2º de Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

Análisis I:
Derivada de una función.

1. Introducción

Nuestras vidas están repletas de momentos sencillamente mágicos, unos más largos y otros demasiado cortos. Seguro que en algún momento te ha embriagado el sabor de un instante...

Eras, instante, tan claro.
Perdidamente te alejas,
dejando erguido al deseo
con sus vagas ansias tercas [...]

Luis Cernuda (1902-1963). Fragmento del poema Eras, instante, tan claro...

Gota de agua
Vídeo alojado en Youtube

2. Derivada de una función

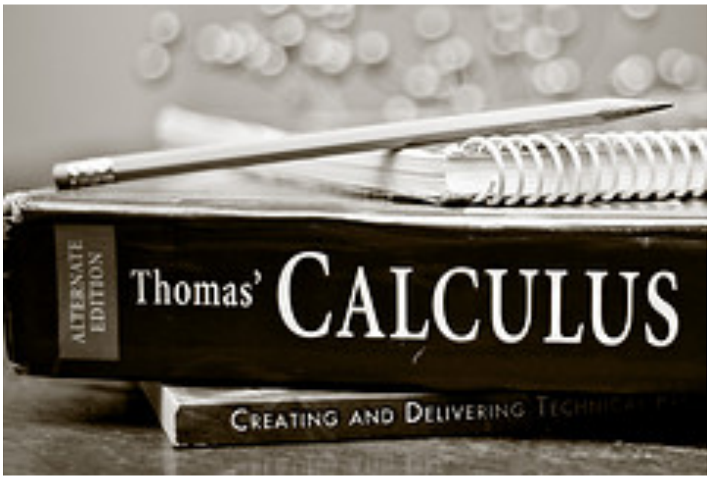
Unos versos de Luis Cernuda dedicados al instante y un vídeo sobre gotas de agua nos han servido para empezar este tema de una forma algo nostálgica. En la escena del vídeo vemos cómo es la misma secuencia pero filmada con distintos FPS (significa frames per second, en español imágenes por segundo).

¿Qué ocurriría si cada vez tuviéramos menos FPS? Pues muy sencillo, cada vez tendríamos menos detalle en la filmación, y podríamos llegar a obtener (si lo reducimos lo suficiente) a una imagen captada en un instante. Aquí tenemos dos ejemplos:

Fotografía de fernando en Flickr. Licencia CC

Fotografía de Bent yet en Flickr. Licencia CC

En Matemáticas ocurre algo parecido con las funciones, podemos estudiar la rapidez con la que una función crece o decrece en un intervalo, y si cada vez hacemos este intervalo más pequeño, podemos llegar a saber lo que ocurre en un instante determinado.



Fotografía de nickicolleen en Flickr. Licencia CC

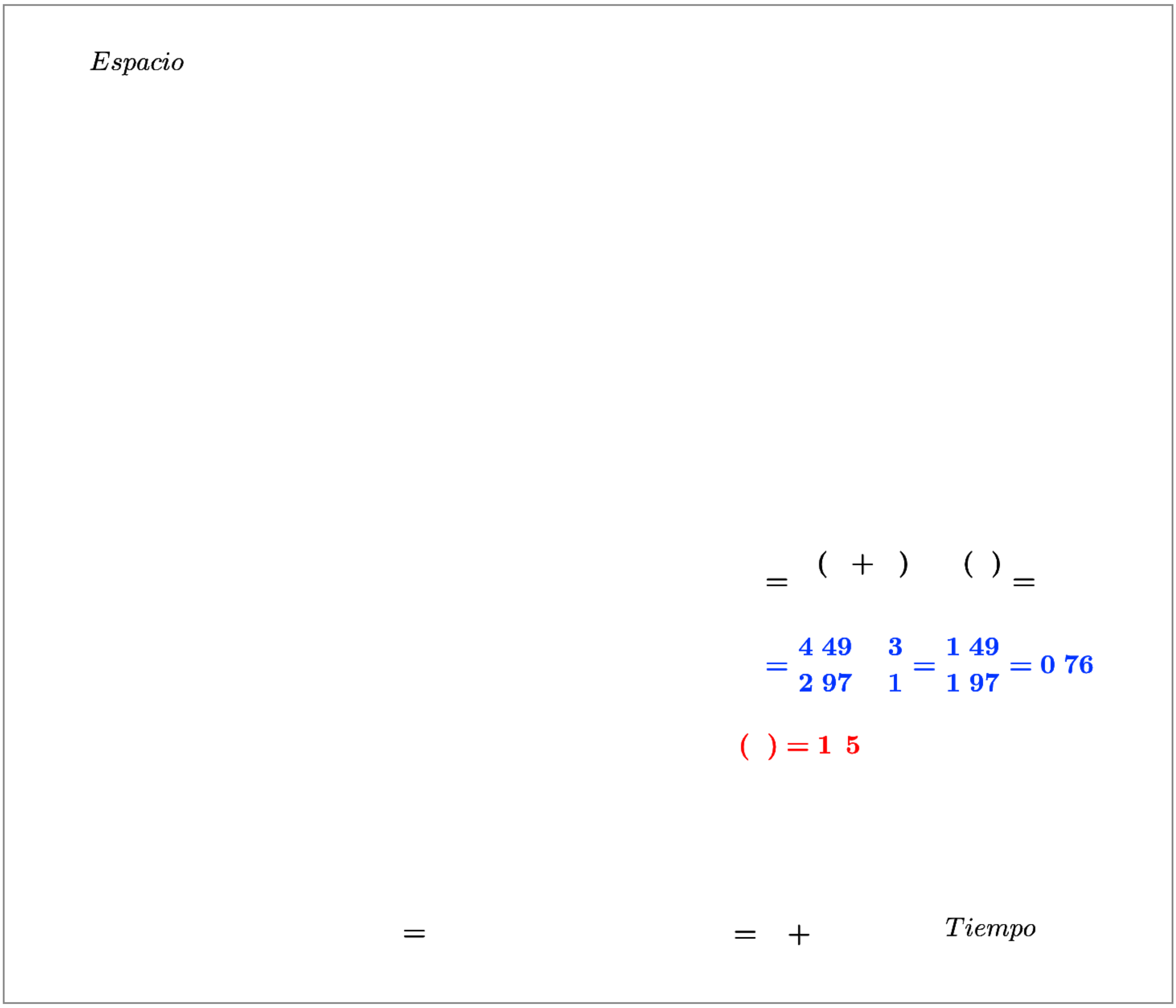
En el siglo XVII junto a la geometría analítica surge el cálculo infinitesimal, este consta de dos partes principales:

