INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

2º de Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

Programación lineal:
Programación lineal. Maximización y minimización.

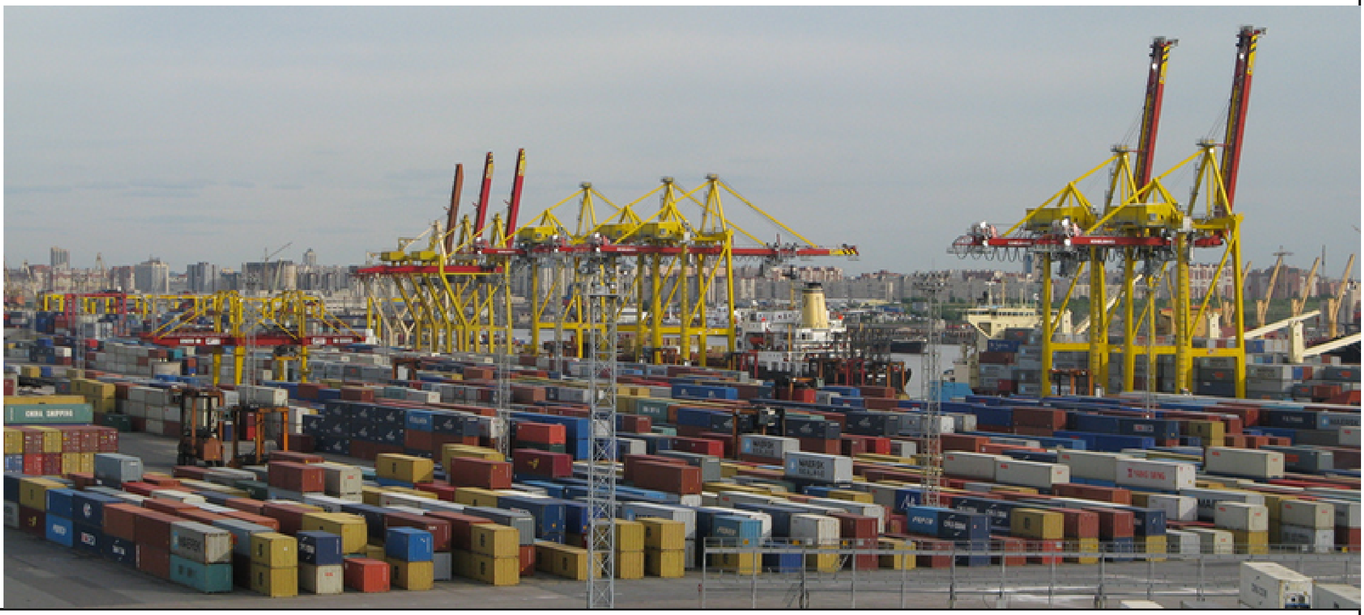


Imagen de ccordoba bajo licencia Creative Commons

En la sociedad actual en la que vivimos optimizar, maximizar beneficios y minimizar costos, es una expresión cotidiana en el mundo laboral y empresarial; que afecta de manera directa e importante a nuestras vidas.

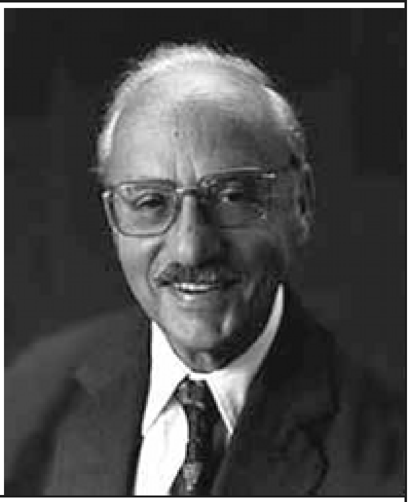


Imagen de G.Dantzig de la University of St. Andrews, Scotland

A las empresas de distribución de mercancías (materias primas, productos de consumo), reparto de paquetería, transporte de viajeros,... se les plantea el problema diario de la logística, es decir, asignar conductores, vehículos, rutas, horarios, mercancías, ... y conseguir la distribución óptima, puede suponer un ahorro importante de dinero y por lo tanto un mayor beneficio empresarial.

Este problema, que en algunas empresas forma parte de su organización diaria, puede llegar a tener un número muy alto de variables (miles en algunos casos) y las matemáticas nos ayudarán a resolverlo.

A esta rama de las matemáticas se le llama **Programación Lineal** y está contenida dentro de otra más amplia denominada Investigación Operativa, encargada básicamente de ayudar en la toma de decisiones utilizando métodos cuantitativos.

Aunque ya se habían estudiado problemas de optimización con anterioridad, podemos decir que la Programación lineal surge durante la Segunda Guerra Mundial. Las matemáticas ayudan al ejército a la hora de la intendencia, minimizando costes; así como a entorpecer este reparto en las filas enemigas.

En 1947 George Bernard Dantzig, matemático americano, ideó el método del SIMPLEX para resolver los problemas de programación lineal usando un algoritmo que es posible implementarlo en ordenadores.

Para saber más

Como ves la historia de la programación lineal es bastante reciente. Aquí tienes dos enlaces que te ampliarán un poco más sus comienzos.

Origen de la programación lineal
Wikipedia

Curiosidad

Un hecho real en la vida de Dantzig dio origen a una famosa leyenda urbana en 1939, mientras él era un estudiante graduado en Berkeley. Cerca del comienzo de una clase a la que Dantzig llegaba tarde, el profesor Jerzy Neyman escribió en la pizarra dos ejemplos famosos de problemas estadísticos no resueltos. Cuando Dantzig llegó más tarde a clase, pensó que los dos problemas eran tarea para la casa y los escribió en su cuaderno. De acuerdo con Dantzig, los problemas "le parecieron ser un poco más difíciles de lo normal", pero unos pocos días después obtuvo soluciones completas para ambos, aún creyendo que estos eran tareas que debía entregar. Seis semanas después, Dantzig recibió la visita de un excitado profesor Neyman, quien había preparado una de las soluciones de Dantzig para ser publicada en una revista matemática. Años después otro investigador, Abraham Wald, se preparaba para publicar un artículo en el que llegaba a la conclusión del segundo problema, y en este artículo incluyó a Dantzig como coautor.

Esta historia comenzó a difundirse, y fue usada como una lección motivacional demostrando el poder del pensamiento positivo. A través del tiempo el nombre de Dantzig fue removido y los hechos fueron alterados, pero la historia básica persiste en la forma de un mito urbano.

