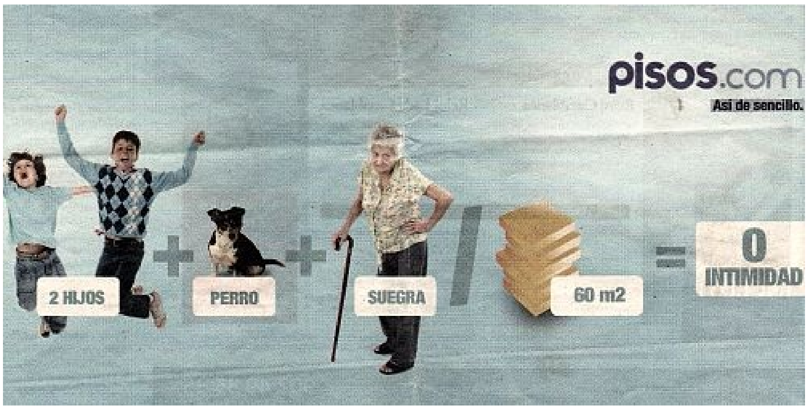
Mira el siguiente anuncio de una empresa dedicada a la venta de pisos.



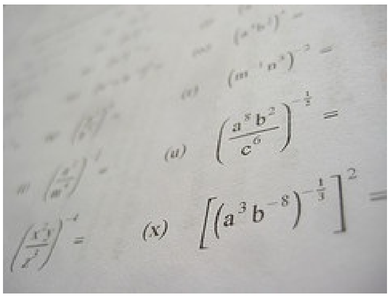
¿Qué mensaje han querido transmitir? ¿por qué han utilizado símbolos matemáticos?

La respuesta a la primera pregunta es fácil. Dos hijos, la mascota, la abuela y poco espacio en la casa tienen como consecuencia: intimidad nula. En lo que respecta al uso de símbolos matemáticos, su aparición ayudan a dar una información clara, precisa, sin lugar para ambigüedades.

Ese es uno de los objetivos que fue dando forma a lo largo de la historia al lenguaje matemático que es el **álgebra**: la utilización de **símbolos** que sirvieran para hacer más fácil y universal comunicar las ideas matemáticas.

En este tema y el siguiente hablaremos de simbolización, del uso de las letras para generalizar a los números, de operaciones con expresiones literales y de ecuaciones. En definitiva, de cómo el lenguaje algebraico nos puede ayudar a modelizar matemáticamente situaciones problemáticas de la vida cotidiana, para así encontrar soluciones más eficaces a las mismas.

Por cierto, no crees que al anuncio le faltan algunos paréntesis. De no ser así, a la única que dividirían entre 60 es a la pobre y achacosa suegra.



15 - September - 2008 -- Maths
de **reway2007,** CC by-nc-sa 2.0

En algunos aspectos de nuestra vida diaria utilizamos símbolos para referirnos a determinadas objetos, mensajes o situaciones. Esto es bastante útil por varias razones:

- **Simplifica notablemente la comunicación**: en lugar de un cartel en el que se lea "Cuando llegue usted a este punto debe detenerse", expresamos lo mismo con una señal de STOP.
- **Es un lenguaje universal**: un español, un japonés o un noruego utilizan diferentes palabras para nombrar al semáforo, o al color rojo, pero todos ellos sabrán lo que tienen que hacer si se encuentran un semáforo en rojo.

En Matemáticas podemos hacer algo parecido utilizando letras en lugar de números. De esta forma conseguiremos obtener fórmulas que nos sirvan para simplificar cálculos, demostrar propiedades que cumplen un conjunto de números (sin tener que hacerlo para cada uno de esos números) y definir regularidades. Todo esto lo veremos en los siguientes apartados.

1.1. Uso de símbolos en la vida cotidiana

Como hemos dicho, en nuestra vida diaria usamos símbolos continuamente. Algunos han surgido como una necesidad de definir algo, como por ejemplo los que usamos para identificar las monedas de diferentes países.

€	$	£	¥
Euro symbol black de **Wikimedia Commons**, CC by 2.0	Dollar-teken de Wikimedia Commons, Dominio Público	Pond-teken de **Wikimedia Commons**, CC GNU Free Documentation License	Yen-teken de **Wikimedia Commons**, CC GNU Free Documentation License

En otros casos, son símbolos que nos sirven para **simplificar la comunicación**:

Información meteorológica	Avisos	Producto reciclable
		
Weather Girl Lorrie de **Ollie T.**, CC by-nc-sa 2.0	High Voltage Warning de **Wikimedia Commons**, CC GNU Free Documentation License	Recycle de **Wikimedia Commons**, CC GNU Free Documentation License

Y a medida que las **nuevas tecnologías** se van desarrollando, aprendemos símbolos que identifican nuevos productos:

USB	Bluetooth	Wi-fi	DVD	Blue-ray
Usb-svg de **Wikimedia Commons**, CC by-sa 2.5	Bluetooth bw de **DBGthekafu**, CC GNU Free Documentation License	Wifi de **WiFi Alliance**, Dominio Público	DVD logo de **DVD Forum**, Dominio Público	Blue-ray Disc logo de **Wikimedia Commons**, Dominio Público

Comprueba lo aprendido

Veamos ahora si conoces los siguientes símbolos matemáticos.

¿Qué representa el símbolo "**-**"?

- [ ] Restar
- [ ] Signo negativo
- [ ] Menor

Solución

1. Correcto
2. Correcto
3. Incorrecto

¿Qué expresa el símbolo " $\mathbb{R}$ "?

- [ ] Es una operación matemática
- [ ] Es un número decimal
- [ ] Es un conjunto de números

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Correcto

¿Qué es el símbolo " $\div$ "?

☐ Un número real

☐ Una operación

☐ Un porcentaje

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

¿Qué significa el símbolo "∏"?

☐ Un número decimal

☐ Una operación

☐ Un conjunto

Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Al-Gorithm de **Heathen Dawn**, CC by-nc-sa 2.0

- ¡Uf, las matemáticas! ¡Qué horror! A mí, sobre todo el álgebra, no se me daba nada bien. Seguro que alguna vez has oído frases de este tipo, al recordar alguien su etapa de estudiante en el colegio

Pero, ¿qué significa esta palabra? ¿cuál es su origen? ¿cómo ha evolucionado en el transcurso de los tiempos?