- El cálculo diferencial.
- El cálculo integral.

El primero aparece en relación a problemas que se venían planteando desde hacía siglos, similares a los siguientes:

- Determinación de la velocidad instantánea de un móvil en un punto de su trayectoria.
- Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.

Ambos problemas, si bien muy distintos, tienen un mismo planteamiento matemático a la hora de su resolución. Para entenderlo vamos a utilizar la siguiente animación de GeoGebra. La misma la puedes poner en marcha o parar pulsando sobre el botón que figura en la parte inferior izquierda.



Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC

En la animación de arriba podemos observar la gráfica espacio-tiempo que recoge la distancia que recorre un móvil en función del tiempo. Si hallamos las posiciones que ocupa el móvil en los puntos A y B, podemos determinar la velocidad media que ha llevado entre esos dos puntos a partir de la fórmula de la **tasa de variación media** (TVM), esta a su vez es la pendiente de la recta secante que figura en azul. Cuando activamos el botón de ejecución de la animación podemos observar que si el punto B se va acercando al punto A, los valores de la tasa de variación media van variando y se van aproximando a la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto A la cual figura en color rojo. A este valor se le conoce como **tasa de variación instantánea** (TVI), y constituye la velocidad instantánea del móvil en dicho punto.

Si hacemos abstracción en la animación de arriba del significado de las variables. El mismo planteamiento nos permite también hallar la recta tangente a una curva en cualquiera de sus puntos. Si activamos la animación podemos observar que a medida que el punto B se va aproximando al A, la secante (en azul), se va acercando cada vez más a la tangente (en rojo), analíticamente esto lo indica el hecho de que el valor de la tasa de variación media se va aproximando cada vez más a la pendiente de la recta tangente, la cual constituye la tasa de variación instantánea.

Tanto en el caso del móvil como en el de la recta tangente en el punto A, encontramos como denominador común que existe una magnitud h, que se va haciendo "tan pequeña como se quiera" o "infinitamente pequeña" la cual a su vez ocasiona que otra magnitud (el cociente c/h en la animación) tienda hacia un valor concreto. La determinación de este valor matemáticamente se realiza mediante una operación de obtención de un límite o dar el "paso al límite". Las expresiones: "tan pequeña como se quiera" o "infinitamente pequeña" se utilizaron durante siglos hasta que en el siglo XIX se procedió a una definición más formal y rigurosa por parte de Cauchy de ese "hacerse infinitamente pequeño".

La tasa de variación instantánea en un punto se conoce como **derivada de la función en un punto**. A partir de la derivada de la función en un punto podemos dar un paso más y hallar la derivada de la función para un punto genérico x cualesquiera, la expresión obtenida se le conoce como **función derivada**.

Por último, al alumno/a le debe quedar claro que la **derivada de la función en un punto** es igual al valor de la **función derivada** en dicho punto.

Todos estos conceptos los iremos desarrollando en los próximos apartados.

Importante

Si tenemos una función f, la **tasa de variación media** de la función entre dos puntos *a* y *b* viene dada por:

$$TVM(a,b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Geométricamente, la tasa de variación media de la función f en el intervalo [a,b] es la pendiente de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos (a,f(a)) y (b,f(b)).

Observemos la siguiente escena de GeoGebra. En ella, podemos calcular distintas TVM para la función $f(x)=x^2+2x$ en cualquier intervalo y ver qué relación guarda con la recta secante.

$$f(x)=x^2+2x$$

$$TVM[0.71, 1.73]=\frac{f(1.73)-f(0.71)}{1.73-0.71}=\frac{6.45-1.92}{1.73-0.71}=4.44$$

Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC

Ejercicio resuelto

Calcula la tasa de variación media de la función $f(x)=x^2+3x+1$ en el intervalo [-2,1]

Mostrar retroalimentación

Observa el siguiente video:

Tasa de variación media

Vídeo alojado en Youtube

¿Pero, qué podemos hacer si queremos saber la velocidad en un momento concreto? Por ejemplo, la velocidad instantánea cuando paso por una estación sin para en ella. Si queremos definirla a partir de esa misma relación espacio recorrido y tiempo empleado en recorrerlo, tenemos un problema porque ese tiempo sería cero y el espacio también.