Fotografía en Flickr de Anvica bajo licencia Creative Commons

La programación lineal nos va a ayudar en la resolución de problemas donde existe una función que tenemos que maximizar o minimizar bajo determinadas condiciones o restricciones

Empezaremos con un caso en el que vamos a obtener las restricciones que nos plantea el enunciado. Posteriormente representaremos gráficamente el recinto que conforman estas restricciones. En dicho recinto encontraremos las soluciones al problema inicial.

Estos pasos serán fundamentales, como veremos en los epígrafes sucesivos, en la resolución de un problema de programación lineal.

Caso:

La máquina de café de un restaurante se ha quedado sin producto y un amigo de Luisa, que es la propietaria, le comentó que él hacía una mezcla de café muy bueno con café natural a 6 € el kg y con torrefacto a 3 € el Kg, y que en ese momento le quedaban en el almacén 400 kg de natural y 300 kg de torrefacto. Luisa le dijo, que no podía pagar más de 4 € el kg. ¿Cómo pudo hacer la mezcla el amigo de Luisa?

Ejercicio resuelto

Plantea el sistema de inecuaciones para ayudar al amigo de Luisa y escribe una posible solución.

Mostrar retroalimentación

Si llamamos ***x*** al número de kg de café natural e ***y*** al número de kg de café torrefacto, tenemos las siguientes inecuaciones:

1º) Si no puede supera la mezcla los 4 € el kg, tenemos $6x+3y\leq 4(x+y)$, es decir, operando y despejando, $2x-y\leq 0$.

2º) Como mucho tenemos 400 kg de natural, es decir, $x\leq 400$.

3º) Tenemos como mucho 300 kg de torrefacto, es decir, $y\leq 300$.

El sistema que nos queda es:

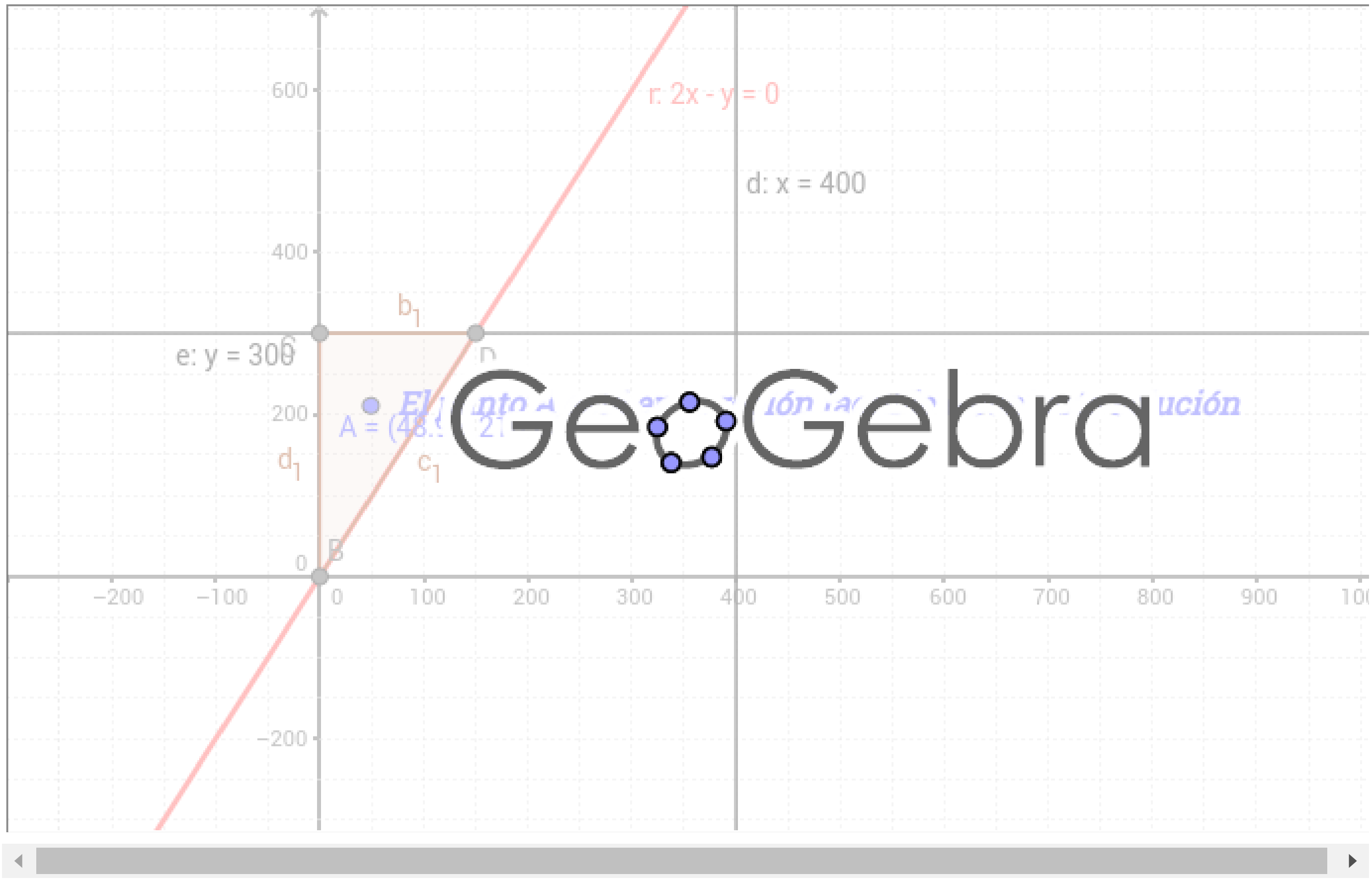
$$\begin{cases} 2x-y\leq 0 \\ x\leq 400 \\ y\leq 300 \end{cases}$$

Una posible solución, que verifica las tres inecuaciones sería x=50, y =250.

Puedes ver todas las soluciones en la siguiente escena creada con Geogebra.

Solución al problema del café realizada con Geogebra.

Desplaza el punto A para ver las posibles soluciones.



r: 2x - y = 0
d: x = 400
e: y = 300
b1
c1
d1
C
D
B
600
400
200
0
−200
−100
100
300
500
700
800
900

Imagen modificada de Contando Estrelas bajo licencia Creative Commons

La programación lineal es uno de los casos prácticos más evidente en la resolución de inecuaciones lineales. En una empresa de transporte, por ejemplo, puede ser utilizada para resolver cuestiones tan distintas como:

- Reparto de la mercancía en los distintos tipos de vehículos disponibles.
- Compra de vehículos, según ofertas del mercado
- Asignación de personal a puestos de trabajo.
- Aprovechamiento del espacio a la hora del almacenaje de paquetes.