Podemos considerar el **Álgebra** como la rama de las matemáticas que utiliza números, variables y signos para generalizar las operaciones aritméticas.

Esta palabra proviene del título de un libro. El autor (que aparece en la foto) fue **Muhammad ibn-Musa Al-Khwarizmi**, y la obra, del siglo IX, es "*Hisab **al-jabr** wa'l-muqa-bala*", que se puede traducir por "El libro de completar e igualar", pues enseña a resolver ciertos tipos de ecuaciones mediante ese método.

Aunque no fue hasta este momento que se le da nombre a estos estudios, el álgebra ya había sido investigada en la Antigüedad. En el siglo XVI a.C., en Mesopotamia, Babilonia y Egipto se conocían métodos para resolver ciertas ecuaciones de primer y segundo grado. En el siglo I d.C. aparecen otros métodos de resolución en China. Y en el siglo III, **Diofanto de Alejandría** introduce símbolos elementales para dar cierta rigurosidad al tratamiento de las ecuaciones.

A lo largo de los siglos estos conocimientos se fueron desarrollando por otros matemáticos, como **Nicolás de Tartaglia** o **Givolamo Cardano** (s. XVI), que desarrollaron fórmulas y métodos para resolver, entre otras, ecuaciones de tercer grado; o como **François Viète**, que organizó un sistema unificado de símbolos algebraicos. Otros grandes matemáticos, entre los que se encuentran **Cauchy**, **Gauss** o **Boole**, hicieron sus aportaciones a lo que hoy en día se conoce como Álgebra Moderna.

Curiosidad

Aunque nosotros estamos muy acostumbrados a los signos matemáticos como la suma, la resta o el igual, no son tan antiguos como puedas imaginar.

Los signos + y - no se usaron hasta **1489**, en un libro de Aritmética Mercantil de *Johannes Widmann*. Hasta entonces se escribía una **p** para sumar, y una **m** para restar, que eran las iniciales de las palabras latinas plus y minus.

El signo = no apareció hasta **1557**. Fue *Robert Recorde* quien lo usó por primera vez, y para justificar el uso de este signo escribió: "*Para evitar la tediosa repetición de las palabras es igual a, estableceré como normalmente hago en las hojas de trabajo un par de paralelas, o líneas gemelas de la misma longitud, esto es: =, porque no hay nada que pueda ser más igual* *que dos líneas*".

Para saber más

Si te interesa conocer algo más sobre la Historia del Álgebra, puedes consultar los siguientes enlaces a la Wikipedia y a la Breve Historia del Álgebra de **espegesteira**.

Efectivamente, estamos rodeados de símbolos, y algunos son tan comunes que ni siquiera somos conscientes de las ventajas que tienen su uso. Veamos cómo el uso de símbolos es fundamental en matemáticas.

Ejercicio resuelto

Ana colabora en una asociación como voluntaria. Dependiendo del tiempo del que disponga, puede desarrollar su labor en Jornada Completa (8 horas), a Media Jornada (4 horas) o a Horas Sueltas.

Cada día, cuando los voluntarios llegan a la sede de la asociación, anotan el tipo de jornada que van a dedicar en una ficha como ésta:

<table>
<tr><td>Nombre</td><td colspan="5">Jornada Completa</td><td colspan="5">Media Jornada</td><td colspan="5">Horas sueltas</td></tr>
<tr><td>Ana</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

voluntario, por el conocimiento libreluis de bethencourt, CC by 2.0 de

Y al final del mes, la asociación genera un resumen de la dedicación de sus voluntarios:

Nombre	C	M	S
Ana	4	2	1
Manuel	6	0	2
Javi	1	7	6
Marta	12	1	0

¿Qué crees que significa en esta tabla la letra **M**?

M es el número de días que cada voluntario realiza **Media Jornada**.

Como ves, **C**, **M** y **S** son letras que equivalen a diferentes números según cada caso. En matemáticas, a estas letras las llamaremos **variables**. Las variables no sólo nos sirven para organizar información, sino también para trabajar con números de una forma generalizada. Es decir, no necesito saber cuánto vale **C** para poder hacer determinados cálculos.

Por ejemplo, si a final de mes quiero saber cuántas horas ha dedicado alguien en días a Jornada Completa, tendré que multiplicar el número de días que ha tenido esa jornada (C) por 8, que es el número de horas que se dedican esos días. Es decir: **C·8**

Cuando trabajamos con números y letras, hay algunas reglas que debemos seguir. Una de ellas es que, si multiplicamos un número por una letra, primero escribiremos el número y luego la variable. En nuestro caso quedaría: **8·C**

Otra regla es que, si estamos multiplicando un número por una variable, no es necesario escribir el símbolo del producto. Por lo tanto, el número de horas que dedica alguien mensualmente en Jornadas Completas será **8C**

Sabiendo esto ¿serías capaz de escribir con números y las variables **C**, **M** y **S** cuántas horas dedica un voluntario mensualmente?

H=8C+4M+S

8C es el número de días a Jornada Completa multiplicado por 8, que son las horas que se dedican esos días.

A Media Jornada se colaboran 4 horas, luego el total será 4 por M, es decir 4M.

Las horas sueltas, S, las sumamos al resultado final.

En el caso de Javi, usando el resultado anterior, ¿cuántas horas ha dedicado al mes?

Para Javi C=1, M=7 y S=6, luego H = 8C+4M+S = 8·1+4·7+6 = 8+28+6 = 42 horas.

Lo que hemos obtenido en el ejemplo anterior es una **Expresión Algebraica**, que es aquélla en la que usamos números y letras relacionadas por operaciones matemáticas, como por ejemplo:

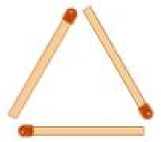
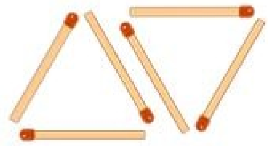
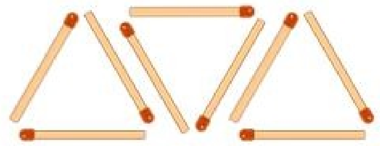
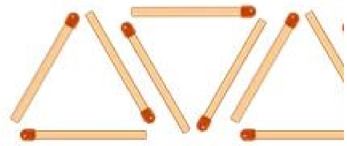
$2x$	$4a-2b$	$\frac{x+y}{2}$	$3(x^2-4)+2$	$4x^3y^2+x^2$

Cada expresión algebraica tiene un significado. De hecho, cuando tenemos un problema, intentamos **traducirlo** al lenguaje algebraico mediante una expresión. Mira los siguientes ejemplos:

Enunciado **(lenguaje usual)**	A un número le sumamos 4 unidades	El doble de un número	La cuarta parte de un número, menos su cuadrado	El precio de x kg. de naranjas, si valen a 1,80 €/kg.	El 15% de un precio
Expresión algebraica **(lenguaje matemático)**	$a+4$	$2x$	$\frac{r}{4}-r^2$	$1{,}8x$	$0{,}15x$

Por último, también nos puede servir para buscar generalizaciones de un problema.

Imagina que construimos triángulos con palillos del siguiente modo:

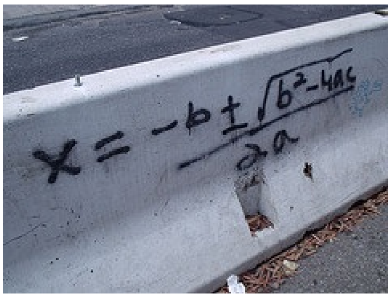
	1	**2**	**3**	**4**
Nº de triángulos (n)				
Nº de palillos (p)	**3**	**6**	**9**	**12**

¿Podríamos averiguar cuántos palillos necesito si quiero formar 100 triángulos? Para ello tenemos que encontrar una relación entre el número de triángulos (n) y el número de palillos (p). Si te fijas, por cada triángulo necesito 3 palillos, por lo que podríamos deducir que **p=3n**. Conociendo esta regla, ya puedo saber que para **n=100** será **p=3·100=300** palillos.

Para saber más

En el siguiente enlace tienes actividades que te van a permitir practicar lo dicho en este apartado. Entra en el índice y elige el apartado 2.2 Lenguaje algebraico.

Álgebra con papas



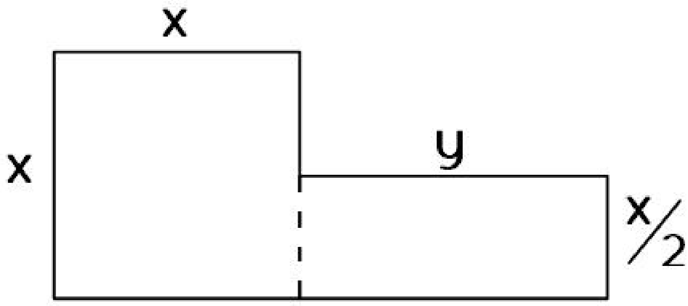
math nerds on 4th street de **auralninja**, CC by-nc-sa 2.0

En este apartado nos vamos a centrar en las **fórmulas**. La que tienes en la imagen es la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado. Pero eso lo trataremos más adelante...

Las primeras fórmulas con las que se suele trabajar en matemáticas son las geométricas. Podemos calcular la superficie o el perímetro de una figura aplicando fórmulas que ya conocemos.

Recuerda que la superficie de un cuadrado es la medida del lado elevado al cuadrado, y la del rectángulo es igual a la base por su altura. El perímetro de una figura es la suma de todos los lados.

Teniendo estos datos, podemos calcular una fórmula para la superficie de la siguiente habitación:



- La parte cuadrada tiene superficie x^2
- La parte rectangular tiene superficie $y \cdot \frac{x}{2} = \frac{yx}{2}$
- Uniendo ambas, tenemos la superficie de la habitación: $A = x^2 + \frac{yx}{2}$
- El perímetro será: $P = x + x + y + \frac{x}{2} + y + \frac{x}{2} + x = 4x + 2y$

Una vez que tenemos una fórmula, podemos utilizarla para averiguar cuánto valen al cambiar los valores de las variables. A esto lo llamamos **valor numérico** de una expresión algebraica.

En nuestro caso, podríamos averiguar la superficie y el perímetro de la habitación tanto en el caso de que sea una maqueta como si fuese una casa real, **sustituyendo el valor de las variables en la fórmula**. Veamos un par de ejemplos:

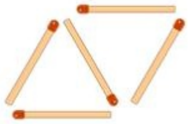
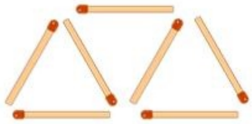
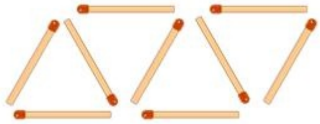
Variables	Superficie $A = x^2 + \frac{yx}{2}$	Perímetro $P = 4x + 2y$
x = 5 cm y = 8 cm	$A = 5^2 + \frac{5 \cdot 8}{2} = 25 + 20 = 45cm^2$	$P = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 20 + 16 = 36cm$
x = 2,5 m y = 4 m	$A = 2{,}5^2 + \frac{2{,}5 \cdot 4}{2} = 6{,}25 + 5 = 11{,}25m^2$	$P = 4 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 4 = 10 + 8 = 18m$

Puedes encontrar más fórmulas de figuras geométricas en este enlace.

Ejercicio resuelto

Vamos a buscar una fórmula que me diga el número de cerillas que necesito para formar los siguientes triángulos. Es parecido al ejemplo del apartado anterior, pero con una modificación: los triángulos se superponen.

Nº de triángulos (n)	1	2	3	4

				
Nº de cerillas (c)	3	5	7	9

¿Cuál es la fórmula que relaciona el número de cerillas con el número de triángulos?

