del sistema de referencia.
5. Aplica la segunda ley de Newton en cada uno de los ejes.
6. Resolución matemática del sistema de ecuaciones que resulta para conocer los datos que se nos piden.

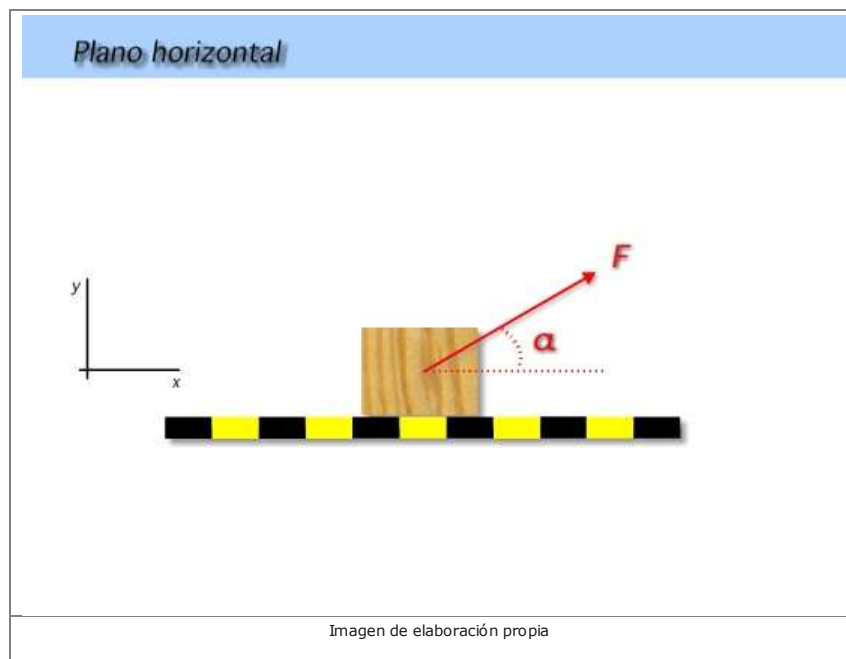
1.1 Plano horizontal



El caso más simple de sistema dinámico que podemos encontrar es aquél en el que un cuerpo se mueve sobre un plano horizontal sin rozamiento con una fuerza F actuando sobre él. Además de dicha fuerza, en un problema de este tipo siempre actuarán dos fuerzas más:

- El peso (p), que en este tema representaremos preferiblemente por su valor $m \cdot g$. Siempre tendrá dirección vertical y hacia abajo.
- La normal (N), correspondiente a la fuerza de reacción de la superficie sobre la que se apoya el cuerpo. En este caso su dirección será, como su nombre indica, perpendicular a la superficie. En el caso de un plano horizontal siempre será vertical y hacia arriba. Esta fuerza tendremos que deducir en cada caso qué valor toma porque es la fuerza de reacción a la que el cuerpo hace sobre el plano.

Una vez identificadas las fuerzas, escogemos el sistema de referencia. El movimiento probablemente será paralelo al plano por lo que tomamos esta dirección y la perpendicular como ejes de nuestro sistema de referencia.



El siguiente paso es descomponer aquellas fuerzas cuya dirección no coincida con alguno de los ejes de coordenadas en sus componentes cartesianas. En este caso, la única fuerza que no coincide es la fuerza F , por lo que procedemos a descomponerla en sus componentes F_x y F_y .

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$
$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

Plano horizontal

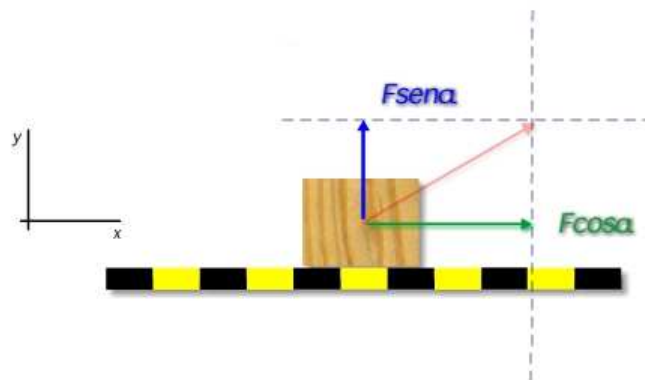


Imagen de elaboración propia

El nuevo esquema con las fuerzas descompuestas en sus ejes quedaría como sigue:

Plano horizontal

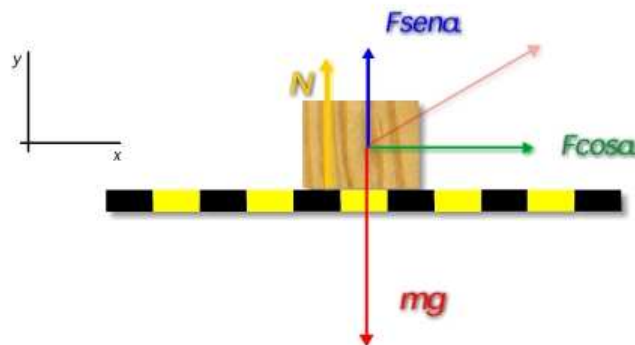


Imagen de elaboración propia

Ya sólo queda escribir las ecuaciones del movimiento en cada uno de los ejes. En cada eje tenemos en cuenta qué fuerzas actúan a favor del movimiento y restamos las que se oponen. En el eje horizontal hay aceleración pero no en el vertical por lo que las ecuaciones quedan:

$$F \cdot \cos\alpha = m \cdot a_x$$

$$F \cdot \text{sen}\alpha + N - m \cdot g = 0$$

Obtenemos así un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (a_x y N). De cada una de las ecuaciones se pueden despejar de forma independiente cada una de ellas y habríamos resuelto el problema.

Ejercicio resuelto

Sobre un objeto de masa 2 kg situado en un plano horizontal se ejerce una fuerza externa de 10 N aplicada con un ángulo de 45° respecto a la horizontal.

masa= 2kg
 $F = 10\text{ N}$

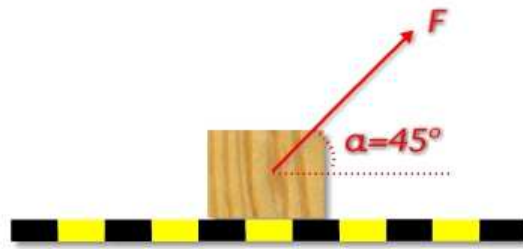


Imagen de elaboración propia

- Dibuja el diagrama de fuerzas correspondiente a esta situación, elige un sistema de referencia y descompón todas las fuerzas en esos ejes.
- Aplica la 2ª ley de Newton.
- Calcula el valor de la fuerza normal.
- Calcula la aceleración que adquirirá el cuerpo por acción de dicha fuerza.