Ejemplo de problema de programación lineal: La semana pasada recibimos la siguiente propuesta de una empresa que tenía que transportar 600 paquetes, todos de las mismas dimensiones y peso.

El envío se hacía desde Jerez de la Frontera a Sevilla.

Nosotros disponemos de dos tipos de furgonetas. La furgoneta mayor (Tipo I) tiene capacidad para 50 paquetes, mientras que en la más pequeña (Tipo II) caben 30.

Los costes que nos supondrán enviar las furgonetas del tipo I son de 120 €, mientras que con la del tipo II el coste es de 60 €.

Para el día solicitado tenemos disponibles 10 furgonetas de cada tipo. Se nos plantean dos cuestiones: ¿Cuál es la distribución óptima para conseguir que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste?

Iremos dando pasos en la dirección de búsqueda de la solución a este problema de programación lineal.

Importante

La **programación lineal** nos ayuda a resolver problemas de optimización (maximización o minimización) de funciones de varias variables bajo determinadas condiciones (restricciones).

Lo primero que hacemos es organizar los datos en una tabla.

Furgoneta	N.º de Furgonetas	N.º de Paquetes transportados	Costes
Tipo I	x	50 x	120x
Tipo II	y	30 y	60y
Total		50x + 30y	120x+60y

Nuestro objetivo es minimizar el coste total de la operación, para ello nos fijamos en la casilla correspondiente, que este caso es Total-Costes **120x+60y**.

A esta expresión la denominaremos **función objetivo** del problema: **F(x,y)=120x+60y**

A continuación enumeramos **las restricciones** que se nos imponen en el problema:

- El número de furgonetas del Tipo I tiene que ser mayor o igual a cero y, para ese día, tenemos disponibles 10 furgonetas de ese tipo. Lo podemos representar en una desigualdad doble como: **$0 \leq x \leq 10$**.
- Lo mismo ocurre con las furgonetas del Tipo II, también disponemos de 10 unidades como máximo para ese día. Lo podemos representar con la misma desigualdad, lo que ocurre es que en este caso la variable es "y": **$0 \leq y \leq 10$**.
- Por último tenemos que enviar un número suficiente de unidades para que quepan todos los paquetes, aunque alguna furgoneta no vaya completamente cargada, para ello la capacidad total debe ser igual o mayor a los 600 paquetes que hay que transportar: **$50x+30y \geq 600$**.

Imagen del Banco de Imágenes y Sonidos del ITE con licencia Creative Commons

Si lo expresamos de forma matemática nuestro problema quedará planteado de la siguiente forma:

Min 120x+60y

Sujeto a
$0 \leq x \leq 10$
$0 \leq y \leq 10$
$50x+30y \geq 600$

Importante

Un problema de programación lineal con dos variables, x e y, trata de **optimizar** (maximizar o minimizar) una función llamada **función objetivo** que tiene la forma:

Optimizar F(x,y)=ax+by

sujeta a unas **restricciones** dadas mediante un sistema de inecuaciones del tipo:

$a_1x+b_1y \leq c_1$
$a_2x+b_2y \leq c_2$
....
$a_nx+b_ny \leq c_n$

Ejercicio resuelto

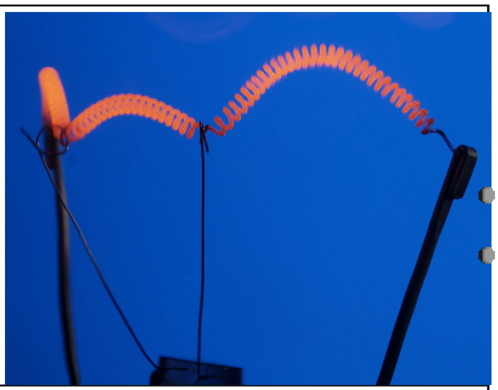


Imagen de Wikimedia Commons con licencia Creative Commons

Tenemos que comprar bombillas para iluminar un almacén. Necesitamos que las bombillas sumen un total de 1440 vatios como mínimo. Hemos recibido la oferta de dos tipos de bombillas:

- Bombillas incandescentes tradicionales de 90 vatios al precio de 1 €.
- Bombillas de bajo consuma de 9 vatios (equivalentes a 60 vatios) al precio de 5 €.

Debido a la estructura del almacén el número total de bombillas no puede ser superior a 20. Por otra parte, las normas del ayuntamiento imponen que, para este tipo de salas el número de bombillas de bajo consumo no puede ser inferior a la mitad del de bombillas tradicionales.

Ayuda a nuestros amigos planteando el problema de programación lineal.

Mostrar retroalimentación

Lo primero que tenemos que hacer es organizar los datos en una tabla:

	N.º Bombillas	N.º Vatios	Precio
Incandescentes	x	90x	x
Bajo Consumo	y	60y	5y
Total	x+y	90x+60y	x+5y

Nuestro objetivo es minimizar el coste, por lo tanto, tendremos que minimizar el Precio total: **Min F(x,y)=x+5y**

Las restricciones las sacamos de la tabla:

La primera es obvia x≥0 e y≥0.

El número total de bombillas debe ser inferior a 20: x+y≤20

El número total de vatios tiene que ser superior a 1440: 90x+60y≥1440

Además el ayuntamiento impone que el número de bombillas de bajo consumo no puede ser inferior (tiene que ser igual o superior) a la mitad de las bombillas tradicionales, es decir,

$$y \geq \frac{x}{2} \Rightarrow 2y \geq x \Rightarrow 0 \geq x-2y \Rightarrow x-2y \leq 0$$

Por lo que el planteamiento del problema queda así:

Min F(x,y)=x+5y

Sujeto a
x≥0, y≥0
x+y≤20

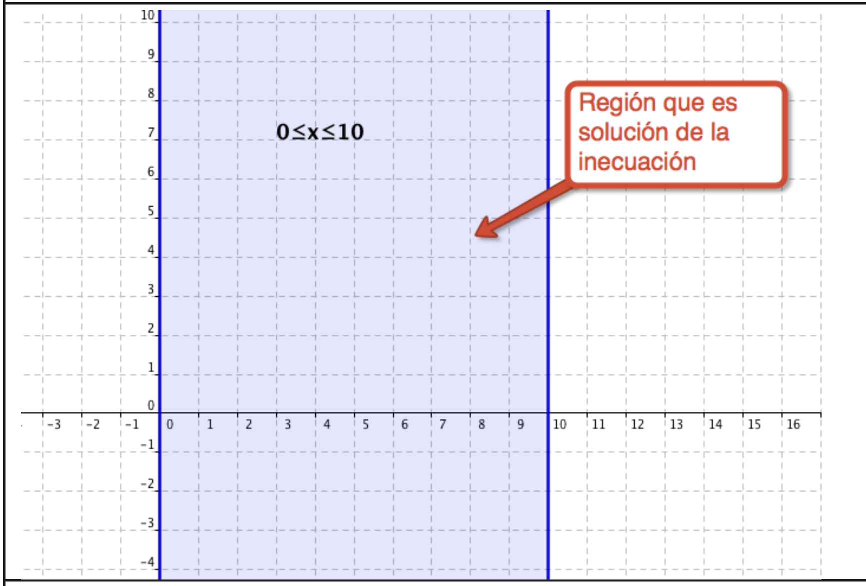
90x+60y≥1440
x-2y≤0

1.2. Región factible

Para resolver nuestro problema lo primero que haremos será representar gráficamente las restricciones en unos ejes de coordenadas:

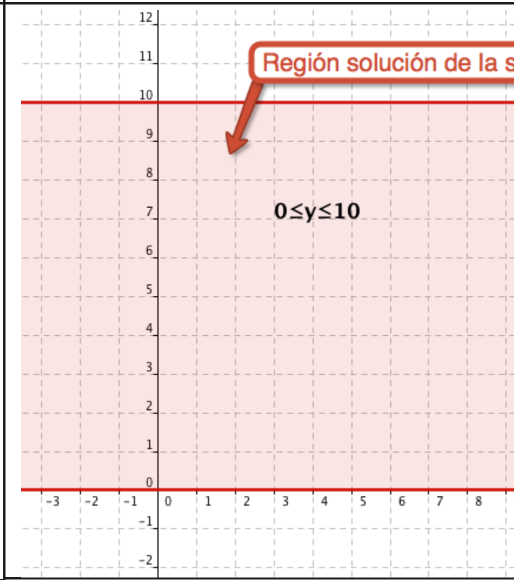
1) Resolvemos cada inecuación por separado

Primera restricción: **0≤x≤10**



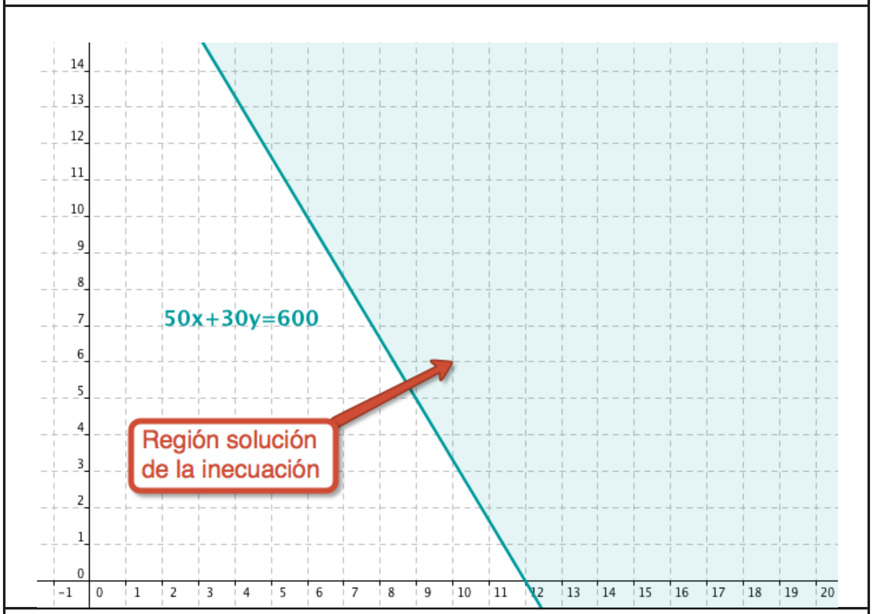
Los puntos que verifican 0≤x≤10, son aquellos que están a la derecha de la recta x=0 y al mismo tiempo están a la izquierda de la recta x=10.

Segunda restricción: **0**



Los puntos que verifican 0≤y≤10, son encima de la recta y=0 y al mismo tie de la recta y=10.

Tercera restricción: **50x+30y≥600**



En este caso lo primero que hacemos es representar la recta 50x+30y=600. Una vez representada basta sustituir un punto, el (0,0) por ejemplo, para saber cual es el semiplano solución. Si sustituimos (0,0) en 50x+30y≥600 obtenemos:

$$50\cdot(0)+30\cdot(0)\geq 600 \Rightarrow 0\geq 600$$

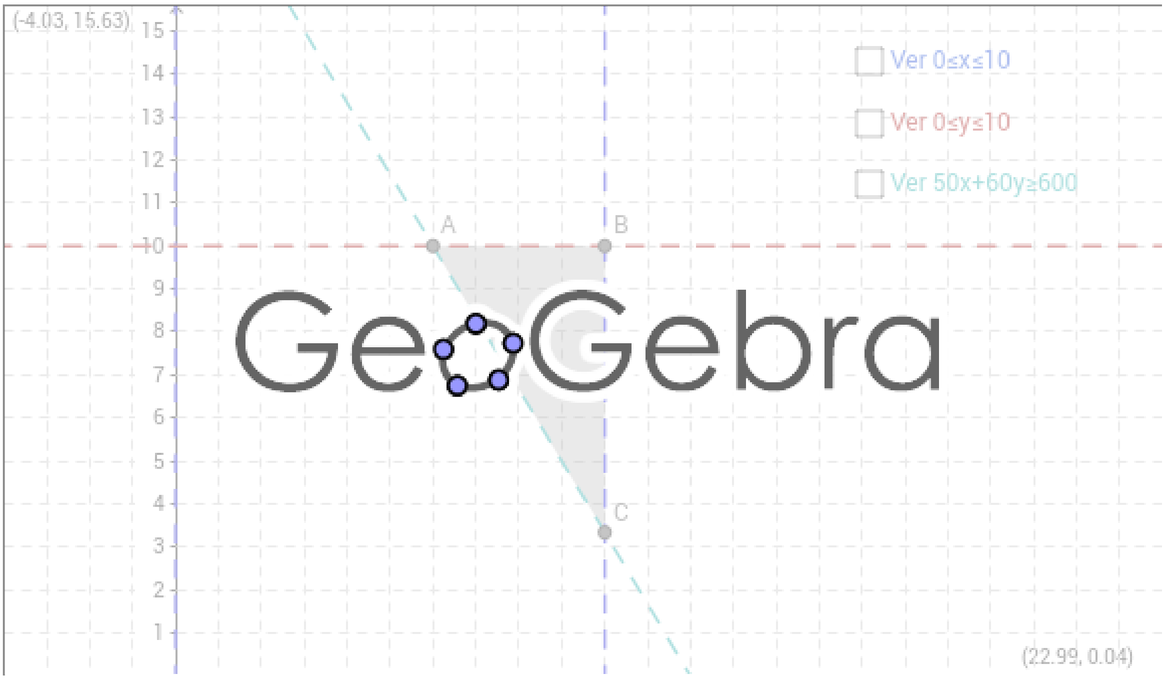
Que es falso, por lo tanto, el semiplano solución es el que no contiene al origen de coordenadas.