En este caso no son 3 cerillas por cada triángulo. Para el primer triángulo sí se cumple, pero si observas bien, verás que cada figura se obtiene sumando dos cerillas nuevas al anterior:

- n=1 : c=3
- n=2 : c=3+2
- n=3 : c=3+2+2
- n=4 : c=3+2+2+2

A partir de aquí tenemos que generalizar: en todos los casos empezamos por 3 cerillas, y luego sumamos 2 por cada nuevo triángulo. En cada caso tenemos (n-1) "nuevos triángulos", es decir, tenemos que sumar el 2, n-1 veces. Ya tenemos la fórmula:**c=3+2·(n-1)**

Comprueba que la fórmula está bien sustituyendo los casos que aparecen en el ejemplo.

Nos están pidiendo que calculemos el valor numérico en cada caso:

- n=1 : c = 3+2·(1-1) = 3
- n=2 : c = 3+2·(2-1) = 3+2·1 = 5
- n=3 : c = 3+2·(3-1) = 3+2·2 = 7
- n=4 : c = 3+2·(4-1) = 3+2·3 = 9

Como puedes comprobar, nos da los mismos resultados que en la tabla.

Calcula cuántas cerillas necesitamos para formar 100 triángulos.

Tenemos que calcular el valor numérico de c para n=100. Sustituimos en la fórmula y obtenemos:

c = 3+2·(100-1) = 3+2·99 = 201 cerillas

Comprueba lo aprendido

Completa los espacios en blanco con la solución correcta.

1. El valor numérico de 4a-2b para a=1 y b=0 es ☐.
2. El valor numérico de x^3-2x para x = -1 es ☐.
3. El valor numérico de x^3+3x-1 para x = 2 es ☐.
4. El valor numérico de $\frac{a\cdot(b+c)}{(c-a)\cdot a}$ para a = 3, b = 4 y c = 5 es ☐.
5. Para que la expresión algebraica 5x+8 valga 3, debe ser x = ☐.

Enviar

1. 4·1 - 2·0 = 4
2. $(-1)^3-2\cdot(-1)=-1+2=1$
3. $2^3+3\cdot 2-1=8+6-1=13$
4. $\frac{3\cdot(4+5)}{(5-3)\cdot 3}=\frac{27}{6}=4{,}5$
5. Si x = -1, 5·(-1)+8 = 3

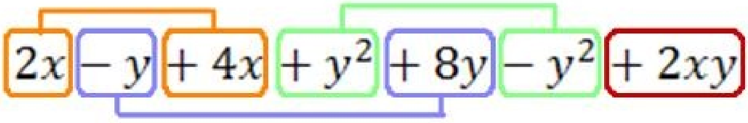
Ya sabes lo que son expresiones algebraicas y cómo darles valores. Veamos ahora cómo trabajar con ellas. Aprenderás a sumar, restar y multiplicar expresiones, además de tres fórmulas que te serán de bastante utilidad.

- **Suma y resta:**

Fíjate en la siguiente expresión: $2x - y + 4x + y^2 + 8y - y^2 + 2xy$

Está formada por siete sumandos llamados **términos**. En cada término (por ejemplo 2xy) podemos distinguir una parte numérica o **coeficiente** (en nuestro caso 2) y una **parte literal** (xy).

Los términos que tengan exactamente la misma parte literal son términos semejantes. Ésos serán los que podemos sumar y restar. En nuestro ejemplo encontramos cuatro tipos diferentes de términos semejantes.



La suma y la resta consiste básicamente en "contar" los términos semejantes:

- Término x: 2x + 4x = 6x

- Término y: -y + 8y = 7y (Recuerda que -y equivale a -1y)

- Término y^2: y^2 - y^2=0

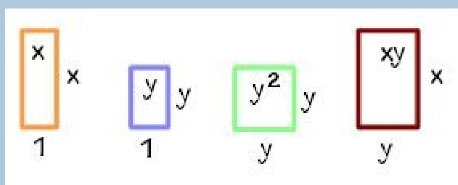
- Término xy: 2xy

Resumiendo, $2x - y + 4x + y^2 + 8y - y^2 + 2xy = 6x + 7y + 2xy$

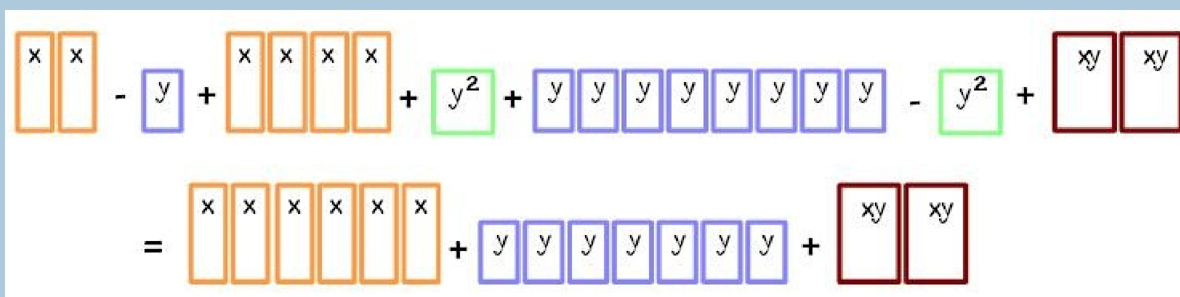
Curiosidad

La suma y resta de expresiones algebraicas se puede ver de una forma más visual. Vamos a representar los términos como figuras geométricas. Cada figura tiene la superficie que expresa dicho término.

El término *x* será un rectángulo de base 1 y altura x (y por tanto su superficie vale 1·x=x); el término *y* tendrá base 1 y altura y; para y^2, la base y la altura miden y; el término *xy* tiene altura x, base y.



De esta forma, nuestra expresión quedaría:



Es evidente que no podemos sumar o restar términos que no son semejantes, aunque coincidan algunas variables como en el caso de x + xy.