Comprueba lo aprendido

Si al cuerpo del problema resuelto anterior se le aplica una fuerza de 20 N con un ángulo de 35°, el valor de la Normal y de su aceleración serán, respectivamente:

- ☐ 16.24 N y 8.19 m/s²
- ☐ 8.13 N y 8.19 m/s²
- ☐ 16.24 N y 5.21 m/s²

Mostrar retroalimentación

1.2 Fuerzas de rozamiento

Cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie, tarde o temprano acabará parándose; esta afirmación parece contradecir la primera ley de Newton o de la inercia. ¿Cuál es la causa de este comportamiento? La fuerza de rozamiento que se opone al deslizamiento y que es debida a las imperfecciones microscópicas de los materiales. Nos confunde el hecho de que parece que no actúa ninguna fuerza pero hay una fuerza, la del rozamiento, que se opone al deslizamiento de un cuerpo sobre otro y que explica, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la existencia de un cambio en el estado de movimiento.

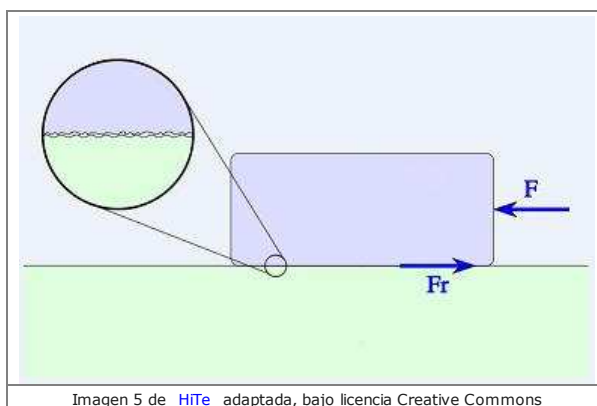


Imagen 5 de [Hite](#) adaptada, bajo licencia Creative Commons

Importante

Por fuerza de rozamiento se entiende toda fuerza que se opone al deslizamiento de un objeto debido a las interacciones entre las superficies de contacto y/o el medio en el que se desplaza.

Al realizar un estudio experimental de una fuerza de rozamiento, se encuentran las siguientes características:

- Toda fuerza de rozamiento tiene la dirección de la superficie de contacto y sentido contrario al posible deslizamiento.
- El valor de su módulo toma valores desde cero hasta un valor máximo, que coincide con la fuerza mínima para iniciar el movimiento.
- Una vez ha comenzado el movimiento, el valor del módulo disminuye hasta un valor determinado que permanece constante mientras el cuerpo siga moviéndose.
- La fuerza de rozamiento no depende del área de contacto entre superficies.

De estos resultados podemos deducir la existencia de una constante de proporcionalidad entre fuerza de rozamiento y la Normal, que denominaremos **coeficiente de rozamiento** y representaremos por la letra griega μ . Además, existen dos tipos de fuerza de rozamiento:

- Fuerza de rozamiento estático, que actúa sobre los cuerpos en reposo, caracterizada por el coeficiente de rozamiento estático μ_e .
- Fuerza de rozamiento dinámico, que actúa sobre los cuerpos en movimiento, caracterizada por el coeficiente de rozamiento dinámico μ_d .

Importante

Según lo visto, el valor de la fuerza de rozamiento es variable. Mientras no haya deslizamiento, la fuerza de rozamiento coincide con las fuerzas aplicadas en la dirección del deslizamiento hasta alcanzar un valor máximo:

$$F_{Re\ max} = \mu_e \cdot N$$

Cuando se produce deslizamiento la fuerza de rozamiento se puede calcular como:

$$F_{Rd} = \mu_d \cdot N$$

Se cumple que para un mismo par de superficies que el coeficiente de rozamiento dinámico es menor que el estático.

Ejercicio resuelto

Vamos a practicar un poco con el siguiente simulador para ver si has conseguido comprender cómo se manifiesta la fuerza de rozamiento.

Aplica una fuerza pequeña, 10 N por ejemplo, sobre el cuerpo del siguiente simulador y pulsa sobre comenzar. ¿Qué ocurre?

¿Cómo es posible que el cuerpo no se mueva si estoy aplicando una fuerza sobre él?

¿Cuál es esa fuerza?

Reinicia y aplica una fuerza de 20 N. ¿Qué ocurre?

Reinicia y aplica una fuerza de 40 N. ¿Qué ocurre ahora?

¿Qué valor tendrá la fuerza de rozamiento en la situación anterior?

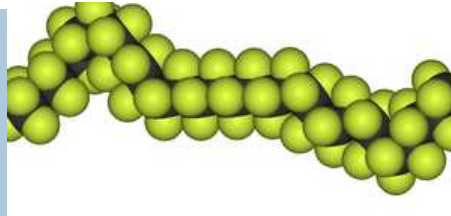
Reinicia y aplica una fuerza de 50 N. ¿Qué valor tiene la fuerza de rozamiento en este caso?

Cuando el objeto se está moviendo, ¿qué ocurre con el valor de la fuerza de rozamiento?

¿Se puede afirmar con carácter general que la fuerza de rozamiento coincide en módulo con el producto del coeficiente de rozamiento y el valor de la fuerza normal?

Reinicia de nuevo y mueve el cursor de la fuerza aplicada hasta que te ubiques en el punto A de la gráfica. ¿Qué ocurre? ¿Cuánto vale en este caso la fuerza de rozamiento máxima? ¿Cómo se puede calcular este valor?

Curiosidad



Molécula de teflón. Imagen libre de derechos procedente de [Wikipedia](#)

El rozamiento nunca puede llegar a eliminarse completamente. Sin embargo, es posible reducirlo drásticamente mediante el uso de materiales específicos. La química moderna nos ha proporcionado sustancias que permiten un rozamiento mínimo: uno de estos materiales es el politetrafluoroetileno, más conocido por su nombre comercial **Teflón**.

Se trata de un material impermeable con un índice de fricción mínimo, lo que provoca que cualquier sustancia situada sobre él resbale, lo que le da su característica antiadherencia y de ahí su uso en sartenes y cacerolas. Como curiosidad, también se utiliza en piercings e implantes para evitar alergias y enganches con la ropa.

Puedes conocer más cosas sobre el politetrafluoroetileno en el siguiente [enlace](#).

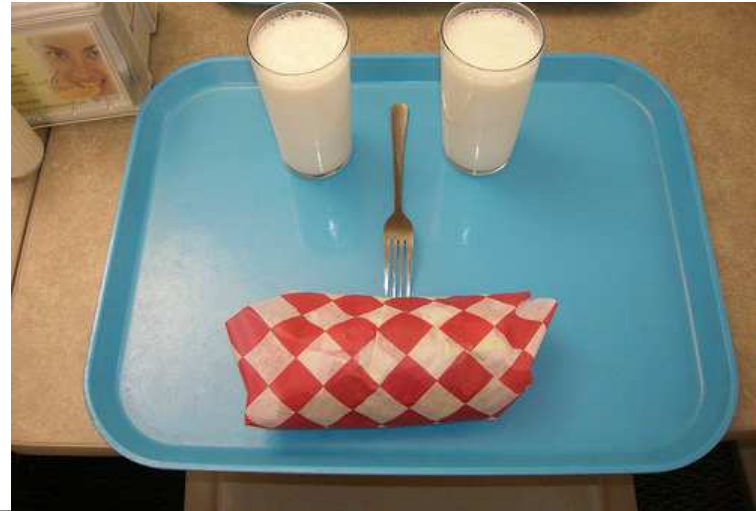
Comprueba lo aprendido

Marca las afirmaciones sobre el rozamiento que sean correctas:

- ☐ Un cuerpo en reposo no sufre nunca rozamiento.
- ☐ El coeficiente de rozamiento estático siempre es mayor que el coeficiente de rozamiento dinámico.
- ☐ La fuerza de rozamiento estático siempre es mayor que la fuerza de rozamiento dinámico.