Con este vídeo puedes recordar com en el plano:

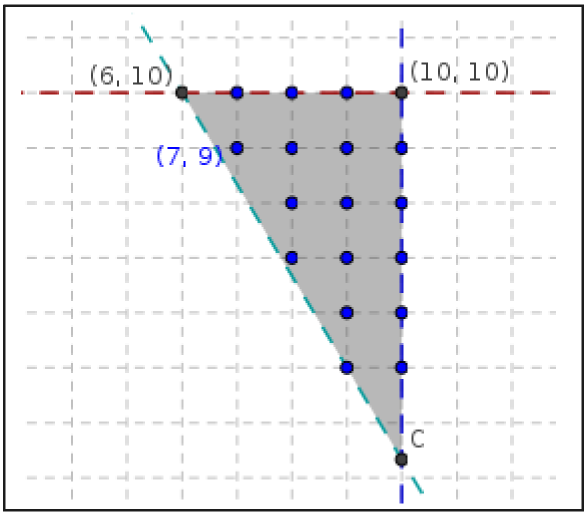
Recuerda que para saber el semi inecuación basta con sustituir un pun si no pertenece a la recta.
Si el punto verifica la inecuación, el se punto es la solución, en caso contrario

2) Calculamos la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones

Representamos las tres regiones en la misma gráfica, la región intersección será el lugar donde se encuentre la solución que buscamos. Marca la casilla correspondiente para ver su solución.



La solución a nuestro problema debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta región recibe el nombre de **región factible.**



En nuestro caso la región factible está acotada, es decir, es un polígono. Hay problemas donde la región no está acotada. En cualquier caso siempre es un polígono o una región convexa.

Nos falta añadir una condición. No podemos enviar 6,5 furgonetas, por lo tanto, el número de furgonetas de cada tipo han de ser números enteros. Por lo tanto, la solución la buscaremos entre los puntos que están dentro de la región factible y sus coordenadas son números enteros.En nuestro caso hay 20 posibles soluciones.

Habrá que averiguar en cuál de ellos la función F(x,y)=120x+60y toma un valor menor. Por ejemplo para el punto (7,9), que nos indica 7 furgonetas del tipo I y 9 furgonetas del tipo II, le corresponde un gasto de F(7,9)=120·(7)+60·(9)=840+540=1380 €.

¿Podemos mejorarlo?

Imagínate que en vez de 20 posibles soluciones hubiera 15000. Vamos a buscar un método en el que podamos resolver el problema sin necesidad de ir calculando punto a punto hasta ver cuál es el coste mínimo.

Importante

La solución de un problema de programación lineal se encuentra en una región poligonal, esta región viene determinada por la solución de todas las restricciones de nuestro problema. A esta región se le denomina **región factible.**

Esta región factible puede ser acotada o no acotada. Si la región es acotada el problema siempre tiene solución. Si no es acotada puede que no tenga solución.

Además, la solución puede ser discreta (sólo podemos tomar valores enteros) o continua (puede tomar cualquier valor dentro de la región).

Ejercicio resuelto

¿Recuerdas el ejercicio resuelto del apartado anterior donde ayudábamos a plantear el problema de las bombillas necesarias para el almacén ?

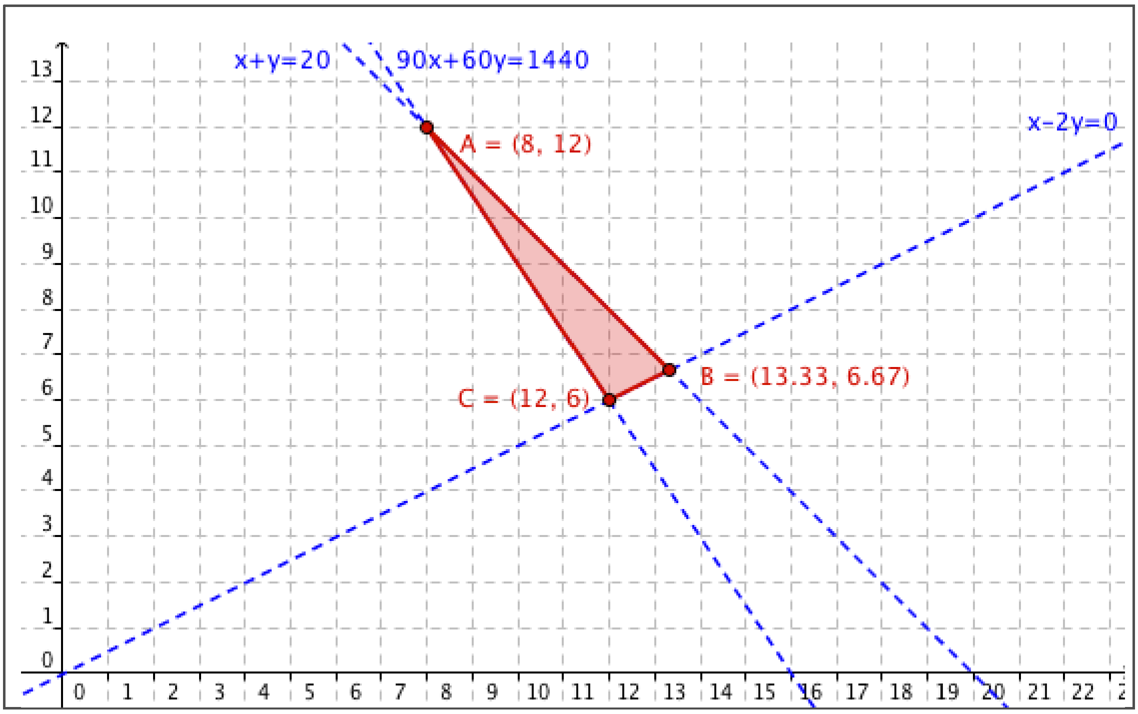
Su planteamiento nos había quedado así:

Min F(x,y)=x+5y

Sujeto a
x≥0, y≥0
x+y≤20
90x+60y≥1440
x-2y≤0
Ayúdanos a representar la región factible

Mostrar retroalimentación

La región factible del problema es:



Comprueba lo aprendido

La función que tenemos que maximizar o minimizar se denomina:

Sugerencia

- Función Factible
- Función Objetivo
- Función Restrictiva
- Función Óptima

Creo que no, que lo que es factible es la región donde están las soluciones

Muy bien

Tiene restricciones, pero no la función sino el problema

No. No es la mejor función.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

¿Qué punto pertenece al semiplano dado por la inecuación $2x+y \leq -5$?

Sugerencia

- A(-1,3)
- B(3,-8)
- C(-2,-3)
- D(-3,5)

No, 1 no es menor que -5.

No, -2 no es menor que -5

Muy bien, -7 es menor que -5.

No, -1 no es menor que -5.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Las siguientes restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 2$ delimitan:

Sugerencia

- Una región acotada.
- Una región no acotada.
- Una región minimizada.
- No representa ninguna región.

Creo que no la has representado bien. Inténtalo de nuevo.

Muy bien.

Minimizada, ¿estás seguro? Yo creo que no.

Sí, sí que representa una región.

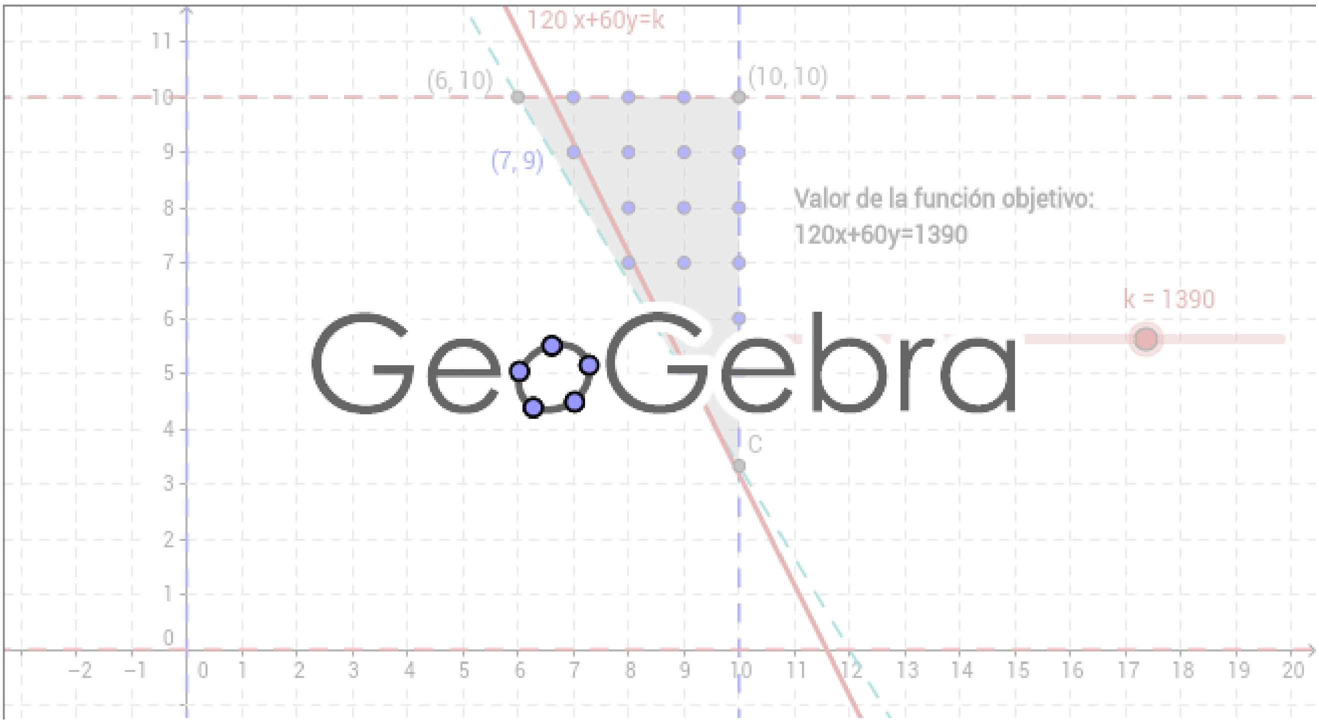
Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Para encontrar la solución nos vamos a ayudar de la función objetivo F(x,y)=120x+60y. ¿Cómo?, representando en primer lugar la recta 120x+60y=0, y a partir de ella iremos trazando rectas paralelas hasta que lleguemos a la región factible.

Recuerda que todas las rectas que son paralelas a 120x+60y=0 son aquellas que tienen la forma 120x+60y=k, donde k puede tomar cualquier valor.

Vamos a verlo gráficamente. Para ello, en la siguiente escena, mueve el punto k, que está sobre el deslizador rojo. Llévalo a cero y aumenta su valor hasta que topes con el primer punto factible. Este punto será la solución de nuestro problema.



Como podemos observar en la escena anterior el primer punto de la región con el que "tropieza" la recta es el punto (6,10). Este punto es la solución pues, de todos los puntos factibles, en este es donde la función objetivo toma el valor más pequeño, es decir, es el punto de menor coste para la empresa. Esto quiere decir que la solución óptima consiste en enviar 6 furgonetas del tipo I y 10 furgonetas del tipo II.

Imagen de Wikimedia Commons con licencia Creative Commons

Para este punto la función objetivo toma un valor de 1320, es decir, F(6,10)=120·6+60·10=720+600=1320. El coste de enviar las furgonetas es de 1320€.

Conclusión:

Tenemos que enviar 6 furgonetas del Tipo I y 10 furgonetas del tipo II. El coste de la operación es de 1320€.