Sin embargo podemos recurrir a la idea de considerar las velocidades con que hemos recorrido trayectos cada vez más pequeños. Parece razonable que, si esos trayectos se van acortando hasta cero, las velocidades medias se irán aproximando a la velocidad con que viajo en ese instante determinado.

Volvamos atrás a nuestro video y a las imágenes de las gotas de agua. Si lo vemos de nuevo, podemos comprobar que a menor número de fps, la grabación es cada vez más rápida. Es decir, si nos acercamos lo máximo posible a 0, nuestra grabación se convertiría prácticamente en una fotografía de un instante.

Si ahora volvemos a las funciones y, teniendo en cuenta que b es mayor que a, se puede expresar b como a+h, donde h sería un número real y positivo, y de esta forma la tasa de variación media se podría expresar con la siguiente fórmula:

$$TVM = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si h se aproxima a cero, el punto b=a+h se aproximará al punto a y la tasa de variación media tenderá entonces a un valor que denominamos tasa de variación instánea de la función f en el punto a. Que si hablamos en términos de velocidad, sería justo la que marca el velocímetro de nuestro coche en un determinado momento.

Importante

La **tasa de variación instantánea** de función f en un punto a viene dada por:

$$TVI(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejercicio resuelto

Calcula la tasa de variación instantánea de la función $f(x)=x^2$ en $x=2$

Mostrar retroalimentación

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (4+h) = 4$$

La tasa de variación instantánea es 4.

Comprueba lo aprendido

Unos diseñadores informáticos han estado trabajando durante varios meses para poder acercar, a través de Internet, una visita a la Capilla Sixtina. El movimiento que se puede realizar en cada una de las direcciones dentro de la recreación virtual de la Capilla, lo han conseguido a través de una función plana que se aplica en la dirección en la que se mueve el ratón del ordenador, de forma que pueda seguir ofreciendo una perspectiva próxima a la realidad. La función utilizada es:

$$f(x) = 2x^2 + 6$$

De esta función han realizado las siguientes anotaciones en su estudio:

1.- La tasa de variación media entre los valores 1 y 3 es ☐ .

2.- La tasa de variación media entre los valores 4 y 8 es ☐ .

3.- La tasa de variación instantánea en el valor 3 es [ ] .

4.- La tasa de variación instantánea en el valor 5 es [ ] .

Ayúdales completando los valores.

Enviar

Ejercicio resuelto

La empresa de motores MOTORESA ha diseñado un nuevo motor de gasolina que pretende introducir en el mercado. Los ingenieros de la empresa saben que el consumo de gasolina depende de la velocidad a la que vaya el motor. Si llamamos x a la velocidad, la función que proporciona el consumo de gasolina en función de la velocidad es

$$f(x)=x^3+3x-1$$

Para contrastar lo bueno que es el motor frente a sus competidores, han decidido basarse en la tasa de variación instantánea del consumo del motor a velocidad 1.

Calcula esa tasa de variación instantánea.

Fotografía de williamcho en Flickr. Licencia CC

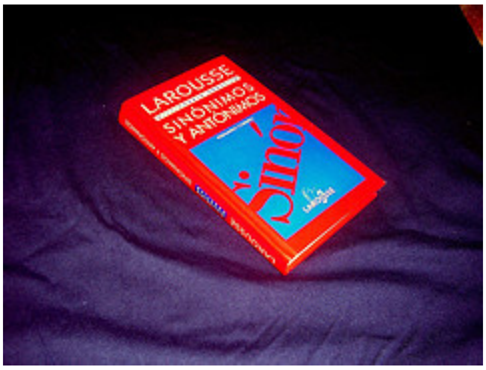
Mostrar retroalimentación

La tasa de variación instantánea es la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x=1$ (esto se verá en el siguiente apartado). En el siguiente vídeo podemos comprobar cómo se calcula:

Cálculo de derivada por definición. Mariano Real.
Vídeo alojado en Youtube

2.2. Definición de derivada

Ya sabemos lo que es un sinónimo, ¿pero sabías que en matemáticas también existe ese término?



Sinónimos y antónimos

Fotografía de David González Romero en Flickr. Licencia CC

A la tasa de variación instantánea en a también la llamamos derivada en a.

Importante

Si tenemos una función $f(x)$ llamamos **derivada** de la función en un punto $x=a$ a la tasa de variación instantánea de la función en el punto a y se denota $f'(a)$. Así, según la definición tenemos que:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Recuerda que para que exista este límite, deben existir los límites laterales y coincidir. Así, de la misma forma, podemos definir las derivadas laterales como:

.- Derivada por la derecha:

$$f'(a)^{+}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

.- Derivada por la izquierda:

$$f'(a)^{-}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Geométricamente, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. En el apartado siguiente desarrollaremos este concepto y daremos una interpretación geométrica a la derivada.

Podemos comprobar en la escena de GeoGebra del apartado anterior, cómo efectivamente si hacemos coincidir a y b, la recta secante se convertirá en la recta tangente.

Ejercicio resuelto

Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de

$f(x) = \frac{1}{\ldots}$

Debes aplicar la definición de derivada en un punto

En la siguiente escena de Geogebra, distinguimos cómo va surgiendo la derivada de la función $f(x)=x^3$ de la manipulación de su pendiente.

Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC

Comprueba lo aprendido

Utilizando la escena anterior, rellena los siguientes espacios en blanco:

1. f'(x) le asocia a cada valor x la ______ en el punto x, que es la ______ de la recta tangente en x.
2. Completa la siguiente tabla de valores de la función derivada

x	-1	0	1	2
f'(x)				

3. La derivada de $f(x)=x^3$ es f'(x)= ______ (las potencias las insertaremos utilizando ^, por ejemplo x^5 lo expresamos x^5)

Enviar

$$f(x) = \frac{\quad}{2x+1}$$

en el punto de abscisa x=-2.

Mostrar retroalimentación

Para ello tenemos que recurrir a la definición de derivada y calcular f'(1):

Derivada por definición (cociente)

Vídeo alojado en Youtube

Luego la pendiente de la recta tangente en x=-2 es

$$\frac{-2}{9}$$

Comprueba lo aprendido

Completa en la siguiente tabla las derivadas en los puntos de abscisas -2, -1, 0, 1, 2, 3 y 4 de la función $f(x)=x^2-2x$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f'(x)							

Enviar

Debes aplicar la definición de derivada en un punto

Comprueba lo aprendido

Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones en el punto que se indica:

1. $f(x) = 3x+4 \quad f'(2) =$ ☐
2. $f(x) = 2x^2+5x+3 \quad f'(1)$ ☐
3. $f(x) = 4x^3 \quad f'(-1) \quad f'(-1) =$ ☐

Enviar

2.3. Interpretación geométrica de la derivada

La derivada de una función en un punto tiene una interpretación geométrica. Observa la siguiente ventana e interactúa con ella moviendo los puntos A y B. Si dejas fijo el B y vas acercando el A a este punto, podrás comprobar que la pendiente de la recta tangente (en color verde) a la gráfica de la función se va aproximando a la de la secante (en azul). Por tanto, las ecuaciones de ambas rectas se van haciendo cada vez más semejantes ya que geométricamente ambas se van acercando.

Cuando coinciden prácticamente los puntos A y B, ambas rectas son la misma, de ahí que la derivada de la función en el punto B coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica en dicho punto.

$= \;^2 - \; + 1$

$= 0\ 09 \quad + 0\ 7$

$= 1\ 46 \quad + -0\ 04$

$(\qquad) = \frac{2\ 75 - 0\ 75}{1\ 92 - 0\ 55} = \frac{2}{1\ 37} = 1\ 46$

Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC

Importante

Si tenemos una función f(x), **la derivada de la función en x=a, es la pendiente de la recta tangente** a f(x) en el punto de abscisa x=a.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

De esta forma, si tenemos una función f(x), su función derivada f'(x) es la función que en cada punto toma el valor de la pendiente de la recta tangente a f(x) en ese punto.

El siguiente vídeo te explica gráficamente este hecho:

Concepto de derivada pendiente. Mariano real.

Vídeo alojado en *Youtube*

Por tanto, la **recta tangente** a la función en el punto a es:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

A la recta perpendicular a esta recta tangente en el punto a se le llama **recta normal**. Así, la ecuación de la recta normal es:

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

Hemos aplicado que la pendiente de una recta, m, y la de una recta perpendicular a ella, m', verifican que m·m'=-1.

En la siguiente escena de GeoGebra está representada en rojo la gráfica de la función y=sen(x) y en verde, la recta tangente a la gráfica de y=sen(x) en el punto A.Vemos también que la longitud del cateto opuesto del triángulo fijo en el punto A, nos da la pendiente de la recta tangente.

Si mueves con el cursor del ratón el punto A podrás apreciar cómo va desplazándose la tangente por la gráfica de y=sen(x). Su ecuación, que figura en la parte superior izquierda, va cambiando de forma continua cuando mueves el punto A.

Puedes observar cómo cambia la pendiente de la recta tangente y a su vez va surgiendo una gráfica en azul, la cual se trata de la representación de la función derivada de y=sen(x), en la parte superior derecha se va indicando en todo momento el valor de esta función para cada punto del dominio de y=sen(x), y se puede comprobar que el valor de la función derivada en todo momento coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente cuando se desplaza esta.

Applet de mduran alojado en GeoGebra. Licencia CC

Comprueba lo aprendido

Responde ahora a las siguientes preguntas:

- El valor numérico de la pendiente de la recta tangente a la función de la gráfica anterior es ☐ en los puntos máximos.
- El valor numérico de la pendiente de la recta tangente a la función de la gráfica anterior es ☐ en los puntos mínimos.
- La función que resulta como función derivada es la función ☐ .
- La pendiente de la recta tangente a la función en el punto x = 0 es ☐ .
- La pendiente de la recta normal a la función en el punto x = 0 es ☐ .

Enviar

Ejercicio resuelto

Calcula el valor de t para que la recta $y=6x+t$ sea tangente a la función $f(x)=3x^2+5$.

Mostrar retroalimentación

Sabemos que la pendiente de la tangente, en nuestro caso m=6, es igual que la derivada de la función en ese punto.