- **Producto**:

Para realizar el producto de un término por toda una expresión, multiplicaremos el primero por cada uno de los términos de la segunda expresión. Esto se resuelve multiplicando los coeficientes entre sí, y las variables entre sí. Por ejemplo,

$$2x \cdot (3 - 4x + y) = \boxed{\begin{array}{c} 2x \cdot 3 = 6x \\ 2x \cdot (-4x) = -8x^2 \\ 2x \cdot y = 2xy \end{array}} = 6x - 8x^2 + 2xy$$

Para multiplicar dos expresiones, haremos lo mismo pero multiplicando cada término de la primera expresión por cada uno de los términos de la segunda expresión. Luego sumaremos los términos semejantes para dejar el resultado lo más simplificado posible.

$$(x-2) \cdot (2x+3) = \boxed{\begin{array}{c} x \cdot 2x = 2x^2 \\ x \cdot 3 = 3x \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} -2 \cdot 2x = -4x \\ -2 \cdot 3 = -6 \end{array}} =$$

$$= 2x^2 + 3x - 4x - 6 = 2x^2 - x - 6$$

Puedes practicar las operaciones que hemos visto en la siguiente actividad interactiva de Fernando Villarubia. Cuando tengas los resultados, pincha en cada apartado para obtener la solución. Si tienes dudas, pincha en la solución para ver el desarrollo. Basta con que realices estos ejemplos y no es necesario que pinches en el botón *Adelante*.

Importante

Recuerda que:

- Si un coeficiente multiplica a una variable, no escribimos el signo de multiplicar: 2·x = 2x
- Si un coeficiente o una variable multiplica a un paréntesis, tampoco es necesario ponerlo: -3·(x+1) = -3(x+1)
- Al multiplicar variables de la misma base, sumamos los exponentes igual que hacemos con los números: $(xy^3)(x^2y^2)=x^3y^5$

- **Productos notables:**

Hay tres fórmulas que debes conocer. Facilitan las operaciones y te serán de ayuda más adelante.

1. **<u>Cuadrado de la suma</u>**: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Por ejemplo, si queremos calcular $(2x+1)^2$, tendremos que sustituir en la fórmula a = 2x y b = 1. Por tanto nos quedará

$$(2x+1)^2 = \underbrace{(2x)^2}_{a^2} + \underbrace{2\cdot 2x\cdot 1}_{2\cdot a\cdot b} + \underbrace{1^2}_{b^2} = 4x^2+4x+1$$

2. **Cuadrado de la diferencia**: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplo: $(x^2-y)^2 = \underbrace{(x^2)^2}_{a^2} - \underbrace{2\cdot x^2\cdot y}_{2\cdot a\cdot b} + \underbrace{y^2}_{b^2} = x^4 - 2x^2y + y^2$. Observa que sólo queda negativo en la fórmula el término ab, no el b^2.

3. **Suma por diferencia**: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ejemplo: $(3x+2y)(3x-2y) = \underbrace{(3x)^2}_{a^2} - \underbrace{(2y)^2}_{b^2} = 9x^2 - 4y^2$

En la siguiente escena de geogebra, realizada por Ricardo García Mesa , puedes ver la interpretación geométrica del cuadrado de la suma. Fíjate que está representando un cuadrado de base (a+b). La superficie de este cuadrado, $(a+b)^2$, sería equivalente a sumar las superficies de los cuadriláteros interiores. Puedes cambiar los valores de a y b para comprobar que siempre se verifica la igualdad.

Comprueba lo aprendido

Utiliza los productos notables para completar los huecos en blanco.

1. $(x+3)^2=x^2+$ ____ +9
2. $(2-x)^2=4$ ____ $+x^2$
3. $(x+y)^2=x^2+2xy+y$ ____
4. (2x-2)(2x+2)= ____ x^2- ____
5. $(8x-6)^2=$ ____ x^2-96x+36

Enviar

No olvides los signos

3. Resolviendo problemas

X de **hidden side**, CC by-nc-sa 2.0

Hay muchas situaciones en las que necesitamos hallar cantidades desconocidas a partir de una serie de datos. Cada cantidad que no conozcamos va a ser una incógnita. En este apartado aprenderás a plantear y resolver ecuaciones en las que sólo tenemos una incógnita, y que casi siempre llamaremos x.

Se suele decir que las matemáticas nos rodean, y en el caso de las ecuaciones es muy cierto. Por ejemplo, para que un aparato de GPS pueda determinar tu posición (incógnita), éste obtiene datos de al menos tres satélites con los que plantea una serie de ecuaciones que determinan la solución. Otro ejemplo, al programar el termostato del aire acondicionado ¿cuándo debe apagarse y encenderse el equipo para que la temperatura esté según lo deseado? Más ecuaciones...

Aunque hemos dicho que aquí estudiaremos las ecuaciones con una incógnita, en un problema puedes encontrarte con varios datos desconocidos. También veremos que un mismo problema puede tener una, dos soluciones, o puede que ninguna ¡Incluso es posible que tenga infinitas soluciones! ¿Pero sabes exactamente qué es una ecuación? Vamos a dar una definición.

Una **ecuación** es una expresión algebraica en la que establecemos una igualdad. El signo igual separa la ecuación en dos miembros. Como es una expresión algebraica, estará formada por números, variables y operaciones. En el caso de las ecuaciones, a las variables las llamaremos **incógnitas**, pues son los valores que queremos descubrir.

$$\underbrace{3(x+1)}_{\substack{Primer\\ miembro}} = \underbrace{2x^2-4}_{\substack{Segundo\\ miembro}}$$

3.1. Ecuaciones de primer grado

Empezaremos resolviendo ecuaciones con una incógnita que además no tenga exponente. Para ello veremos varios métodos, y empezaremos por el más intuitivo: la resolución por tanteo.

Cuando buscamos la solución de una ecuación, lo que queremos es un número que, al sustituirlo por x, verifique la igualdad. En eso consiste la **resolución por tanteo**, en darle valores a la incógnita x hasta que se igualen ambos términos.

Por ejemplo, supongamos que tenemos la ecuación: 3x - 1 = 11 + x. Vamos a sustituir x por algunos valores y veamos qué pasa.

Valores	3x - 1 = 11 + x	Observaciones
Si x = 2	3 · 2 - 1 = 11 + 2 5 = 13	No se igualan los miembros. Necesito aumentar el valor del primero.
Si x = 4	3 · 4 - 1 = 11 + 4 11 = 15	Sigue sin igualar.
Si x = 6	3 · 6 - 1 = 11 + 6 17 = 17	La solución de la ecuación es x = 6

Comprueba lo aprendido

Resuelve las siguientes ecuaciones por tanteo:

a) $2x+3=13$. La solución es x = ☐

b) $2x-4=8$. La solución es x = ☐

c) $x^2+1=10$. Las soluciones son x = 3 y x = ☐

d) $\frac{x}{3}-1=3$. La solución es x = ☐

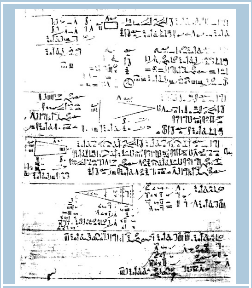
Enviar

Curiosidad

Aunque ya vimos que la notación que usamos hoy en día para escribir en lenguaje matemático es relativamente actual, las ecuaciones se han resuelto desde la civilización egipcia.