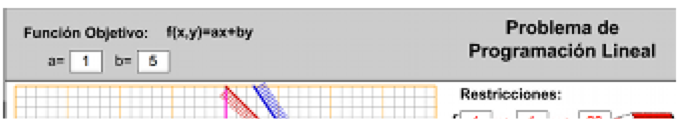
Después de ver el resultado parece lógico pensar que tenemos que enviar el mayor número de furgonetas del tipo II disponibles, ya que su coste es justo la mitad de las del tipo I y dos furgonetas del tipo II(coste 120€) transportan 60 paquetes, 10 más que una sola del tipo I (coste 120€). Es decir, a igual coste es mejor enviar 2 del tipo II, que una del tipo I.

Con este vídeo podrás repasar todo el proceso de construcción de un problema de programación lineal a partir del planteamiento del problema. Pertenece a una serie llamada Programación lineal que consta de 11 videos, te pueden ser de gran ayuda:

Importante

- La solución para un problema de programación lineal, si existe, siempre se alcanzan en los vértices de la región factible y se denomina **solución óptima**.
- Si el valor óptimo se alcanza en dos de los vértices de la región factible A y B, entonces también son solución todos los puntos del segmento AB, es decir, el que corresponde a un lado de la región factible.

Ejercicio resuelto

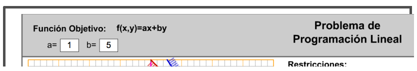


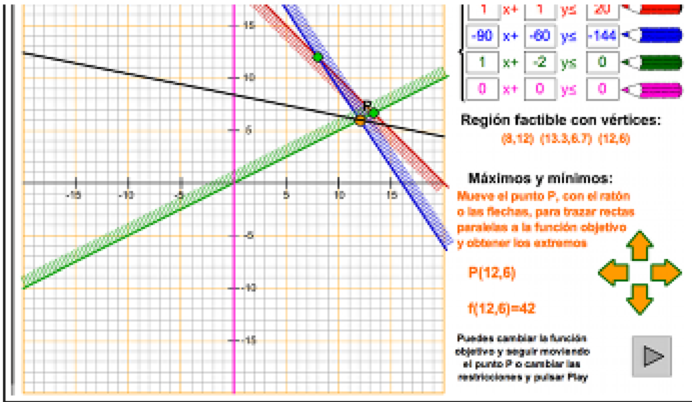
Bueno, vamos a terminar el problema de las bombillas.

En nuestro caso, las restricciones x≥0 e y≥0 son redundantes, es decir, no son necesarias para resolver el problema.

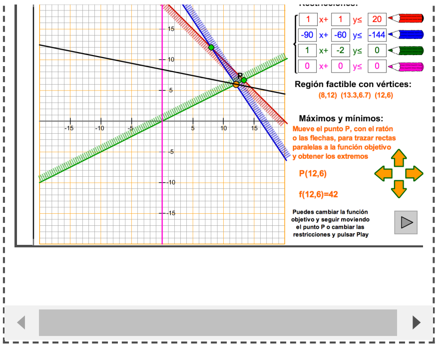
Mostrar retroalimentación

El mínimo se alcanza en el punto (12,6) y el valor de la compra de las bombillas es de 42 €, como podemos ver en la siguiente captura de pantalla:





Animación del Banco de imágenes y sonidos del ITE bajo licencia Creative Commons



Comprueba lo aprendido

1. Un problema de Programación Lineal consiste en:

- Encontrar unas restricciones
- Representar una región factible
- Optimizar una función objetivo sujeta a unas restricciones
- Calcular el valor mínimo de una función a partir de una región factible

No, esto sólo es una parte del problema

No, esto sólo es una parte del problema

Opción correcta

Bueno, también puede ser máximo, y la región factible la tenemos que construir a partir de los datos del problema.

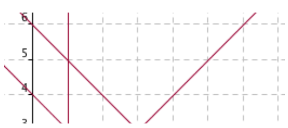
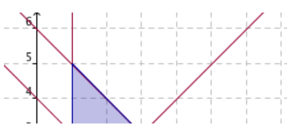
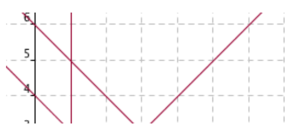
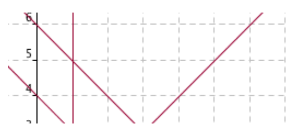
Solution

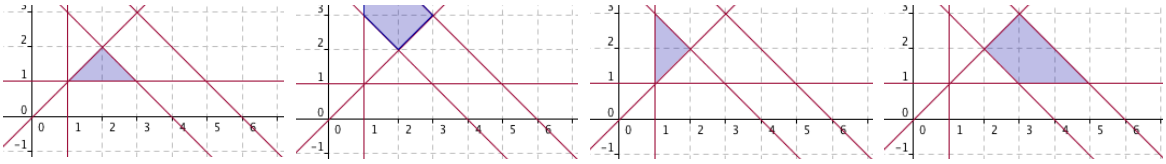
1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

2. La región factible determinada por las restricciones:

$2x+2y\leq 8$
$x+y\leq 6$
$y\geq x$
$x\geq 1,\ y\geq 1$

es una de las siguientes:



Región 1 Región 2 Región 3 Región 4

Sugerencia

- Región 1
- Región 2
- Región 3
- Región 4

Esta no cumple y≥x

Esta no cumple 2x+2y≤8

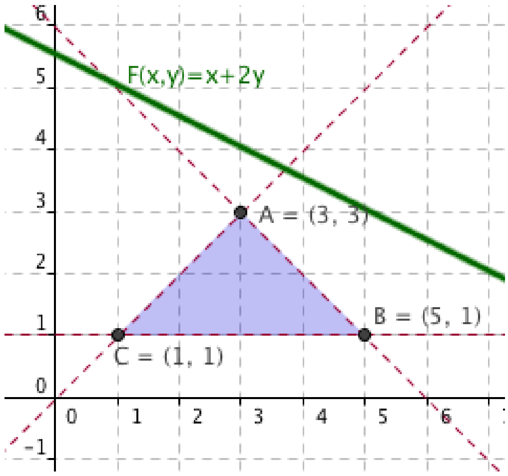
Muy bien, esta es.

Esta no cumple ni y≥x, ni 2x+2y≤8

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

3. La siguiente imagen representa la región factible de un problema de programación lineal, junto con una de las representaciones de la función objetivo F(x,y).