Hallamos la derivada de la función y la igualamos a la pendiente, de aquí obtenemos el valor de la abscisa para la cual la función derivada vale 6.

$$f'(x)=6x \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{6}=1$$

Por tanto, el punto de tangencia tiene de ordenada

$$f(1)=3\cdot 1^2+5=8$$

Como la tangente también debe pasar por el punto (1,8), se tiene que verificar que

$$8=6\cdot 1+t \Rightarrow t=2$$

Ejercicio resuelto

Dada la función

$$f(x)=e^{3x}$$

a. Calcula la ecuación de la recta tangente en un punto $x=a$.

b. Calcula el valor de a para que dicha recta pase por el punto $P=(1,0)$

Mostrar retroalimentación

a. Nos están pidiendo que calculemos la recta tangente en x=a:

$$y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$$

Si lo hacemos paso a paso, obtenemos:

$$f(a)=e^{3a};\ f'(x)=3e^{3x};\ f'(a)=3e^{3a}$$

Luego si sustituimos en la primera fórmula, se nos queda de la siguiente manera:

$$y-e^{3a}=3e^{3a}(x-a)$$

Si despejamos y sacamos factor común, encontramos la expresión de la recta tangente que estabamos buscando.

$$y=e^{3a}(3x-3a+1)$$

b. Sabemos que la recta pasa por el punto P(1,0), luego lo que tenemos que hacer es sustituir en la ecuación de la recta tangente que hemos calculado en el apartado anterior la x por 1 y la y por 0:

$$0=e^{3a}(3-3a+1) \Rightarrow 0=e^{3a}(4-3a)$$

Si pasamos dividiendo el término e^{3a} y resolvenos la ecuación:

$$0=(4-3a) \Rightarrow 3a=4 \Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

El valor que buscamos es a = 4/3.

Ejercicio resuelto

En la construcción de una carretera, uno de los puntos con los que hay que tener especial cuidado es en las curvas. Dependiendo de lo cerrada que sea la curva, debe tener más peralte o menos para evitar que los coches se salgan de la misma. En la construcción de una carretera, una de las curvas se adapta perfectamente a la función $f(x)=x^2$. Los técnicos desean tener una función que les proporcione en cada uno de los puntos de la curva la pendiente que tendrá la recta tangente a la misma. ¿Puedes ayudarles?

Fotografía en Flick de Luz Adriana Villa A bajo CC

Mostrar retroalimentación

Para obtener lo que desean los técnicos únicamente debemos calcular la derivada de la función. Así tenemos que:

$$f'(x)=2x$$

Por tanto la función buscada es

$$y=2x$$

En el apartado "Comprueba lo aprendido" de la definición de derivada, se nos pedía evaluar la derivada dela función $f(x)=x^2-2x$ en determinados puntos . Observa que se trata de una nueva función, f', que asocia a cada abscisa, x, el valor de la pendiente (la derivada) de la función f en x.

Rolling moon

Fotografía de taivasalla en Flickr. Licencia CC

Importante

Si tenemos una función f(x) denominamos **función derivada de f** respecto a la variable x a una nueva función que para cada valor x nos proporciona la derivada de la función en el punto x. A la función derivada de f(x) la denotaremos f'(x), aunque también la puedes ver representada como $\frac{df(x)}{dx}$. De esta forma tenemos que:

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Recuerda que con esta definición, la función derivada nos proporciona, para cada punto x, la pendiente de la recta tangente a la función en en punto x.

Los valores de la tabla que rellenamos corresponden a la recta y=2x-2. ¿Será entonces f'(x)=2x-2?

Para probarlo, vamos a obtener la derivada de $f(x)=x^2-2x$ en un punto cualquiera, x.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-2(x+h)-x^2+2x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh-2h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}h+2x-2=2x-2$$

Comprueba lo aprendido

Utilizando la escena anterior, rellena los siguientes espacios en blanco:

1. f'(x) le asociada a cada valor x la ________ en el punto x, que es la ________ de la recta tangente en x.
2. Completa la siguiente tabla de valores de la función derivada

x	-1	0	1	2

f'(x)				

3. La derivada de $f(x)=x^3$ es $f'(x)=$ ______ (las pontencias las insertaremos utilizando ^, por ejemplo x^5 lo expresamos x^5)

Enviar

Importante

A la derivada de una función también se la denomina **derivada primera**. Si volvemos a derivar la derivada primera de una función, obtenemos la llamada derivada segunda; la derivada de la **derivada segunda** se denomina derivada tercera; y así sucesivamente. Éstas son las llamadas **derivadas sucesivas** de una función:

$$f \xrightarrow{D} f' \xrightarrow{D} f'' \xrightarrow{D} f''' \xrightarrow{D} \dots$$

Si nos fijamos es como un efecto domino:

Low clearance 2''
Vídeo alojado en Youtube

La diferencia es que no siempre es tan larga esta cadena de derivadas como queramos, puede llegar un momento en el que se repita la derivada indefinidamente. Por ejemplo, la derivadas sucesivas de una constante son siempre cero, y la derivada de la función exponencial $f(x)=e^x$ es siempre ella misma.

Ejercicio resuelto

¿Existen otras funciones que a partir de alguna de sus derivadas sucesivas siempre se repitan?

Mostrar retroalimentación

Todas las funciones potenciales de exponente entero positivo, por ejemplo x^2, x^3... Observa que en la tabla de las derivadas la derivada siempre eleva su exponente a una unidad menos, llegará un momento que este exponente sea 0, es decir, se convierta la derivada en una constante, por la tanto la sucesiva será 0.

3. Reglas de derivación

Ya estamos preparados para cantar Derivaré... Observa con detenimiento los subtítulos y descubrirás conceptos muy familiares:

I will derive!

Vídeo alojado en Youtube

3.1. Tabla de derivadas de funciones simples

No nos preocupemos, no va a ser necesario recurrir a la definición para calcular la derivada, ni tampoco representarla gráficamente, serían procesos muy largos y tediosos. Sin existen unas sencillas reglas prácticas con las que la función derivada de cualquier función elemental se puede hallar muy fácilmente.

Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^p \quad p \in \mathrm{R}$	$f'(x) = px^{p-1}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Reflexiona

En la siguiente ventana, en PDF, vas a poder practicar realizando distintas derivadas.

Derivadas de funciones

PDF alojado en Matemáticas Online. Licencia CC

Mostrar retroalimentación

Aplica las reglas de derivación que te proporcionamos en el apartado anterior. En esta parte es importante la práctica. Cuantos más ejercicios realices mejor dominarás las técnicas de derivación.

Reflexiona

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x)=3$

b. $g(x)=\operatorname{sen}(x)$

c. $h(x)=x^5$

d. $m(x)=\sqrt{x^7}$

Mostrar retroalimentación

Solamente tienes que aplicar los contenidos de la tabla de derivadas y obtendrás los valores:

a. $f'(x) = 0$

b. $g'(x) = \cos(x)$

c. $h'(x) = 5x^4$

d. Quizá sea la más complicada, pero es fácil si la pones primero como una potencia. Veamos:

$$m(x) = \sqrt{x^7} = x^{\frac{7}{2}} \Rightarrow m'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = \frac{7x^{\frac{5}{2}}}{2} = \frac{7\sqrt{x^5}}{2}$$

Ejercicio resuelto

Todos sabemos que la caída de pelo es mayor en unas épocas que en otras, pero... ¿y su velocidad de crecimiento? ¿nos crece más el pelo en unos meses que en otros? Supongamos que la longitud de nuestro pelo viene determinada por la función:

$$l(t) = 3\sqrt{t}$$

donde t, indica el tiempo en meses.

¿Cuál será la velocidad de crecimiento en febrero (mes 2)? ¿Y en julio? ¿Cuál es la función que nos da la velocidad de crecimiento en función del tiempo?

Mostrar retroalimentación

Para calcular la velocidad dada la longitud tenemos que calcular la derivada de esta función

$$l'(t) = \frac{3}{2\sqrt{t}}$$

que sería la velocidad de crecimiento

$$v(t) = \frac{3}{2\sqrt{t}}$$

Ahora necesitamos saber v(2) y v(7)

- v(2)=1,06
- v(7)=0,56

Si te fijas la velocidad va disminuyendo, por lo que este estudio no es muy de fiar...

3.2. Derivadas de operaciones con funciones

Si seguimos con nuestro ejemplo de la función $f(x)=x^2-2x$, y recurrimos a nuestra tabla de funciones elementales, podremos derivar sin problema x^2, ¿pero qué ocurre con 2x? ¿y con la resta de ambas? Necesitamos nuevas reglas, para derivar las operaciones con funciones: suma, resta, multiplicación...

Importante

Suma	$(f+g)'=f'+g'$	La derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas de estas funciones
Resta	$(f-g)'=f'-g'$	La derivada de la diferencia de funciones es la diferencia de las derivadas de estas funciones
Producto	$(f\cdot g)'=f'\cdot g+g'\cdot f$	La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la segunda derivada por la primera sin derivar.
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$	La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar, y todo ello dividido por el denominador al cuadrado
Producto por un número	$(a\cdot f)'=a\cdot f'$	La derivada del producto de un número real por la función es igual al número real por la derivada de la función
Composición	$(g°f)'=[g(f(x))]'=g'(f(x))\cdot f'(x)$	Regla de la cadena (desarrollada más abajo)

Veamos unos ejemplos en la siguiente presentación

Reglas de derivación
Presentación por Patricia Pérez alojada en SlideShare

La mejor forma de aprender a derivar es derivando, así que aquí tienes unos videos del Profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Juan Medina Molina (juanmemol). Quizás sea una buena idea que pinches para verlos en pantalla completa, o pinchando sobre ellos para verlos en la página de youtube:

Derivada de un monomio	**Derivada de una exponencial**	**Derivada de un polinomio**	**Derivada de un producto**
Derivada de un monomio *Vídeo alojado en Youtube*	*Derivada* *Vídeo alojado en Youtube*	*Derivada de un polinomio* *Vídeo alojado en Youtube*	*Derivada - Producto de polinomio* *Vídeo alojado en Youtube*
Derivada de un cociente	**Derivada de una composición**		

Derivada - Cociente de polinomios *Vídeo alojado en* *Youtube*	*Derivada - Potencia de cociente de polinomios* *Vídeo alojado en* *Youtube*	*Derivada - Seno* *Vídeo alojado en* *Youtube*	*Derivada (Coseno al cuadrado)* *Vídeo alojado en* *Youtube*

Importante

Normalmente, las funciones que solemos encontrarnos no son funciones simples como las que vemos en la tabla de derivadas, sino que son funciones que se obtienen como composición de funciones simples.

Por ejemplo $f(x)=\mathrm{Ln}(x^4+3)$, en este caso vamos a aplicar lo que se conoce con el **nombre de regla de la cadena**.

Si llamamos

Derivada: regla de la cadena. Mariano Real.
Vídeo alojado en *Youtube*

$f(x)=\mathrm{Ln}(x)$ y $h(x)=x^4+3$ tenemos que $f(x)=g\left(h(x)\right)$

La regla de la cadena nos dice que la derivada de una función compuesta es

$$f(x)=g\left(h(x)\right)\;\Rightarrow\; f'(x)=g'\left(h(x)\right)\cdot h'(x)$$

En nuestro caso

$$f'(x)=\frac{1}{h(x)}\cdot 4x^3=\frac{4x^3}{x^4+3}$$

Ponemos a tu disposición dos tablas de derivadas tabla 1, tabla 2. Ambas recogen tanto la derivación de las funciones elementales como las compuestas. Utiliza la que te resulte más cómoda.