En el **Papiro de Rhind** (1650 a.C.) se resuelven problemas de un modo análogo al que se usa hoy en día. Uno de los problemas que aparece en este documento es "*Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24*"

$$x+\frac{x}{7}=24$$



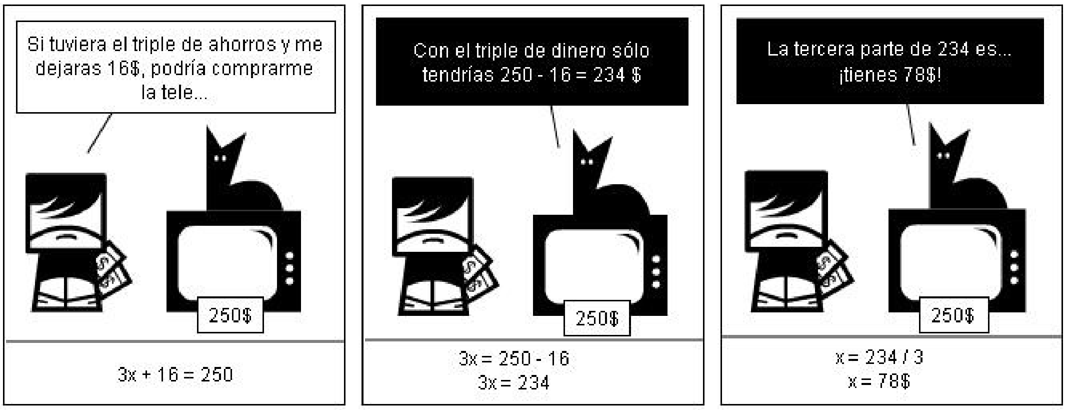
Papiro de Rhind, dominio público

Los babilonios, unos 1000 años después, se centraron básicamente en las ecuaciones de segundo grado; y entre los griegos, que en general se dedicaron a la geometría, debemos destacar la figura de **Diofanto de Alejandría** (200 a.C. - 284 a.C.). Diofanto publicó en su obra sus estudios acerca de ecuaciones que tienen soluciones racionales. Como curiosidad, has de saber que su epitafio era un problema que se resuelve con una ecuación de primer grado. Dice así:

"Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa, y cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

Este problema se traduce en la siguiente ecuación, siendo x la edad de Diofanto: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$

No siempre es fácil resolver las ecuaciones por tanteo, así que vamos a ver un método general para resolver cualquier ecuación de primer grado. En realidad es un método que cualquiera usaría para resolver un problema aunque no supiera lo que son las ecuaciones, como se ve en las siguientes viñetas.



Para ver este método usaremos la ecuación: $8x-3(5+x)=7x+21-5x$

- Paso 1: **ELIMINAR PARÉNTESIS**.

Para ello operamos como en cualquier expresión algebraica, multiplicando el factor que tenga fuera del paréntesis, o usando los productos notables. Ten cuidado con los signos negativos delante de un paréntesis. Cuando termines, simplifica los términos semejantes.

$$8x-3(5+x)=7x+21-5x$$

$$8x-15-3x=7x+21-5x$$

$$5x-15=2x+21$$

- Paso 2: **QUITAR DENOMINADORES.**

En el caso de que la ecuación tenga denominadores, reducimos a común denominador todos los términos de la ecuación. Una vez hecho, podemos eliminarlos. Lo veremos en el próximo ejemplo.

- Paso 3: **AGRUPAR TÉRMINOS SEMEJANTES**.

Vamos a pasar todos los términos con incógnita a un miembro, y los que no tengan al otro. Para ello debes tener en cuenta que si un término está sumando, pasa al otro miembro restando (y viceversa).

$$5x-15=2x+21$$

$$5x\boxed{-2x}=21\boxed{+15}$$

$$3x=36$$

- Paso 4: **DESPEJAR LA INCÓGNITA**.

Dejamos la incógnita sola quitando su coeficiente, que al estar multiplicando, pasa al otro miembro dividiendo, **pero sin cambiar de signo**.

$$3x = 36$$

$$x = \frac{36}{3}$$

$$x = 12$$

- Paso 5: **COMPROBAR LA SOLUCIÓN**.

Es bueno comprobar que la solución es correcta. Para ello tomamos la solución y sustituimos x en la primera ecuación por dicho valor.

$$8x - 3(5 + x) = 7x + 21 - 5x$$

$$8 \cdot 12 - 3(5 + 12) = 7 \cdot 12 + 21 - 5 \cdot 12$$

$$45 = 45$$

Ejercicio resuelto

Intenta resolver la siguiente ecuación paso a paso. Si no sabes seguir, puedes consultar el resultado.

$$1-\frac{x-3}{4}=4x+\frac{3(1-3x)}{2}$$

Paso 1: Quitar paréntesis

$$1-\frac{x-3}{4}=4x+\frac{3-9x}{2}$$

Paso 2: Quitar denominadores

Calculamos m.c.m(2,4)=4, luego hacemos común denominador 4 y cambiamos los numeradores de todos los términos:

$$\frac{4}{4}-\frac{x-3}{4}=\frac{16x}{4}+\frac{6-18x}{4}$$

Una vez hecho, podemos eliminar los denominadores. Ten cuidado, pues un signo negativo delante de una fracción cambia el signo de todo el numerador:

$$4-x+3=16x+6-18x$$

Simplificamos los términos semejantes,

$$7-x=-2x+6$$

Paso 3: Agrupar términos semejantes

$$-x+2x=6-7$$
$$x=-1$$

Paso 4: Despejar la incógnita

Este paso no es necesario, pues ya la tenemos despejada.

Paso 5: Comprobar la solución

$$1-\frac{-1-3}{4}=4\cdot(-1)+\frac{3-9\cdot(-1)}{2}$$
$$2=2$$

Para saber más

En el siguiente enlace tienes actividades que te van a permitir practicar lo dicho en este apartado. Entra en el índice y elige el apartado 3.1 Ecuaciones de grado 1.

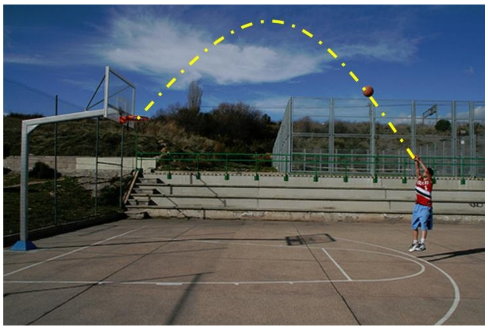
Álgebra con papas

3.2. Ecuaciones de segundo grado y racionales

Una ecuación será de **segundo grado** si tiene algún término en x^2.

Una vez que hayamos quitado paréntesis, denominadores y la ecuación se haya quedado lo más simplificada posible (siguiendo los pasos 1 a 3 del apartado anterior), nos quedará una ecuación de la forma $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$, donde a, b y c son números reales.

Las ecuaciones de segundo grado pueden tener **dos, una, o ninguna solución**. Para resolverlas, usaremos la siguiente fórmula:



Día 110 de Freddy the Boy, CC by 2.0

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veamos un ejemplo: $6x^2-5x-1=0$

En este caso, será a = 6, b = -5 y c = -1. Si lo sustituimos en la fórmula, nos queda:

$$x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot6\cdot(-1)}}{2\cdot6} = \frac{5\pm\sqrt{25+24}}{12} = \frac{5\pm\sqrt{49}}{12} = \frac{5\pm7}{12}$$

Obtenemos dos soluciones, una operando con + y otra con -

$x_1 = \frac{5+7}{12} = \frac{12}{12} = 1$ y $x_2 = \frac{5-7}{12} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$

Para saber más

- Las ecuaciones de segundo grado en las que b o c son iguales a cero, se llaman incompletas. Se pueden resolver por la fórmula que hemos visto, pero existen métodos más sencillos en estos casos. Si quieres saber cómo se resuelven, consulta la web Edumates.

- ¿Te interesa saber de dónde sale la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado? En El Blog de Ed encontrarás la respuesta.

Curiosidad

En la fórmula hay una raiz cuadrada que va a ser la que determine el número de soluciones de la ecuación. La expresión a la que calculamos la raiz, $\mathbf{b^2-4ac}$, se llama **discriminante**. Tendremos los siguientes casos:

1. Si $b^2-4ac > 0$: La raiz existe, y por lo tanto la ecuación tendrá dos soluciones, una operando con + y otra con -.
2. Si $b^2-4ac = 0$: La raiz vale 0 y la ecuación tendrá una única solución, x = -b/2a.
3. Si $b^2-4ac < 0$: La raiz no existe y la ecuación no tiene solución.

Ejercicio resuelto

Resuelve la ecuación: $(x+1)^2 - (3x+8) = -(2x+3)^2$

- Quitamos paréntesis:

$x^2 + 2x + 1 - 3x - 8 = -(4x^2 + 12x + 9)$

$x^2 - x - 7 = -4x^2 - 12x - 9$

- Pasamos todos los términos al mismo miembro:

$x^2 - x - 7 + 4x^2 + 12x + 9 = 0$

$5x^2 + 11x + 2 = 0$

- Usamos la fórmula de resolución:

Tenemos a=5, b=11 y c=2, luego:

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot5\cdot2}}{2\cdot5}=\frac{-11\pm\sqrt{81}}{10}=\frac{-11\pm9}{10}$$

$$x_1=\frac{-11+9}{10}=\frac{-2}{10}=\frac{-1}{5} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-11-9}{10}=\frac{-20}{10}=-2$$

Comprueba lo aprendido

Resuelve las siguientes ecuaciones y completa los huecos. Si tiene una única solución, escríbela repetida en cada hueco. Si no tiene solución, escribe **no** en cada hueco. Los huecos con una barra / entre ambos indican una fracción.

1. $x^2+2x+1=0$ tiene solución ☐ y ☐
2. $x^2+5x+7=0$ tiene solución ☐ y ☐
3. $(2x-1)^2=5x-1$ tiene solución ☐ y ☐ / ☐
4. $x2-\frac{2x}{3}=\frac{5}{3}$ tiene solución ☐ y ☐ / ☐

Enviar

Por último, veamos las **ecuaciones racionales**, que son aquéllas en las que la incógnita aparece en algún denominador. Básicamente se resuelven igual que las que vimos con fracciones, pero teniendo en cuenta que hay que hacer el mínimo común múltiplo también con los denominadores que contengan expresiones algebraicas.

También se pueden resolver multiplicando ambos miembros por el producto de todos los denominadores. Una vez resuelta la ecuación, es importante comprobar las soluciones, pues no todas serán válidas.

Ejercicio resuelto

Resuelve la ecuación $\frac{6}{x}+\frac{x+1}{x-2}=6$

Multiplicamos por el mínimo común múltiplo, que en este caso es x(x-2), y simplificamos,

$$\frac{6x(x-2)}{x}+\frac{(x+1)x(x-2)}{x-2}=6x(x-2)$$

Simplificamos las fracciones y reducimos términos

$$6(x-2)+(x+1)x=6x(x-2)$$
$$6x-12+x^2+x=6x^2-12x$$
$$5x^2-19x+12=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado que hemos obtenido en este caso

$x_1=3$ y $x_2=\frac{4}{5}$

Planet, de Southernpixel,

¿Sirven las ecuaciones en el mundo que nos rodea?

Ya sea consciente o inconscientemente, resolvemos problemas del día a día por medio de ecuaciones: al comparar productos en el mercado, cuando hacemos viajes, en nuestras cuentas bancarias y al buscar una nueva compañía telefónica. Incluso para hacer la foto de la izquierda, se han usado ecuaciones.