Sugerencia

- El valor mínimo de la función objetivo se alcanza en el punto B(5,1)
- El valor máximo de la función objetivo se alcanza en cualquier punto del segmento AB
- El valor mínimo de la función objetivo se alcanza en el punto (3,2)
- El valor mínimo de la función objetivo se alcanza en el punto C(1,1)

No, para ese punto el valor de la función objetivo es F(5,1)=(5)+2·(1)=7, y para el punto (2,1), que también está en la región factible es F(2,1)= (2)+2·(1)=4

Aunque en el punto A se alcanza el máximo de la función objetivo, para que la solución fuese todo el segmento AB, tendría que tomar en B el mismo valor que en A, y esto no es así. También tendría que ocurrir que la función objetivo fuera paralela a la recta que contiene a los puntos A y B, y esto tampoco es así

No, para este punto el valor de la función objetivo es F(3,2)=(3)+2·(2)=7, y, para el punto de la región factible (2,2) el valor es menor F(2,2)=(2)+2·(2)=6

Muy bien, para ese punto el valor de la función objetivo es F(1,1)=(1)+2·(1)=1+2=3

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto

2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

Terminamos el tema con un ejercicio propuesto en selectividad en el 2004.

Ejercicio resuelto

Chilhood Sugar biscuits por Elena Ho CC by-nc 2.0

Una pastelería elabora dos tipos de trufas, dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 g de cacao, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1 euro la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1.3 euros la unidad.

En un día, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10.5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día, para maximizar los ingresos, y determine dichos ingresos.

Mostrar retroalimentación

PASO 1: Ordenar la información

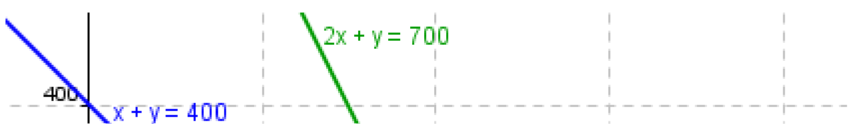
	Cacao (gr)	Nata (gr)	Azúcar (gr)
Trufas dulces (x)	20	20	30
Trufas amargas (y)	100	20	15
TOTAL	30000	8000	10500

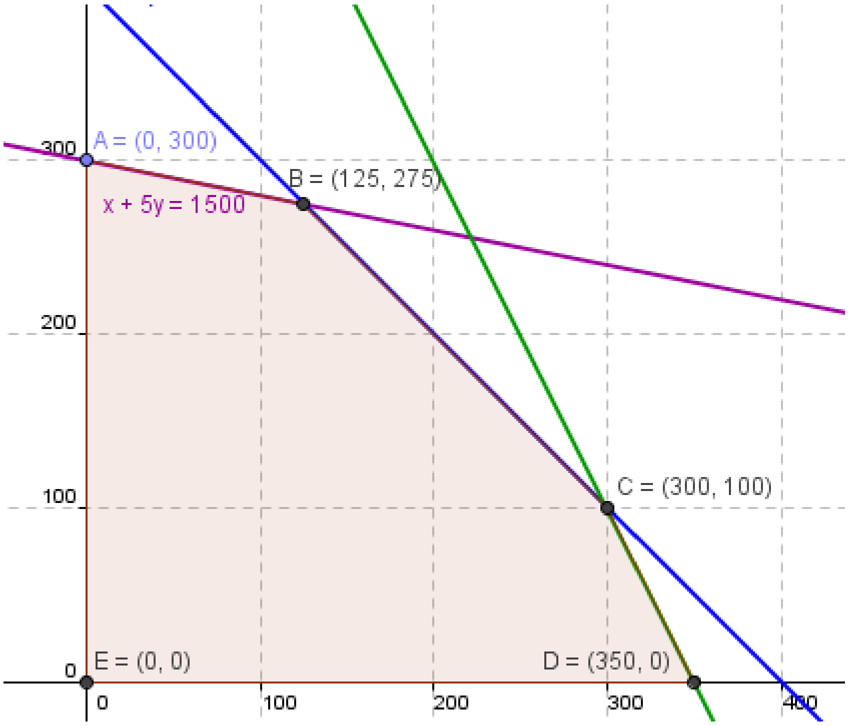
Observa como el total que tenemos como máximo de cada producto tiene que tener las mismas unidades, que lo que posee cada unidad (hemos pasado todo a gramos).

PASO 2: Restricciones (simplificadas)

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 5y \leq 1500 \\ x + y \leq 400 \\ 2x + y \leq 700 \end{cases}$$

PASO 3: Representamos la región factible





PASO 4: Posibles soluciones

La región factible no es discreta, por lo tanto puede haber soluciones no enteras. El máximo se dará en alguno de los vértices de la región.

A(0,300), B(125,275), C(300,100), D(350,0), E(0,0)

PASO 5: Función objetivo y máximo.

La función objetivo está relacionada con el dinero que ganamos con cada producto, ya que queremos maximizar el beneficio:

$$F(x,y)=1\cdot x+1{,}3\cdot y$$

- F(A)=390 €
- F(B)=125+1,3·275= 482,5 €
- F(C)=300+1,3·100= 430 €
- F(D)=350 €
- F(E)=0 €

Luego la solución del problema es 125 trufas dulces y 275 trufas amargas

Importante

La **programación lineal** nos ayuda a resolver problemas de optimización (maximización o minimización) de funciones de varias variables bajo determinadas condiciones (restricciones).

Importante

Un problema de programación lineal con dos variables, x e y, trata de **optimizar** (maximizar o minimizar) una función llamada **función objetivo** que tiene la forma:

Optimizar F(x,y)=ax+by

sujeta a unas **restricciones** dadas mediante un sistema de inecuaciones del tipo:

$$a_1x+b_1y\leq c_1$$
$$a_2x+b_2y\leq c_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_nx+b_ny\leq c_n$$

Importante

La solución de un problema de programación lineal se encuentra en una región poligonal, esta región viene determinada por la solución de todas las restricciones de nuestro problema. A esta región se le denomina **región factible.**

Esta región factible puede ser acotada o no acotada. Si la región es acotada el problema siempre tiene solución. Si no es acotada puede que no tenga solución.

Además, la solución puede ser discreta (sólo podemos tomar valores enteros) o continua (puede tomar cualquier valor dentro de la región).

Importante

- La solución para un problema de programación lineal, si existe, siempre se alcanzan en los vértices de la región factible y se denomina **solución óptima**.
- Si el valor óptimo se alcanza en dos de los vértices de la región factible A y B

- Si el valor óptimo se alcanza en dos de los vértices de la región factible A y B, entonces también son solución todos los puntos del segmento AB, es decir, el que corresponde a un lado de la región factible.