Una aplicación de la regla de la cadena para las funciones trigonométricas la observamos en el siguiente vídeo:

Derivada de Funciones Trigonométricas. Mariano Real

Derivada de funciones trigonométricas. Mariano Real.
Vídeo alojado en Youtube

Ejercicio resuelto

-

Calcule f '(1) sabiendo que $f(x) = x \cdot \sqrt{2-x}$

Mostrar retroalimentación

$$f(x) = x\sqrt[2]{2-x}$$

Aplicamos la regla de la derivada del producto de funciones.

$$f'(x) = \sqrt[2]{2-x} + x\left(\frac{-1}{2\sqrt[2]{2-x}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2(2-x)-x}{2\sqrt[2]{2-x}}$$

$$f'(x) = \frac{4-3x}{2\sqrt[2]{2-x}}$$

$$f'(1) = 0,5$$

Ejercicio resuelto

-

Calcule f '(1) sabiendo que $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$.

Mostrar retroalimentación

$$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt[2]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[2]{x} - (x+3)\frac{1}{2\sqrt[2]{x}}}{x} = \frac{\frac{2x-x-3}{2\sqrt[2]{x}}}{x} = \frac{x-3}{2x\sqrt[2]{x}}$$

$$f'(1) = -1$$

Reflexiona

Dadas las funciones $g(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $h(x)=x^2+4$ Calcula la derivada de la suma y el producto de ambas.

Mostrar retroalimentación

$$\left(g(x)+h(x)\right)' = \left(\operatorname{sen}(x)+(x^2+4)\right)' = \cos(x)+2x$$
$$\left(g(x)\cdot h(x)\right)' = \left(\operatorname{sen}(x)\cdot(x^2+4)\right)' = \cos(x)\cdot(x^2+4)+\operatorname{sen}(x)\cdot 2x$$

Ejercicio resuelto

JUNIO 2011 ANDALUCÍA

Calcule la derivada de:

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{(-x^2+2)^2}$$

Ejercicio valorado en 1 punto

Mostrar retroalimentación

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{(-x^2+2)^2}; \qquad f'(x) = \frac{-2.e^{-2x}.(-x^2+1)^2 - e^{-2x}.2.(-x^2+1).(-2x)}{((-x^2+1)^2)^2} = \frac{-2.e^{3x}.\left(x^4+2x^3-2x^2-2x+1\right)}{(-x^2+1)^4}$$

$$-2(-x^2+1)^2 - 2.(-x^2+1)(-2x) = -2(x^4-2x^2+1) -2.(2x^3-2x) = -2(x^4+2x^3-2x^2-2x+1)$$

Reflexiona

Ahora te toca practicar a tí. Para ello te proponemos que calcules la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \dfrac{x^2+4x}{x^5+x^3}$

b. $g(x) = \cos\left(\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)$

c. $h(x) = \operatorname{Ln}\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)$

Mostrar retroalimentación

a. En este caso aplicamos la regla del cociente de funciones:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+4x}{x^5+x^3} = \frac{h(x)}{g(x)} \\
f'(x) &= \frac{h'(x)\cdot g(x) - h(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}
\end{aligned}
$$

Si calculamos las derivadas del numerador h(x) y el denominador g(x), tenemos

$$
\begin{aligned}
h(x) &= x^2+4x; \quad h'(x) = 2x+4 \\
g(x) &= x^5+x^3; \quad g'(x) = 5x^4+3x^2
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x+4)\cdot(x^5+x^3)-(x^2+4x)\cdot(5x^4+3x^2)}{[x^5+x^3]^2} = \\
&= \frac{2x^6+4x^5+2x^4+4x^3-5x^6-3x^4-20x^5-12x^3}{x^{10}+x^6+2x^8} = \\
&= \frac{x^3(-3x^3-x-16x^2-8)}{x^3(x^7+x^3+2x^5)} = \\
&= -\frac{3x^3+16x^2+x+8}{x^7+x^3+2x^5}
\end{aligned}
$$

b. Para hallar esta derivada, aplicamos la regla de la cadena.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \cos\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right) = h\left(u(x)\right) \\
h(x) &= \cos(x) \\
u(x) &= \frac{x^2+3}{x-1} \\
g'(x) &= h'(u(x))\cdot u'(x)
\end{aligned}
$$

Si calculamos las derivadas de la función h(x) y u(x), tenemos

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= -\text{sen}(x) \\
u'(x) &= \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-3}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$
g'(x) = h'\left(u(x)\right)\cdot u'(x) = -\text{sen}\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)\left(\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\right)
$$

c. Nuevamente, usamos la regla de la cadena

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \text{Ln}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = u(v(x)) \\
u(x) &= \text{Ln}(x) \\
v(x) &= \frac{1}{\cos(x)} \\
h'(x) &= u'(v(x))v'(x)
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= \frac{1}{x} \\
v'(x) &= \frac{\text{sen}(x)}{(\cos(x))^2}
\end{aligned}
$$

$$h'(x) = u'\big(v(x)\big)\cdot v'(x) = \frac{1}{v(x)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x)}{\big(\cos(x)\big)^2} = \cos(x)\cdot\frac{\operatorname{sen}(x)}{\big(\cos(x)\big)^2} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Ejercicio resuelto

Aplica la regla de la cadena para obtener la función derivada de $f(x)=(2x-1)^5$

Mostrar retroalimentación

La solución está en el siguiente vídeo:

Ejercicio de regla de la cadena. Mariano Real.