Vamos a ver algunos tipos de problemas que se resuelven con ecuaciones de primer o segundo grado con una incógnita. Evidentemente no todos los problemas tienen solución, ni todos los podemos solucionar con las herramientas que tenemos hasta este momento, pero ya verás que tan sólo con lo que hemos visto, ya se pueden resolver bastantes situaciones.

Ejercicio resuelto

Eligiendo una tarifa telefónica

En mi compañía telefónica me ofrecen una tarifa reducida y una tarifa plana para el móvil. Las condiciones de cada una son las siguientes:

Concepto	Tarifa Reducida	Tarifa Plana
Establecimiento de llamada	15 cént.	15 cént.
Llamadas a móviles de mi compañía	3 cént./min.	19,9€/mes
Llamadas a móviles de otra compañía	30 cént./min	18 cént./min

Mirando las facturas de los últimos meses, he visto que suelo hablar el doble de tiempo con los móviles de mi compañía que con los que son de otra. ¿Cuánto tiempo tengo que hablar para que las dos tarifas me salgan por el mismo precio?

Como el establecimiento de llamada es el mismo en las dos tarifas, y podemos suponer que haré el mismo número de llamadas con ambas, no vamos a considerar este dato. Ten en cuenta que todos los valores los pasaremos a euros. Vamos a plantear el problema paso a paso:

a) Si x es el número de minutos que hablo al mes con los móviles de otras compañías, ¿cuánto me gastaré al cabo de un mes con la tarifa reducida?

Si hablo x minutos con otras compañías y pago el minuto a 0,30€, en total gastaré 0,30x. Como con los móviles de mi compañía hablo el doble de tiempo (2x), con ellos me gastaré 2x·0,03, es decir, 0,06x.

En total gasto 0,30x+0,06x=0,36x al cabo de un mes.

b) ¿Y cuánto gastaré con la tarifa plana en las mismas condiciones?

En este caso en llamadas a otras compañías gastaré 0,18x. En móviles de mi compañía pago una tarifa fija de 19,90, luego el total mensual será de 19,90+0,18x

c) ¿Cuántos minutos he de estar hablando para que me gaste lo mismo con ambas tarifas?

Igualamos los precios mensuales y resolvemos:

$0{,}36x = 19{,}90 + 0{,}18x$

$0{,}36x - 0{,}18x = 19{,}90$

$0{,}18x = 19{,}90$

$x = 19{,}90/0{,}18 = 110{,}56$ minutos

Como x era el número de minutos que hablo con otras compañías y con la mía hablo el doble, en total, para 110,56*3=331,68 minutos mensuales me gasto lo mismo en ambas compañías.

d) Si normalmente hablo menos minutos de lo que me ha dado el resultado anterior, ¿qué tarifa me conviene más?

Para, por ejemplo, x=100, con la tarifa reducida gastaré 0,36·100 = 36€

Con la tarifa plana gasto 19,90+0,18·100 =37,90€

Por tanto, si consumo mensualmente menos de 331,68 minutos, me conviene más la tarifa reducida; pero si consumo más de esta cantidad, me conviene la tarifa plana.

Comprueba lo aprendido

Inversiones bancarias

En la actualidad tengo unos ahorros de 3100€, que me gustaría aumentar a 4340€ en cuatro años para poder realizar ciertas obras. ¿A qué interés simple anual debo invertirlo para obtener dicho capital?

Utilizaremos la fórmula de interés simple: $C_F=C_0(1+0,01it)$, donde C_F es el capital final, C_0 el inicial, i es el interés y t el tiempo.

Sustituye los datos del problema en la fórmula: [ ] = [ ] (1+0,01i· [ ])

Resuelve la ecuación para despejar i. Solución: i = [ ] % anual.

Enviar

Comprueba lo aprendido

Para cambiar el suelo de la cocina tengo dos opciones:

- Las baldosas Terra miden 30 cm de ancho y 40 cm de largo, y cada una tiene un precio de 1,10€.
- Las baldosas Azur miden 20 cm de ancho y 50 cm de largo, y su precio es de 0,95€ por baldosa.

¿Qué superficie tiene la cocina si sé que con las baldosas Terra necesitaría 40 menos que con la Azur? ¿Con qué baldosa me saldría más barato?

a) Si x es el número de baldosas Azur que necesito, del modelo Terra me harán falta [ ] baldosas.

b) La superficie que cubro con x baldosas Azur será de [ ] cm^2. La superficie con baldosas Terra será [ ] (x- [ ]) cm^2.

c) Como con ambas cubro toda la cocina, plantea la ecuación y calcula el número de baldosas de cada tipo que necesito:

Baldosas Terra: [ ]

Baldosas Azur: [ ]

d) El precio más económico lo obtengo con las baldosas [ ] , que me costaría en total [ ] €

Enviar

La ecuación es:

1000x = 1200 (x-40)

1000x = 1200x - 48000

200x = 48000

x = 240

Comprueba lo aprendido

En Física, el espacio que recorre un cuerpo que se mueve en linea recta sin variar la velocidad, viene dado por la fórmula $e = e_0+vt$, donde t es el tiempo y e_0 es el espacio inicial.

Si en ese movimiento lo que permanece constante es la aceleración, entonces tenemos $e=e_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$, donde v_0 es la velocidad inicial, a es la aceleración y t el tiempo.

Si Fernando Alonso entra en una recta del circuito a una velocidad de 15m/s con una aceleración de 6m/s^2, ¿cuánto tiempo tardará en recorrer la recta de 450m? (puedes suponer que e_0=0).

Solución: Tarda [ ] segundos.

Enviar

Sustituyendo en la fórmula nos queda:

$$450=15t+\frac{1}{2}\cdot 6t^2$$

$$3t^2+15t-450=0$$

$$t=\frac{-15\pm\sqrt{5625}}{6}=\frac{-15\pm 75}{6}$$

$t_1=\frac{-90}{6}=-15seg$ (no es válida por ser un tiempo negativo)

$$t_2=\frac{60}{6}=10seg$$

Para saber más

Para que puedas practicar los conceptos y procedimientos explicados en el tema te proponemos que visites el **siguiente enlace**, donde encontrarás gran cantidad de ejercicios resueltos.