Mostrar retroalimentación

Ejercicio resuelto



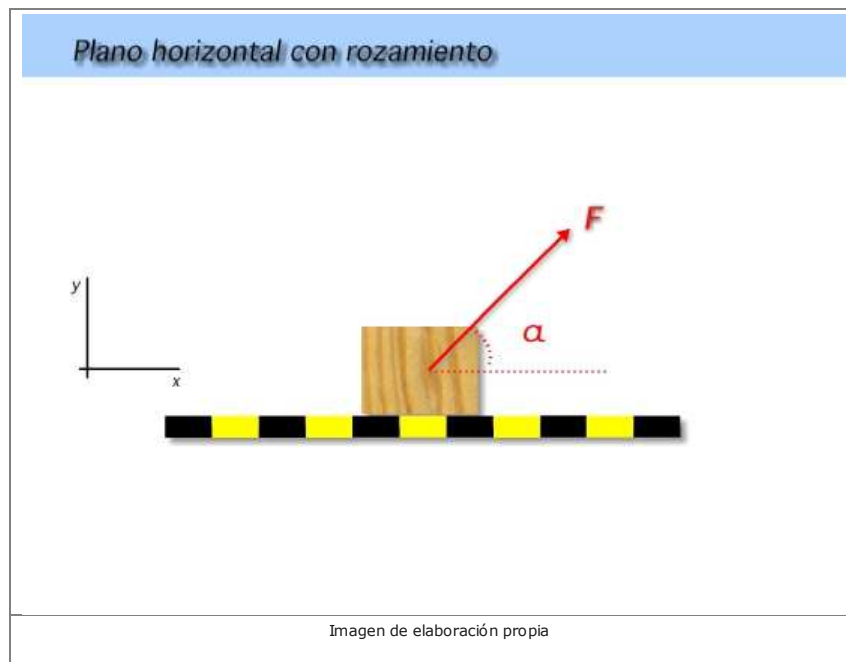
Algunos derechos reservados por [steakpinball](#)

Es muy frecuente escuchar la frase "el rozamiento siempre se opone al movimiento". Claro como muchos objetos se paran por culpa del rozamiento... Pero piensa en una situación muy cotidiana: ¿qué fuerza nos permite transportar objetos en una bandeja?

Haz un esquema y dibuja las fuerzas que actúan sobre un objeto situado sobre la bandeja.

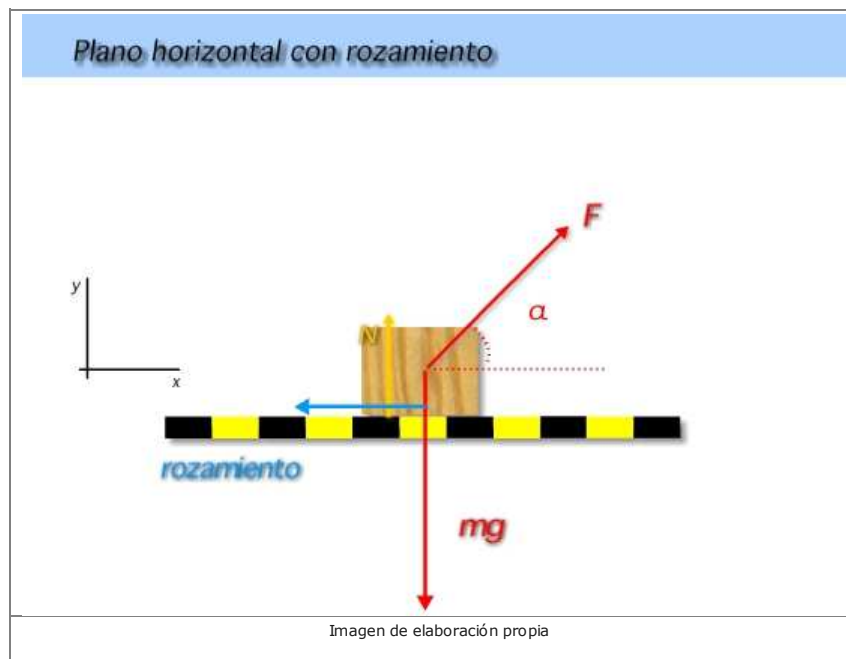
¿Qué es más correcto: decir que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento o al deslizamiento entre superficies?

1.3 Plano horizontal con rozamiento



Ahora vas a estudiar un caso un poco más complicado del problema anterior. Vamos a estudiar el movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza que se desliza sobre un plano horizontal con rozamiento. En principio supondremos que la fuerza aplicada es suficiente para modificar el estado de movimiento del objeto que originalmente está en reposo. De este modo podemos aplicar la fórmula para calcular la fuerza de rozamiento F_R que se opondrá al posible deslizamiento de ambas superficies.

Hacemos un esquema y dibujamos todas las fuerzas que actúan sobre nuestro cuerpo.



Elegimos un sistema de referencia adecuado y descomponemos las fuerzas que no sean paralela a ninguno de ambos ejes en sus componentes cartesianas.

Plano horizontal con rozamiento

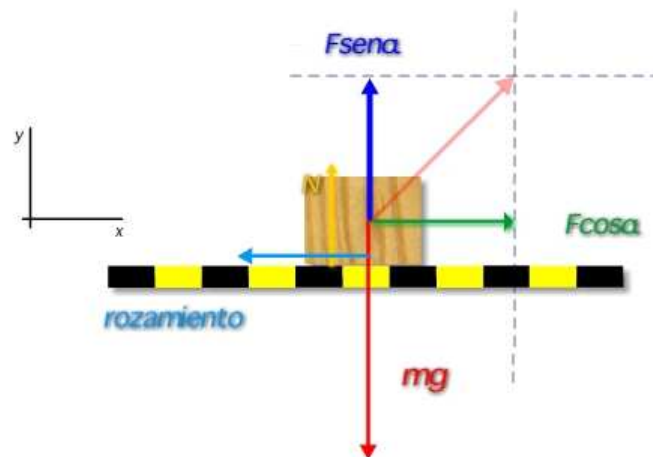


Imagen de elaboración propia

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

Ahora aplicamos la 2ª ley de Newton a ambos ejes. En el vertical supondremos que no hay aceleración:

$$F \cdot \cos \alpha - F_R = m \cdot a_x$$

$$F \cdot \sin \alpha + N - m \cdot g = 0$$

Teniendo en cuenta que el valor de la fuerza de rozamiento en este caso, en que suponemos que el cuerpo está deslizando, es $F_R = \mu \cdot N$, puede escribirse:

$$F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot N = m \cdot a_x$$

$$F \cdot \sin \alpha + N - m \cdot g = 0$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que puedes resolver fácilmente.

Importante

En los problemas con rozamiento debes recordar siempre que existen dos tipos de coeficiente de rozamiento (μ), y utilizar uno u otro en función del caso que tengas que resolver:

- Si el cuerpo no ha comenzado a moverse la fuerza de rozamiento tiene un valor desconocido y será una de las incógnitas del problema.
- Si el cuerpo está a punto de moverse o quieres calcular en qué momento comienza a hacerlo utilizarás el coeficiente de rozamiento estático (μ_e).
- Si el cuerpo ya se encuentra en movimiento, utilizarás el coeficiente de rozamiento dinámico (μ_d).

Ejercicio resuelto



ⓘⓂ Algunos derechos reservados por Sebastián-Dario

Un automóvil de 1000 kg de masa recibe la propulsión de su motor como una fuerza en dirección horizontal. Sabiendo que los coeficientes de rozamiento estático y dinámico de sus neumáticos con el asfalto en seco son $\mu_e = 0.8$ y $\mu_d = 0.6$ respectivamente, se pide que respondas a las siguientes cuestiones:

- a) Dibuja el diagrama de fuerzas y escribe las ecuaciones correspondientes a la situación planteada.
- b) ¿Qué fuerza mínima deberá suministrar el motor para que el automóvil comience a moverse?
- c) ¿Cuál será la fuerza necesaria para mantener el movimiento con velocidad constante?
- d) ¿Cuál será la aceleración que imprimirá al automóvil una fuerza de 10000 N?
- e) De repente, el conductor observa un obstáculo en la calzada a una distancia de 250 m. Si la velocidad en ese momento es de 90 km/h y el conductor coloca la marcha en punto muerto, ¿qué fuerza de frenado mínima (F) deberá ejercerse para que el vehículo no colisione con el obstáculo?

Reflexiona

Cuando el asfalto está mojado, el coeficiente de rozamiento disminuye drásticamente hasta valores tan bajos como $\mu_e = 0.3$ y $\mu_d = 0.25$ respectivamente. ¿Cómo variarán las fuerzas necesarias respecto a las calculadas en el apartado anterior? ¿Será esto positivo a la hora de la conducción del automóvil?



Imagen de Dash bajo licencia Creative Commons BY SA

1.4 Plano inclinado

La mayor parte de los movimientos no tienen lugar en un plano horizontal, sino que presentan un cierto desnivel. Una buena aproximación para estos casos consiste en suponer que nuestro móvil se desplaza sobre un plano inclinado.

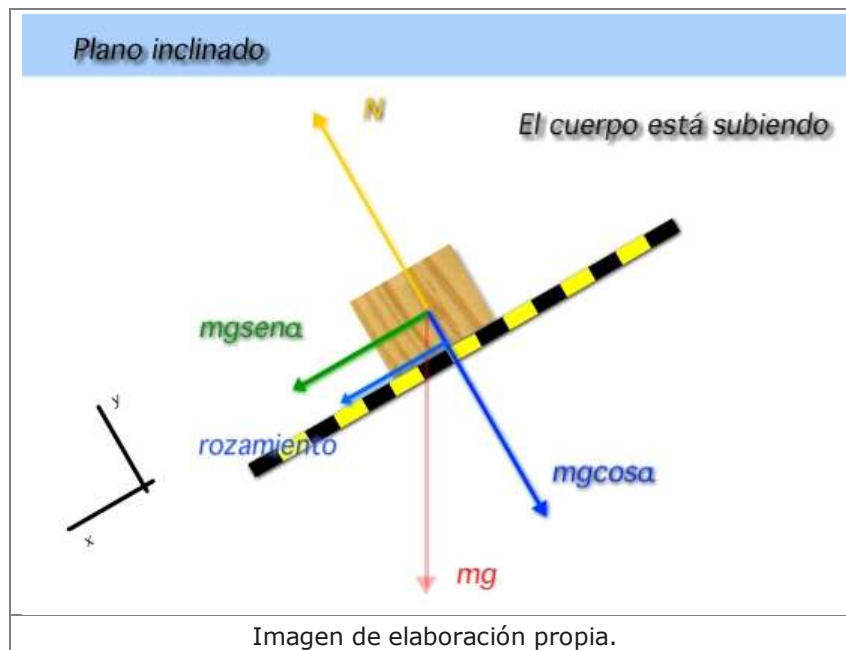
¿Tenemos fuerzas diferentes a las ya estudiadas? Pues no. Están presentes la fuerza peso (ejercida por el planeta Tierra), la fuerza Normal (ejercida por el plano), la fuerza de rozamiento y en algunos casos una fuerza aplicada. Sin embargo la presencia de un plano inclinado nos fuerza a cambiar el sistema de referencia y tomar los ejes en la dirección paralela y perpendicular a dicho plano. Como consecuencia tendremos que calcular las componentes cartesianas de la fuerza peso que ya no estará alineada con ningún eje.

Reflexiona

Manipula el siguiente simulador variando el ángulo del plano inclinado y responde a las siguientes preguntas:

1. A medida que aumentamos el ángulo de inclinación del plano, ¿cómo varía la componente del peso paralela al plano?
2. A medida que aumentamos el ángulo de inclinación del plano, ¿cómo varía la componente del peso perpendicular al plano?

Estudiaremos primero el caso de un cuerpo que asciende por un plano inclinado con rozamiento.



Aplicamos la segunda ley de Newton a cada eje teniendo en cuenta qué fuerzas actúan a favor y en contra:

$$-m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha - F_R = m \cdot a_x$$

$$N - m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha = 0$$

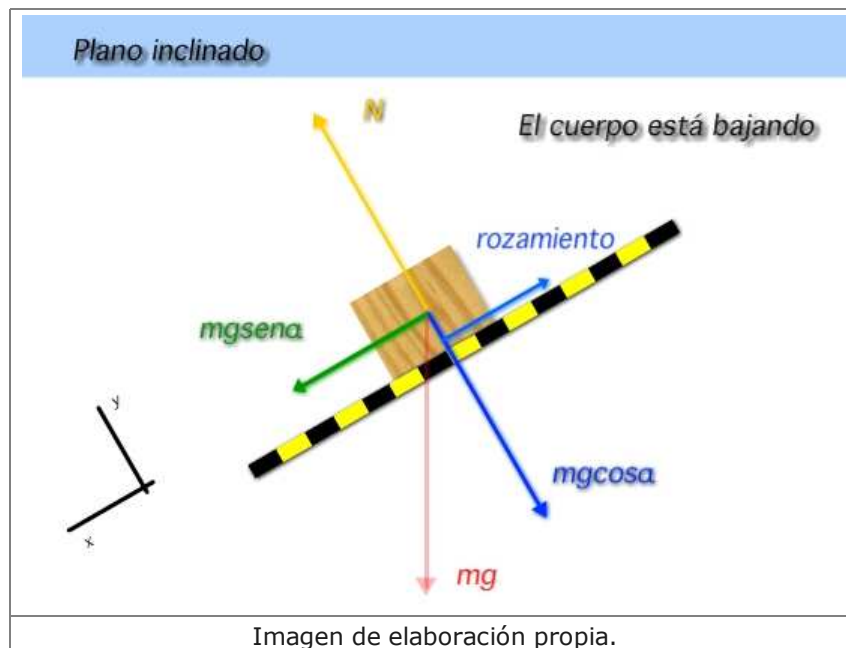
Sustituyendo la fuerza de rozamiento por su valor como producto del coeficiente de rozamiento por la normal, se obtiene:

$$-m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha - \mu \cdot N = m \cdot a_x$$

$$N = m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha$$

Calculando el valor de la normal con la segunda ecuación y sustituyendo en la primera ecuación podemos desear la aceleración del cuerpo que evidentemente será negativa. Esto quiere decir que al cabo de un tiempo la velocidad se hará cero y el cuerpo se parará.

Veamos ahora qué ocurre cuando el cuerpo desciende por un plano inclinado con rozamiento.



Aplicamos la segunda ley de Newton a cada eje teniendo en cuenta qué fuerzas actúan a favor y en contra:

$$m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha - F_R = m \cdot a_x$$

$$N - m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha = 0$$

Sustituyendo la fuerza de rozamiento por su valor como producto del coeficiente de rozamiento por la normal, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$m \cdot g \cdot \text{sen} \alpha - \mu \cdot N = m \cdot a_x$$

$$N = m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha$$

Calculando el valor de la normal con la segunda ecuación y sustituyendo en la primera ecuación podemos desear la aceleración del cuerpo. Dependiendo del ángulo de inclinación y del coeficiente de rozamiento tendremos una aceleración positiva o negativa.

Ejercicio resuelto

Vamos a analizar el caso de un cuerpo que asciende o desciende por un plano inclinado con rozamiento. Supongamos primero que el cuerpo está subiendo.

1. Fija un ángulo de 20° . En la dirección perpendicular al plano, ¿hay aceleración? ¿Qué puedes concluir gracias a este dato?
2. Al hacer crecer el ángulo de inclinación del plano inclinado, ¿cómo varía el valor de la Normal?
3. Al aumentar el ángulo de inclinación, ¿cómo varía la fuerza de rozamiento?
4. ¿Por qué la aceleración en la dirección paralela al plano es negativa cuando el cuerpo asciende?
5. Supón ahora que el cuerpo está descendiendo, ¿hacia adónde apunta ahora la fuerza de rozamiento?
6. Modifica el ángulo de inclinación. ¿Qué ocurre con el signo de la aceleración?

Comprueba lo aprendido

Un camión se encuentra en una cuesta. El motor del camión ejerce una fuerza hacia arriba cuando este asciende.

Para una inclinación de 15° , si la fuerza del motor es , las fuerzas en contra del movimiento son que las fuerzas a favor por lo que la aceleración es negativa . El camión irá hasta pararse.

Para la misma inclinación, si la fuerza del motor es , las fuerzas del movimiento son mayores que las fuerzas por lo que la aceleración es positiva . El camión irá subiendo cada vez con .

Enviar

Para saber más

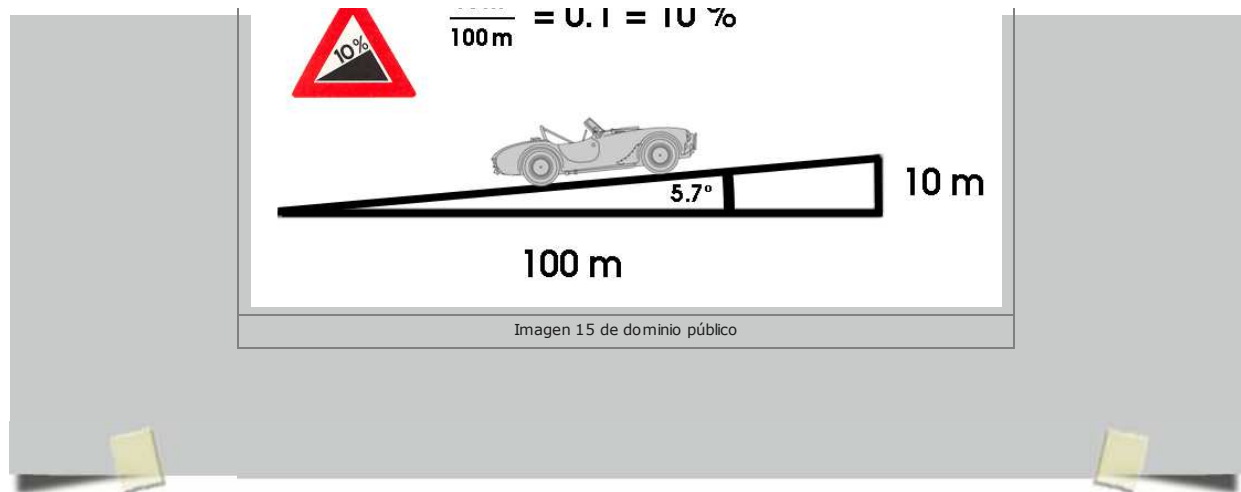
Habitualmente, en deportes como el ciclismo no se habla del ángulo de inclinación de una carretera o pista, sino que se indica en forma de porcentaje. Así, es normal escuchar cómo la parte más dura de un puerto tiene un desnivel del 12%, u observar una señal que indica **pendiente** prolongada del 5% durante los próximos 2 kilómetros. ¿Qué significan estos porcentajes?

Los topógrafos utilizan una fórmula que relaciona la distancia horizontal recorrida con la vertical:

$$\% \text{ Pendiente} = \text{Distancia en vertical} \cdot 100 / \text{Distancia en horizontal}$$

Sin embargo, no es sencillo calcular la distancia en horizontal que hemos recorrido, por lo que, dado que los ángulos en carretera no suelen ser muy grandes, puede tomarse el espacio recorrido sobre ella en lugar de la distancia en horizontal, ya que el error en estos casos es mínimo. Así, la fórmula habitual para calcular el ángulo a partir del desnivel es:

$$\text{sen } \alpha = (\text{metros ascendidos} / \text{metros recorridos}) \rightarrow \alpha = \arcsen (\text{metros ascendidos} / \text{metros recorridos})$$



Ejercicio resuelto

Una motorista se encuentra ascendiendo un puerto con una pendiente constante del 5%. Si la masa total del conjunto motorista-moto es de 300 kg, responde a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la carretera respecto a la horizontal?
- Dibuja el esquema de fuerzas que actúan sobre el sistema.
- Calcula el valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el asfalto para que la moto, con el motor apagado y completamente frenada, no comience a deslizarse hacia abajo.
- Determina la fuerza que deberá realizar el motor para subir con velocidad constante, supuesto un coeficiente de rozamiento $\mu_{di} = 0.5$

2. Cuerpos enlazados



Puente Ibn Fírnás en Córdoba



Algunos derechos reservados por Paco Lozano

Hasta ahora se han tratado casos de sistemas dinámicos simples en los que existía un único cuerpo, pero ésta no es la situación más común que podemos encontrarnos. La mayor parte de dispositivos y máquinas que podemos observar a nuestro alrededor están formadas por distintas partes interrelacionadas entre sí, de tal forma que algún fallo o problema en cualquiera de ellas lleva asociado que el sistema en su conjunto deje de funcionar. Estos sistemas dinámicos formados por más de un cuerpo, son más complejos de estudiar que los sistemas de un único cuerpo.

Piensa en el caso de un vehículo con remolque. La fuerza de tracción del vehículo se transmite mediante el uso de un cable, cuerda o cadena. Esto ocurre porque el cuerpo que une al vehículo y al remolque se **tensa**.

Importante

Denominaremos **tensión** a la fuerza de interacción ejercida entre dos cuerpos cuando uno de ellos transmite un movimiento a otro mediante un dispositivo material. Esta tensión se representará por **T** y se trata de una fuerza de acción-reacción sobre el intermediario, normamente una cuerda o cable.

Para simplificar el estudio, las cuerdas y cables utilizados en toda esta sección serán "ideales", es decir no tendrán masa y serán inextensibles y capaces de soportar cualquier tensión.

Importante

Los cuerpos que están enlazados se mueven con la misma velocidad y aceleración, coincidiendo por tanto el

Para simplificar el estudio, las cuerdas y cables utilizados en toda esta sección serán "ideales" con las siguientes características:

- No tendrán masa (luego no habrá fuerza peso)
- Serán inextensibles (y por lo tanto no almacenarán energía elástica en su interior y las distancias serán constantes)
- No se romperán (capaces por tanto de soportar cualquier tensión)

Evidentemente, esto no es así en la vida real, pero supone una simplificación aceptable en cuanto permite el estudio de los cuerpos enlazados con unas ecuaciones mucho más sencillas, ya que con estas condiciones podemos afirmar que las tensiones son iguales en los extremos.

Veamos la razón:



La ecuación correspondiente a la cuerda es $T - T' = m \cdot a$, pero dado que la cuerda no tiene masa ($m = 0$), entonces $T = T'$ y por tanto las tensiones son exactamente iguales.

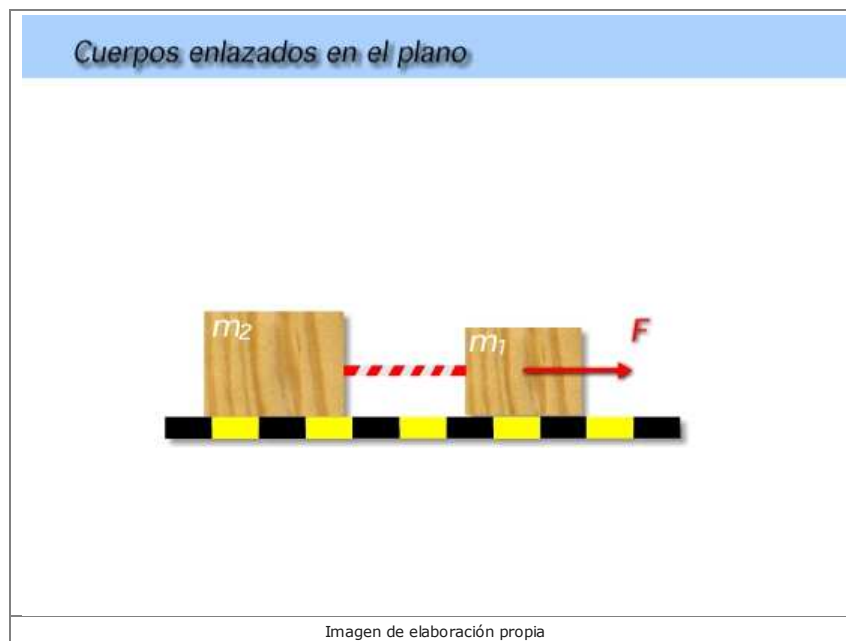
En resumen, podemos afirmar:

Importante

Los cuerpos que están enlazados se mueven con la misma velocidad y aceleración, coincidiendo por tanto el espacio recorrido por cada uno de ellos. Además las tensiones en los extremos de la cuerda son iguales y de sentido contrario.

2.1 Plano horizontal

El ejemplo más sencillo de cuerpos enlazados es el conjunto vehículo-remolque. Esta situación se presenta en situaciones como en un tren, entre la locomotora y los vagones que arrastra, o en un coche que remolca una caravana.



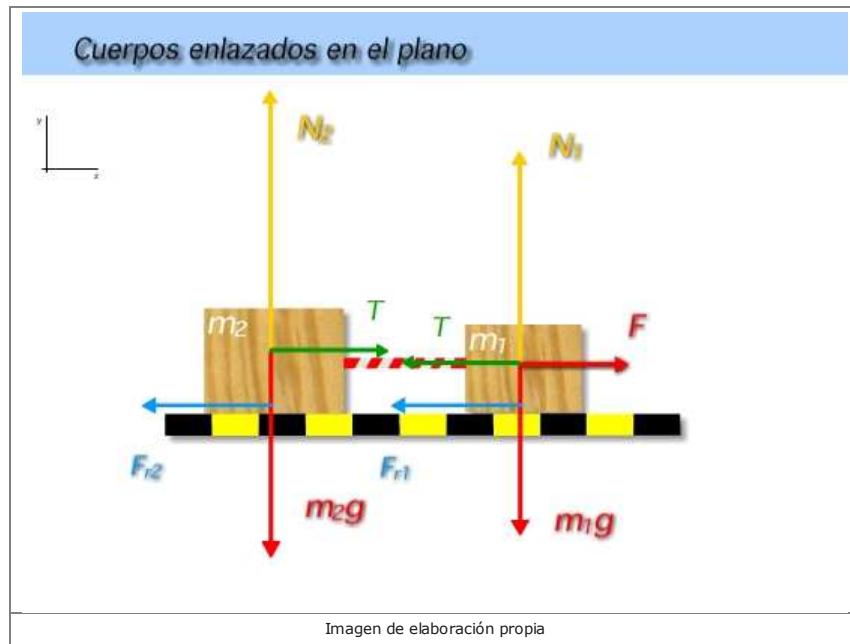
Importante

A la hora de resolver un problema de aplicación de las leyes de la dinámica en un sistema de cuerpos enlazados, es importante que sigas ordenadamente las siguientes pautas:

1. Identifica los distintos cuerpos que intervienen en el problema (recuerda que, en lo que a este tema se refiere, las cuerdas no son cuerpos como tales, sino simplemente el medio transmisor de la fuerza de Tensión)
2. Identifica las fuerzas que se ejercen sobre cada cuerpo, así como su origen, tipo y dirección. Ten en cuenta que la Tensión es una fuerza de acción y reacción aplicada en ambos extremos de la cuerda con sentido contrario en cada cuerpo.
3. Dibuja un diagrama de fuerzas lo más simple posible, pero que contenga toda la información que se haya suministrado. El punto de aplicación de todas las fuerzas será el centro geométrico del cuerpo sobre el que actúan.
4. Escoge un sistema de referencia cartesiano de forma que uno de los ejes coincida con la dirección esperada de movimiento del conjunto. Este sistema de referencia debe ser el mismo para todos los cuerpos intervinientes.
5. Descompón todas las fuerzas en sus componentes según los ejes del sistema de referencia.
6. Aplica la segunda ley de Newton para cada uno de los cuerpos por separado y en cada uno de los ejes.

¿Qué cambia respecto al tratamiento que hemos dado al problema de un cuerpo sobre una superficie horizontal? Pues evidentemente ahora tenemos dos cuerpos por lo que tendremos que aplicar la 2ª ley de Newton a ambos cuerpos y además tenemos una fuerza nueva, la Tensión de la cuerda, que actúa sobre ambos cuerpos. De hecho la cuerda tira hacia atrás del cuerpo 1 en reacción a la fuerza hacia delante que ejerce este sobre la cuerda, y esta fuerza se transmite íntegramente (por eso decimos que la cuerda se comporta de forma ideal) al segundo cuerpo.

Si dibujamos todas las fuerzas el diagrama quedaría como muestra la siguiente imagen:



En este caso todas las fuerzas son horizontales o verticales por lo que tomando como sistema de referencia los ejes en dirección paralela y perpendicular al plano, no necesitamos descomponer ninguna de las fuerzas presentes. Ahora tenemos que hacer un balance de las fuerzas a favor y en contra en cada cuerpo y en cada eje. Supondremos si hay desplazamiento este ocurrirá en la dirección paralela al plano por lo que la aceleración vertical es cero. Según esto, se pueden escribir las ecuaciones dinámicas de cada uno de los cuerpos:

Cuerpo 1:

$$F - T - F_{r1} = m_1 \cdot a_1$$

$$N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

Cuerpo 2:

$$T - F_{r2} = m_2 \cdot a_2$$

$$N_2 - m_2 \cdot g = 0$$

Suponiendo que el conjunto de ambos cuerpos se mueve, sabemos que existe una relación entre la fuerza normal y la fuerza de rozamiento:

$$F_{r1} = \mu \cdot N_1$$

$$F_{r2} = \mu \cdot N_2$$

Si sustituimos en las ecuaciones anteriores obtendremos:

Cuerpo 1:

$$F - T - \mu \cdot N_1 = m_1 \cdot a_1$$

$$N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

Cuerpo 2:

$$T - \mu \cdot N_2 = m_2 \cdot a_2$$

$$N_2 - m_2 \cdot g = 0$$

Normalmente la fuerza F será un dato del problema y tendremos que determinar la aceleración de ambos cuerpos. Si te fijas tenemos 4 ecuaciones y 5 incógnitas (T , N_1 , N_2 , a_1 , a_2). ¿Imposible de resolver? No, suponemos que ambos cuerpos, al estar unidos por la cuerda, se desplazan de forma solidaria y por lo tanto tenemos una única aceleración. De la segunda y la cuarta ecuación podemos despejar el valor de las normales N_1 y N_2 y sustituir en las ecuaciones 1 y 3.

Cuerpo 1:

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$F - T - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$

Cuerpo 2:

$$N_2 = m_2 \cdot g$$

$$T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

Si te fijas ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la tensión (T) y la aceleración (a).

$$F - T - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$

$$T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

Despejando la tensión de una...

$$T = m_2 \cdot a + \mu \cdot m_2 \cdot g$$

y sustituyendo en la otra podríamos despejar la aceleración y conocida esta podríamos determinar el valor de todas las demás fuerzas desconocidas.

$$F - m_2 \cdot a - \mu \cdot m_2 \cdot g - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$

$$F - \mu \cdot m_2 \cdot g - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$F - \mu \cdot (m_1 + m_2) \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$a = \frac{F - \mu \cdot (m_1 + m_2) \cdot g}{(m_1 + m_2)}$$

Ten en cuenta de que en los problemas que tengas que resolver, normalmente, sustituirás los valores de cada dato y no tendrás que manejar expresiones tan complejas. Lo importante es que entiendas el procedimiento general que esencialmente consiste en dibujar las fuerzas a los dos cuerpos, aplicar la 2ª ley de Newton a ambos y resolver el problema matemático que no es nada complejo.

Ejercicio resuelto

Un camión ligero de masa 10000 kg arrastra un remolque cargado cuya masa total es de 5000 kg. El motor del camión ejerce una fuerza de 80000 N. Si el coeficiente de rozamiento dinámico entre el suelo y los neumáticos es $\mu_d = 0.4$:

- Dibuja el diagrama de fuerzas correspondiente y escribe las ecuaciones dinámicas.
- Calcula la aceleración con que se mueve el conjunto.
- ¿Cuál es la tensión que soporta el enganche entre el camión y el remolque?

Reflexiona

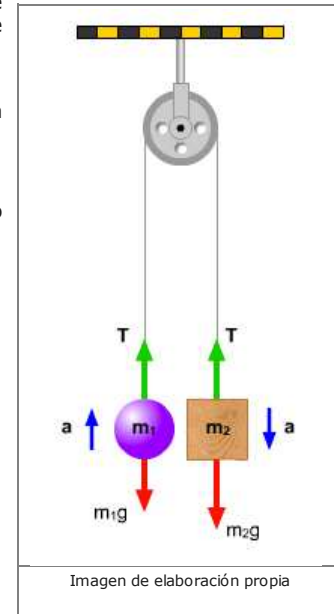
El conjunto camión y remolque del ejercicio anterior circula sobre una placa de hielo que provoca la desaparición de las fuerzas de rozamiento. Si la fuerza realizada por el motor sigue siendo la misma, ¿qué aceleración alcanzará el conjunto? ¿Cuál será la tensión del enganche en esta situación?

2.2 Movimiento vertical

Dentro del conjunto de sistemas dinámicos formados por cuerpos enlazados, otro caso de particular interés es el de la polea, que nos permite elevar un cuerpo más cómodamente al poder aplicar la fuerza hacia abajo.

La polea más sencilla es la polea simple, que transmite directamente la fuerza realizada sobre la cuerda hasta el cuerpo, tal y como se indica en la imagen.

De nuevo la cuerda no tiene masa, es inextensible y no existe rozamiento de ningún tipo entre la polea y la cuerda.



Ejercicio resuelto

Vamos a experimentar un poco con el siguiente simulador.

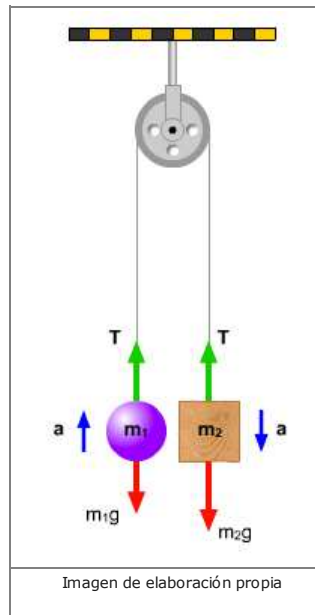
Fija la masa del primer cuerpo en 15 kg y varía la masa del segundo. ¿Cómo varía la tensión?

¿Hacia adónde se mueve el sistema?

¿Qué ocurre cuando las dos masas son iguales?

Ejercicio resuelto

La máquina de Atwood es una máquina simple de primera especie cuyo esquema se indica en la figura. Las masas que cuelgan de la máquina miden 20 y 10 kg respectivamente.



- Escribe las ecuaciones del movimiento del sistema.
- ¿Cuál será el valor de la aceleración?
- ¿Cuánto vale la tensión de la cuerda?

Comprueba lo aprendido

Tenemos una máquina de Atwood en la que las masas de los cuerpos son, respectivamente, $m_1 = 2 \text{ kg}$ y $m_2 = 8 \text{ kg}$.

¿Qué aceleración experimentará el sistema al dejarlo en libertad?

- ☐ 10.25 m/s^2
- ☐ 11.76 m/s^2
- ☐ 5.88 m/s^2

¿Cuál será la tensión de la cuerda?



- ☐ 28.56 N
- ☐ 31.36 N
- ☐ 20.45 N

2.3 Plano inclinado

Una vez vistos los ejemplos generales de cuerpos enlazados en una dimensión, es momento de ver el caso más complejo que trataremos en esta unidad: dos cuerpos enlazados en un plano inclinado. Este problema no exige ningún conocimiento especial distinto de los que ya se han estudiado, únicamente presenta una mayor dificultad en el sentido de que algunas fuerzas no actúan en las direcciones de los ejes elegidos, y exige aplicar lo aprendido tanto en el estudio de los planos inclinados como en el de la dinámica de cuerpos enlazados. Por ello resulta un buen candidato para finalizar el tema y servir de repaso de lo anterior.

Para facilitar su estudio, nos serviremos de un applet java, de funcionamiento muy sencillo, en el que únicamente hay que completar los datos en la fila superior, y en la inferior obtendremos los valores de las fuerzas para cada uno de los cuerpos, la aceleración del sistema y, encima de la puleya, el sentido de movimiento.

En el caso particular que ves, los parámetros son: $m_1 = 8 \text{ kg}$, $m_2 = 12 \text{ kg}$; los ángulos de las paredes: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ y los coeficientes de rozamiento $\mu_{es} = 0.4$ y $\mu_{di} = 0.3$.

Con estos valores, el conjunto se mueve hacia la derecha con $a = 1.23 \text{ m/s}^2$ y el valor de la tensión de la cuerda es de 69.49 N

Animación 2 de [Tavi Casellas \(fslab.net\)](http://fslab.net) de libre distribución.

Para resolver analíticamente el caso que ves, basta con considerar el estudio del sistema en dos planos inclinados, teniendo en cuenta que la tensión y la aceleración serán las mismas para cada uno de los cuerpos.

Pero vas a resolver un caso algo más simple, en el que una de las paredes es perpendicular al suelo. El esquema de fuerzas será similar al que puedes observar al lado de estas líneas.

En esta ocasión los ángulos serán $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$.

En primer lugar se escriben las ecuaciones correspondientes a cada uno de los cuerpos; para el cuerpo situado en el plano inclinado, éstas serán las generales del plano inclinado que ya se calcularon sin más que sustituir F por la tensión T , resultando:

$$\begin{aligned}T - m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot N &= m \cdot a \\ N &= m \cdot g \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

Para el segundo cuerpo, las ecuaciones son mucho más simples por tratarse de un sistema en una única dirección. Lo único que debe tenerse en cuenta es que, como se ha tomado como sentido positivo en el primer cuerpo el de la tensión, en el segundo cuerpo el sentido positivo será aquel en el que la aceleración es hacia abajo, ya que según hemos visto deberán ser iguales. Por todo ello las ecuaciones quedarán:

$$m' \cdot g - T = m' \cdot a$$

en la hay que destacar que tanto la tensión (T) como la aceleración (a) son iguales para ambos cuerpos.

Ejercicio resuelto

En el problema descrito anteriormente ($\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$) las masas de los cuerpos son $m = 8 \text{ kg}$ y $m' = 5 \text{ kg}$. Si los coeficientes de rozamiento son $\mu_{es} = 0.5$ y $\mu_{di} = 0.2$,

a) ¿El sistema se moverá o permanecerá en reposo? ¿Cuál será el valor de la tensión de la cuerda (T)? Comprueba los resultados con el simulador.

b) Si se duplica la masa que cuelga (ahora $m' = 10 \text{ kg}$), ¿se moverá el sistema? En caso afirmativo, ¿cuál será ahora la tensión de la cuerda? ¿Con qué aceleración se moverá? Comprueba los resultados con el simulador.

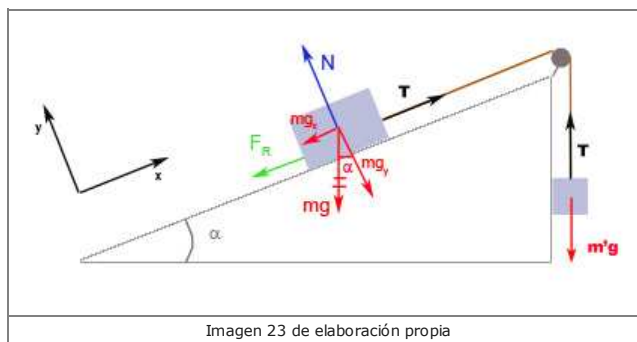


Imagen 23 de elaboración propia

Reflexiona

Con la configuración del plano inclinado anterior ($\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$ y coeficientes de rozamiento $\mu_{es} = 0.5$ y $\mu_{di} = 0.2$) colocamos un sistema enlazado de cuerpos en el que el cuerpo colgante tiene una masa $m' = 1$ kg. En el plano inclinado vamos colocando sucesivamente pesas de 1 kg. ¿Cuál será la masa (m) mínima del cuerpo situado en el plano inclinado para que el sistema comience a moverse hacia la izquierda, es decir, para que el cuerpo colgante comience a subir? Utiliza el simulador para encontrar la solución.