Vídeo alojado en Youtube

En el siguiente enlace puedes encontrar una relación de ejercicios de derivadas resueltos con los cuales puedes practicar.

- Ejercicios de derivadas resueltos

Importante

Si una función es derivable en un punto $x = a$, entonces es continua para $x = a$.

El reciproco es falso, es decir, hay funciones que son continuas en un punto y que, sin embargo, no son derivables.

Ejercicio resuelto

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=|x-1|$

Mostrar retroalimentación

El siguiente video nos da solución a este problema de forma muy detallada, y nos permite repasar los valores absolutos:

Continuidad y derivabilidad de un valor absoluto

Vídeo alojado en Youtube

Para saber más

En este enlace, puedes encontrar algunos ejercicios resueltos sobre la relación existente entre continuidad y derivabilidad.

Observa, la siguiente animación de GeoGebra. En ella puedes hacerte una idea intuitiva y gráfica de lo que es una función continua pero no derivable. Está relacionado con la "suavidad" de sus curvas.

Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC

La función f(x)=|x| es continua en x=0 pero no derivable.

Ejercicio resuelto

-

Sea la función f dada por $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x+1}$ para x ≠ -1, y f(-1) = a. Halle el valor a para que la función sea continua.

Mostrar retroalimentación

La función que nos concierne es continua en todo R excepto en x=-1 donde presenta una indeterminación del tipo 0/0. Para solventarla se le ha asignado en f(-1)=a. Para el estudio de su continuidad en primer lugar hallamos los límites laterales en x=-1.

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to -1^+}(x-2)=-3$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2-x-2}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}} = \lim_{x \to -1^-} (x-2) = -3$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-x-2}{x+1} = -3$$

De la definición de la continuidad de una función en un punto, se deduce que para que nuestra función sea continua en todo R, a=-3.

Importante

- Si tenemos una función f, la **tasa de variación media** de la función entre dos puntos *a* y *b* viene dada por:

$$TVM(a,b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Geométricamente, la tasa de variación media de la función f en el intervalo [a,b] es la pendiente de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos (a,f(a)) y (b,f(b)).

- La **tasa de variación instantánea** de función f en un punto a viene dada por:

$$TVI(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si tenemos una función $f(x)$ llamamos **derivada** de la función en un punto $x=a$ a la tasa de variación instantánea de la función en el punto a y se denota $f'(a)$. Así, según la definición tenemos que:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Recuerda que para que exista este límite, deben existir los límites laterales y coincidir. Así, de la misma forma, podemos definir las derivadas laterales como:

.- Derivada por la derecha:

$$f'(a)^{+}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

.- Derivada por la izquierda:

$$f'(a)^{-}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Geométricamente, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. En el apartado siguiente desarrollaremos este concepto y daremos una interpretación geométrica a la derivada.

Importante

Si tenemos una función f(x), **la derivada de la función en x=a**,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

es la pendiente de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa x=a.

De esta forma, si tenemos una función f(x), su función derivada f'(x) es la función que en cada punto toma el valor de la pendiente de la recta tangente a f(x) en ese punto.

Por tanto, la **recta tangente** a la función en el punto a es:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

A la recta perpendicular a esta recta tangente en el punto a se le llama **recta normal**. Así, la ecuación de la recta normal es:

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

Hemos aplicado que la pendiente de una recta, m, y la de una recta perpendicular a ella, m', verifican que m·m'=-1.

Importante

Si tenemos una función f(x) denominamos **función derivada de f** respecto a la variable x a una nueva función que para cada valor x nos proporciona la derivada de la función en el punto x. A la función derivada de f(x) la denotaremos f'(x), aunque también la puedes ver representada como $\frac{df(x)}{dx}$. De esta forma tenemos que:

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Recuerda que con esta definición, la función derivada nos proporciona, para cada punto x, la pendiente de la recta tangente a la función en en punto x.

Importante

Suma	*(f+g)'=f'+g'*	La derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas de estas funciones
Resta	*(f-g)'=f'-g'*	La derivada de la diferencia de funciones es la diferencia de las derivadas de estas funciones
Producto	*(f·g)'=f'·g+g'·f*	La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la segunda derivada por la primera sin derivar.
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}$	La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador

		sin derivar menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar, y todo ello dividido por el denominador al cuadrado
Producto por un número	*(a·f)'=a·f'*	La derivada del producto de un número real por la función es igual al número real por la derivada de la función
Composición	*(g°f)'=[g(f(x))]'=g'(f(x))·f'(x)*	Regla de la cadena (desarrollada más abajo)

Importante

Tabla de derivadas de funciones simples

Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$
$f(x)=\mathrm{k}$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^p \quad p\in\mathrm{R}$	$f'(x)=px^{p-1}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$
$f(x)=e^x$	$f(x)=e^x$
$f(x)=a^x$	$f(x)=a^x\ln a$
$f(x)=\operatorname{sen} x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\operatorname{sen} x$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=$ $=1+\operatorname{tg}^2 x$
$f(x)=\operatorname{arcsen} x$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg} x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

Importante

Si una función es derivable en un punto x = a, entonces es continua para x = a.

El reciproco es falso, es decir, hay funciones que son continuas en un punto y que, sin embargo, no son derivables.

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio