INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

# PAU

## Mayores de 25 años

# Contenidos

## Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
## Números y Álgebra: Álgebra

He aquí dos ejemplos de la forma como Arquímedes resumía sus hallazgos:

*"El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el cual uno de los lados alrededor del ángulo recto es igual al radio y el otro a la circunferencia del círculo".*

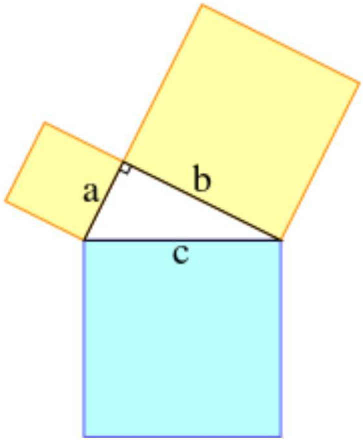
*"El volumen de cualquier esfera es igual a cuatro veces el cono que tiene su base igual al círculo máximo de la esfera y su altura igual al radio de la esfera".*

En los tiempos de Arquímedes para describir relaciones numéricas era preciso recurrir a conceptos similares en figuras geométricas conocidas. Para comprender el área del círculo se aludía a la del triángulo y para el volumen de la esfera se hacía referencia al del cono. Fórmulas como "la longitud de una circunferencia de radio $R$ es $2\pi R$" eran impensables.

El lenguaje algebraico, hoy considerado patrimonio irrenunciable de la ciencia, es una adquisición relativamente "moderna" y de lenta evolución. Y sin duda alguna, también es lento el uso y dominio de sus técnicas.

El lenguaje algebraico otorga a las Matemáticas y, en general a la ciencia, concisión y claridad, y también su carácter abstracto. El lenguaje algebraico, simbólico y formal, se ha convertido en gran medida en el lenguaje de la matemática. Obliga a ser preciso, a definir los símbolos que se utilizan, exige concisión, y a perseguir lo fundamental. Bastaría con repasar cualquier demostración clásica para darse cuenta de lo difícil e intrincado que sería intentar realizarla sin recurrir al simbolismo y al álgebra.

A continuación, te ofrecemos una demostración del teorema de Pitágoras:




Si llamamos $a$ a la medida de la hipotenusa y $b$ y $c$ a la medida de los catetos, la animación superior podría resumirse en lenguaje algebraico como:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

### Símbolos y números

En algunos aspectos de nuestra vida diaria utilizamos símbolos para referirnos a determinadas objetos, mensajes o situaciones. No tienes más que pensar en el reciente "lenguaje sms" creado para chatear o enviar mensajes de texto.


Fotografía en Flickr por katielips bajo CC

El lenguaje algebraico es algo menos moderno pero sin duda bastante más útil ya que nos permite:

- Percibir las estructuras lingüísticas subyacentes y su relación con las operaciones matemáticas, independientemente de la clase de números que aparezcan en ellas.
- Representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades.
- Crear modelos para problemas procedentes de la propia matemática (aritméticos, geométricos...) o de la vida cotidiana, financieros, físicos, etc. La modelización algebraica de los problemas desarrolla capacidades de representación, análisis verbal, búsqueda de relaciones y funciones, solución mecánica, análisis de soluciones, alcance de estas y generalización de los procesos.
- Reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución, destacando la importancia de herramientas y técnicas como el uso de funciones y operaciones.

## *Ejercicio resuelto*

Ana colabora en una asociación como voluntaria. Dependiendo del tiempo del que disponga, puede desarrollar su labor en Jornada Completa (8 horas), a Media Jornada (4 horas) o a Horas Sueltas.

Cada día, cuando los voluntarios llegan a la sede de la asociación, anotan el tipo de jornada que van a dedicar en una ficha como esta:

<table>
<tr><td>Nombre</td><td colspan="5">Jornada Completa</td><td colspan="5">Media Jornada</td><td colspan="5">Horas sueltas</td></tr>
<tr><td>Ana</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Y al final del mes, la asociación genera un resumen de la dedicación de sus voluntarios:

| **Nombre** | **C** | **M** | **S** |
|---|---|---|---|
| Ana | 4 | 2 | 1 |
| Manuel | 6 | 0 | 2 |
| Javi | 1 | 7 | 6 |
| Marta | 12 | 1 | 0 |

**Mostrar retroalimentación**

**M** es el número de días que cada voluntario realiza **Media Jornada**.

Como ves, **C**, **M** y **S** son letras que equivalen a diferentes números según cada caso. En Matemáticas, a estas letras las llamaremos **variables**. Las variables no solo nos sirven para organizar información, sino también para trabajar con números de una forma generalizada. Es decir, no necesito saber cuánto vale **C** para poder hacer determinados cálculos.

Por ejemplo, si a final de mes quiero saber cuántas horas ha dedicado alguien en días a jornada completa, tendré que multiplicar el número de días que ha tenido esa jornada (C) por 8, que es el número de horas que se dedican esos días. Es decir: **C·8**

Cuando trabajamos con números y letras, hay algunas reglas que debemos seguir. Una de ellas es que, si multiplicamos un número por una letra, primero escribiremos el número y luego la variable. En nuestro caso quedaría: **8·C**

Otra regla es que, si estamos multiplicando un número por una variable, no es necesario escribir el símbolo del producto. Por lo tanto, el número de horas que dedica alguien mensualmente en Jornadas Completas será **8C**

Sabiendo esto ¿serías capaz de escribir con números y las variables **C**, **M** y **S** cuántas horas dedica un voluntario mensualmente?

**Mostrar retroalimentación**

**H=8C+4M+S**

8C es el número de horas que dedica un voluntario en los días a Jornada Completa.

A Media Jornada se colaboran 4 horas, luego el total será 4 por M, es decir 4M.

Las horas sueltas, S, las sumamos al resultado final.

En el caso de Javi, usando el resultado anterior, ¿cuántas horas ha dedicado al mes?

**Mostrar retroalimentación**

Para Javi C=1, M=7 y S=6, luego H = 8C+4M+S = 8·1+4·7+6 = 8+28+6 = 42 horas.

Si pinchas en la siguiente imagen descubrirás multitud de símbolos matemáticos, algunos ya conocidos y muchos otros por conocer. Con casi toda seguridad que en alguna ocasión (no muy lejana) tendrás que recurrir a esta fuente:

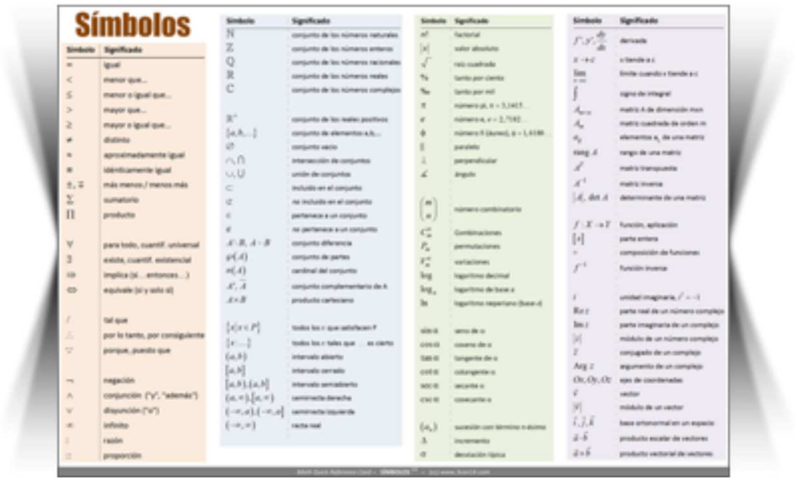



Imagen de www.3con14.com bajo CC

Como ya hemos visto el lenguaje algebraico está formado por números, símbolos matemáticos y letras.

Fotografía en Flickr por brainware3000 bajo CC

Cuando pasamos del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico ponemos de manifiesto los datos (que simbolizamos por letras), las operaciones que los ligan (a través de símbolos preestablecidos) y las relaciones entre los mismos (por ejemplo, la de igualdad).

Es costumbre en ciertos campos de las ciencias usar letras determinadas según el objeto con el que se esté trabajando. Así por ejemplo, si manejamos números naturales en sucesiones, es usual utilizar las letras m y n, para simbolizar dichos números. Los números pares se simbolizan con 2n y los impares con 2n+1.

Otro ejemplo, en geometría se suelen utilizar letras mayúsculas para referirnos a los ángulos, puntos, superficies, volúmenes... mientras que se utilizan letras minúsculas para las medidas lineales.

En Física, en el estudio del movimiento el espacio se simboliza por e, la velocidad por v y el tiempo por t.

Aunque en teoría se podría utilizar cualquier letra para simbolizar las magnitudes anteriores, respetar el lenguaje preestablecido es síntoma de conocimiento y soltura.

### Expresiones algebraicas

En la siguiente presentación vamos a descubrir cómo pasar del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico y el resultado de este cambio: las expresiones algebraicas.


Presentación en Slideshare por Patricia_Perez

**Importante**

Una **Expresión Algebraica** es aquella en la que usamos números y letras relacionadas por operaciones matemáticas.

Cada expresión algebraica tiene un significado. De hecho, cuando tenemos un problema, intentamos **traducirlo** al lenguaje algebraico mediante una expresión. Mira los siguientes ejemplos

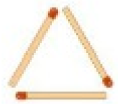
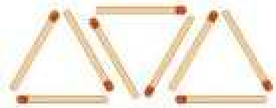
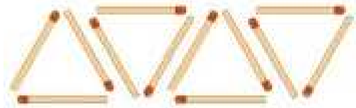
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Enunciado (lenguaje usual)** | A un número le sumamos 4 unidades | El doble de un número | La cuarta parte de un número, menos su cuadrado | El precio de $x$ kg. de naranjas, si valen a 1,80 €/kg. | El 15% de un precio |
| **Expresión algebraica (lenguaje matemático)** | $a+4$ | $2x$ | $\frac{r}{4}-r^2$ | $1{,}8x$ | $0{,}15x$ |

**Valor numérico de una expresión algebraica**

Una expresión algebraica también nos puede servir para buscar generalizaciones de un problema.

Imagina que construimos triángulos con cerillas del siguiente modo:

| Nº de | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **triángulos (n)** |  |  |  |  |
| **Nº de cerillas (p)** | **3** | **6** | **9** | **12** |

¿Podríamos averiguar cuántas cerillas necesito si quiero formar 100 triángulos?

Para ello tenemos que encontrar una relación entre el número de triángulos (n) y el número de cerillas (p). Si te fijas, por cada triángulo necesito 3 cerillas, por lo que podríamos deducir que **p=3n**. Conociendo esta regla, ya puedo saber que para **n=100** será **p=3·100=300** cerillas.

## Importante

Si en una expresión algebraica se sustituyen las letras por números y se realiza la operación indicada se obtiene un número que es el **valor númerico de la expresión algebraica** para los valores de las letras dados.

## Comprueba lo aprendido

Completa los espacios en blanco con la solución correcta.

1. El valor numérico de $4a-2b$ para $a=1$ y $b=0$ es $\square$.
2. El valor numérico de $x^3-2x$ para $x=-1$ es $\square$.
3. El valor numérico de $x^3+3x-1$ para $x=2$ es $\square$.
4. El valor numérico de $\frac{a\cdot(b+c)}{(c-a)\cdot a}$ para $a=3$ , $b=4$ y $c=5$ es $\square$.
5. Para que la expresión algebraica $5x+8$ valga 3, debe ser $x=$ $\square$.

**Enviar**

2. $(-1)^3-2\cdot(-1)=-1+2=1$

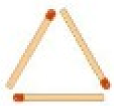
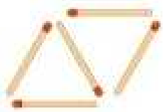
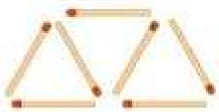
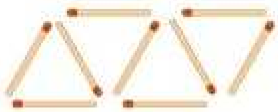
3. $2^3+3\cdot2-1=8+6-1=13$

4. $\dfrac{3\cdot(4+5)}{(5-3)\cdot3}=\dfrac{27}{6}=4{,}5$

5. Si $x=-1,\ 5\cdot(-1)+8=3$

## Ejercicio resuelto

Vamos a buscar una fórmula que me diga el número de cerillas que necesito para formar los siguientes triángulos. Es parecido al ejemplo del apartado anterior, pero con una modificación: los triángulos se superponen.

| **Nº de triángulos (n)** | **1**  | **2**  | **3**  | **4**  |
|---|---|---|---|---|
| **Nº de cerillas (c)** | 3 | 5 | 7 | 9 |

¿Cuál es la fórmula que relaciona el número de cerillas con el número de triángulos?

**Mostrar retroalimentación**

En este caso no son 3 cerillas por cada triángulo. Para el primer triángulo sí se cumple, pero si observas bien, verás que cada figura se obtiene sumando dos cerillas nuevas al anterior:

- n=1 : c=3
- n=2 : c=3+2
- n=3 : c=3+2+2
- n=4 : c=3+2+2+2

A partir de aquí tenemos que generalizar: en todos los casos empezamos por 3 cerillas, y luego sumamos 2 por cada nuevo triángulo. En cada caso tenemos (n-1) "nuevos triángulos", es decir, tenemos que sumar el 2, n-1 veces. Ya tenemos la fórmula:

$$c=3+2\cdot(n-1)$$

ejemplo.

**Mostrar retroalimentación**

Nos están pidiendo que calculemos el valor numérico en cada caso:

- n=1 : c = 3+2·(1-1) = 3
- n=2 : c = 3+2·(2-1) = 3+2·1 = 5
- n=3 : c = 3+2·(3-1) = 3+2·2 = 7
- n=4 : c = 3+2·(4-1) = 3+2·3 = 9

Como puedes comprobar, nos da los mismos resultados que en la tabla.

Calcula cuántas cerillas necesitamos para formar 100 triángulos.

**Mostrar retroalimentación**

Tenemos que calcular el valor numérico de c para n=100. Sustituimos en la fórmula y obtenemos:

c = 3+2·(100-1) = 3+2·99 = 201 cerillas

## 1.2. Operaciones con expresiones algebraicas

Ya sabes lo que son expresiones algebraicas y cómo darles valores. Veamos ahora cómo trabajar con ellas. Aprenderás a sumar, restar y multiplicar expresiones, además de tres fórmulas que te serán de bastante utilidad.

*Importante*

Tanto en la suma como en la multiplicación de expresiones algebraicas se conservan las propiedades anteriormente vistas en los números reales (conmutativa, asociativa, distributiva...)

- **Suma y resta:**

Fíjate en la siguiente expresión: $2x - y + 4x + y^2 + 8y - y^2 + 2xy$
Está formada por siete sumandos llamados **términos**. En cada término (por ejemplo $2xy$ ) podemos distinguir una parte numérica o **coeficiente** (en nuestro caso 2) y una **parte literal** ( $xy$ ).

Los términos que tengan exactamente la misma parte literal son **términos semejantes**. Esos serán los que podemos sumar y restar. En nuestro ejemplo, encontramos cuatro tipos diferentes de términos semejantes.

$$\boxed{2x}\boxed{-y}\boxed{+4x}\boxed{+y^2}\boxed{+8y}\boxed{-y^2}\boxed{+2xy}$$

La suma y la resta consisten básicamente en "contar" los términos semejantes:

- Término $x$ : $2x+4x=6x$
- Término $y$ : $-y+8y=7y$ (Recuerda que $-y$ equivale a $-1y$ )
- Término $y^2$ : $y^2-y^2=0y^2=0$
- Término $xy$ : $2xy$

Resumiendo, $2x - y + 4x + y^2 + 8y - y^2 + 2xy = 6x + 7y + 2xy$

- **Producto**:

Para realizar el producto de un término por toda una expresión, multiplicaremos el primero por cada uno de los términos de la segunda expresión. Esto se resuelve multiplicando los coeficientes entre sí, y las variables entre sí. Por ejemplo,

$$2x \cdot (3 - 4x + y) = \boxed{\begin{array}{c} 2x \cdot 3 = 6x \\ 2x \cdot (-4x) = -8x^2 \\ 2x \cdot y = 2xy \end{array}} = 6x - 8x^2 + 2xy$$

Para multiplicar dos expresiones, haremos lo mismo pero multiplicando cada término de la primera expresión por cada uno de los términos de la segunda expresión. Luego sumaremos los términos semejantes para dejar el resultado lo más simplificado posible.

$$(x-2)\cdot(2x+3) = \begin{array}{|c|c|} \hline x\cdot 2x = 2x^2 & -2\cdot 2x = -4x \\ x\cdot 3 = 3x & -2\cdot 3 = -6 \\ \hline \end{array} =$$

$$= 2x^2 + 3x - 4x - 6 = 2x^2 - x - 6$$

*Importante*

Recuerda que:

- Si un coeficiente multiplica a una variable, no escribimos el signo de multiplicar: $2\cdot x = 2x$
- Si un coeficiente o una variable multiplica a un paréntesis, tampoco es necesario ponerlo: $-3\cdot(x+1) = -3(x+1)$
- Al multiplicar variables de la misma base sumamos los exponentes: $(xy^3)(x^2y^2) = x^3y^5$

**Identidades notables**

Hay tres fórmulas que debes conocer. Facilitan las operaciones y te serán de gran ayuda a la hora de simplificar expresiones, por eso no nos conformamos con ofrecerte simplemente las fórmulas, además tendrás su demostración a través de una animación en el banco de imágenes de INTEF por José Ángel López Mateos y un ejemplo en un vídeo de YouTube de juanmemol.

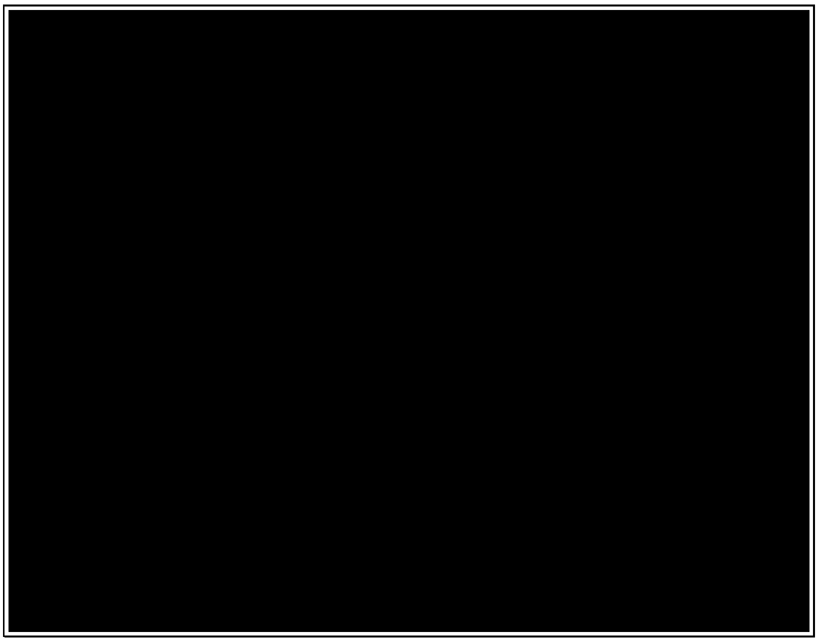
**CUADRADO DE UNA SUMA**

**Fórmula**

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b$$

Imagen de elaboración propia

**Ejemplo**



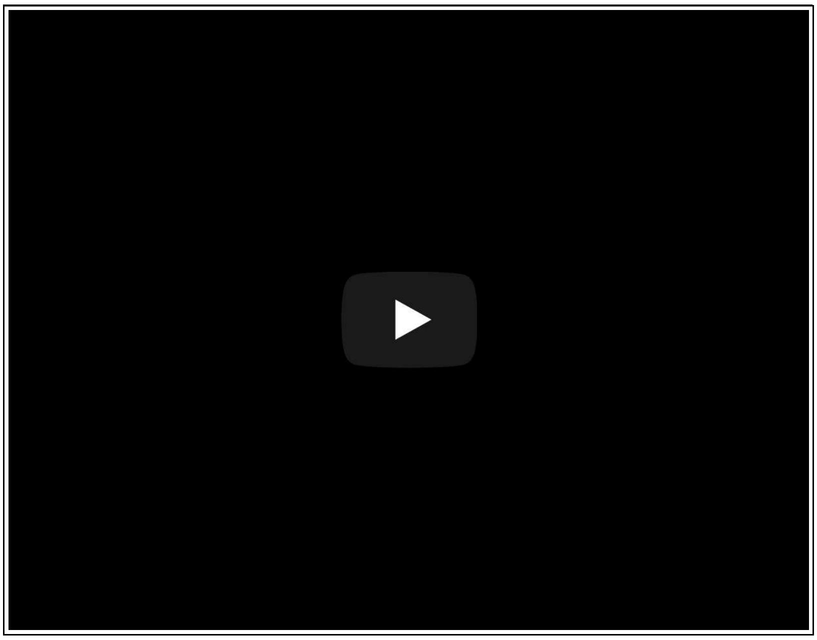
**CUADRADO DE UNA DIFERENCIA**

**Fórmula**

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$$

Imagen de elaboración propia

**Ejemplo**



**SUMA POR DIFERENCIA**

**Fórmula**

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Imagen de elaboración propia

**Ejemplo**

## Comprueba lo aprendido

Utiliza las identidades notables para completar los huecos en blanco:

1. $(x+3)^2 = x^2 + \square + 9$
2. $(2-x)^2 = 4 \square + x^2$
3. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^{\square}$
4. $(2x-2)(2x+2) = \square\, x^2 - \square$
5. $(8x-6)^2 = \square\, x^2 - 96x + 36$

**Enviar**

No olvides los signos.

Se suele decir que las Matemáticas nos rodean y en el caso de las ecuaciones es muy cierto. Por ejemplo, para que un aparato de GPS pueda determinar tu posición (incógnita), este obtiene datos de, al menos, tres satélites con los que plantea una serie de ecuaciones que determinan la solución. Otro ejemplo, al programar el termostato del aire acondicionado ¿cuándo debe apagarse y encenderse el equipo para que la temperatura esté según lo deseado? Más ecuaciones...

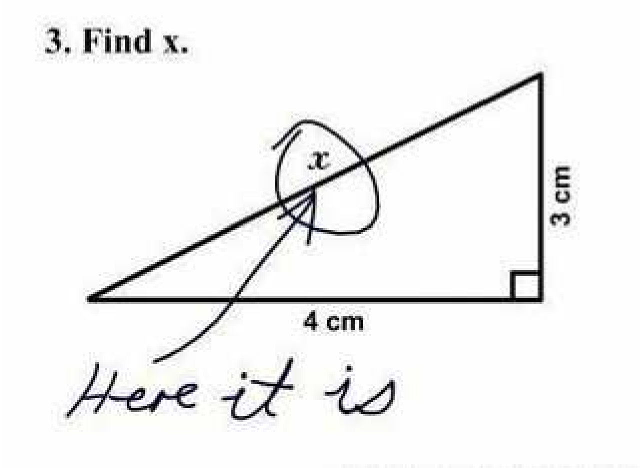



Foto en Flickr por dullhunk bajo CC

Aunque hemos dicho que aquí estudiaremos las ecuaciones con una incógnita, en un problema puedes encontrarte con varios datos desconocidos. También veremos que un mismo problema puede tener una, dos soluciones, o puede que ninguna. ¡Incluso es posible que tenga infinitas soluciones! ¿Pero sabes exactamente qué es una ecuación? Vamos a dar una definición.

Una **ecuación** es una expresión algebraica en la que establecemos una igualdad. El signo igual separa la ecuación en dos miembros. Como es una expresión algebraica, estará formada por números, variables y operaciones. En el caso de las ecuaciones, a las variables las llamaremos **incógnitas**, pues son los valores que queremos descubrir.

$$\underbrace{3(x+1)}_{\substack{\text{Primer}\\ \text{miembro}}} = \underbrace{2x^2-4}_{\substack{\text{Segundo}\\ \text{miembro}}}$$

La resolución de ecuaciones algebraicas es una de las partes fundamentales del álgebra. En las Matemáticas han pervivido dos métodos de resolución:

- Exactos, recurriendo a las leyes del álgebra.
- Aproximativos.

Por ejemplo las soluciones de la ecuación pueden obtenerse mediante tanteo, elevando al cuadrado 1'1, 1'2 hasta 1'9 y tomando el más próximo. De nuevo el proceso podría repetirse con las centésimas… Una vez calculadas, hasta el nivel de aproximación deseado, podrían colocarse ordenadas en una tabla para su posterior consulta.

### Ecuaciones de primer grado

Empezaremos resolviendo ecuaciones con una incógnita que además no tenga exponente, es decir, de primer grado. Para ello veremos varios métodos y empezaremos por el más intuitivo: la resolución por tanteo o por aproximación.


Fotografía en Flickr de roblz.com bajo CC

Cuando buscamos la solución de una ecuación, lo que queremos es encontrar un número que, al sustituirlo por x, verifique la igualdad. En eso consiste la **resolución por tanteo**, en darle valores a la incógnita x hasta que se igualen ambos términos.

Por ejemplo, supongamos que tenemos la ecuación: $3x-1=11+x$ . Vamos a sustituir x por algunos valores y veamos qué pasa.

| **Valores** | $3x-1=11+x$ | **Observaciones** |
|---|---|---|
| Si $x=2$ | 3 · 2 - 1 = 11 + 2<br>5 = 13 | No se igualan los miembros.<br>Necesito aumentar el valor del primero. |
| Si $x=4$ | 3 · 4 - 1 = 11 + 4<br>11 = 15 | Sigue sin igualar. |
| Si $x=6$ | 3 · 6 - 1 = 11 + 6<br>17 = 17 | La solución de la ecuación es $x=6$ |

## Comprueba lo aprendido

Resuelve las siguientes ecuaciones por tanteo:

1. $2x+3=13$ . La solución es $x=$ ☐
2. $2x-4=8$ . La solución es $x=$ ☐
3. $x^2+1=10$ . Las soluciones son $x=3$ y $x=$ ☐
4. $\frac{x}{3}-1=3$ . La solución es $x=$ ☐

Enviar

No siempre es fácil resolver las ecuaciones por tanteo, así que vamos a ver un método general para resolver cualquier ecuación de primer grado. Este método consiste en buscar ecuaciones equivalentes cada vez más sencillas, y más fáciles de resolver.

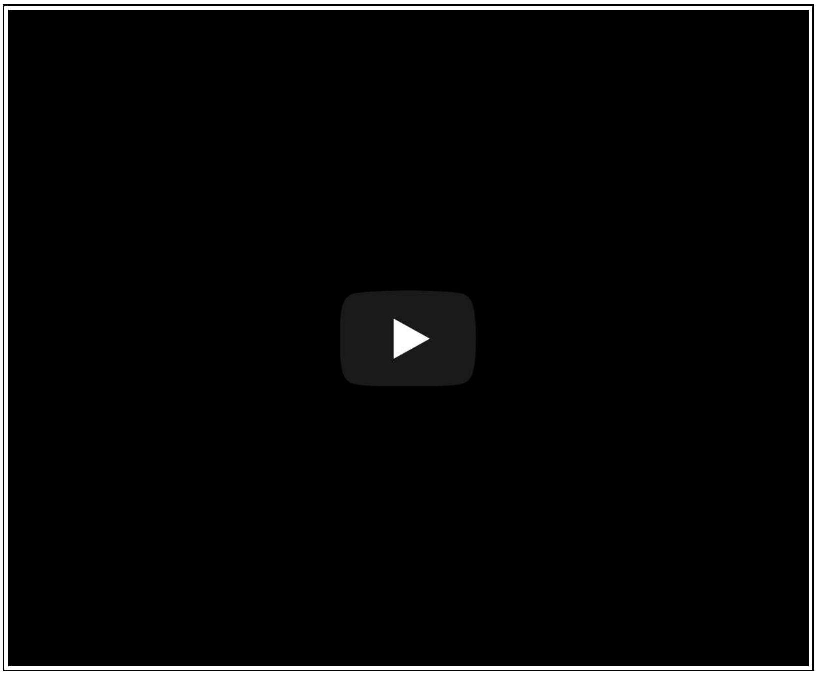
## Importante

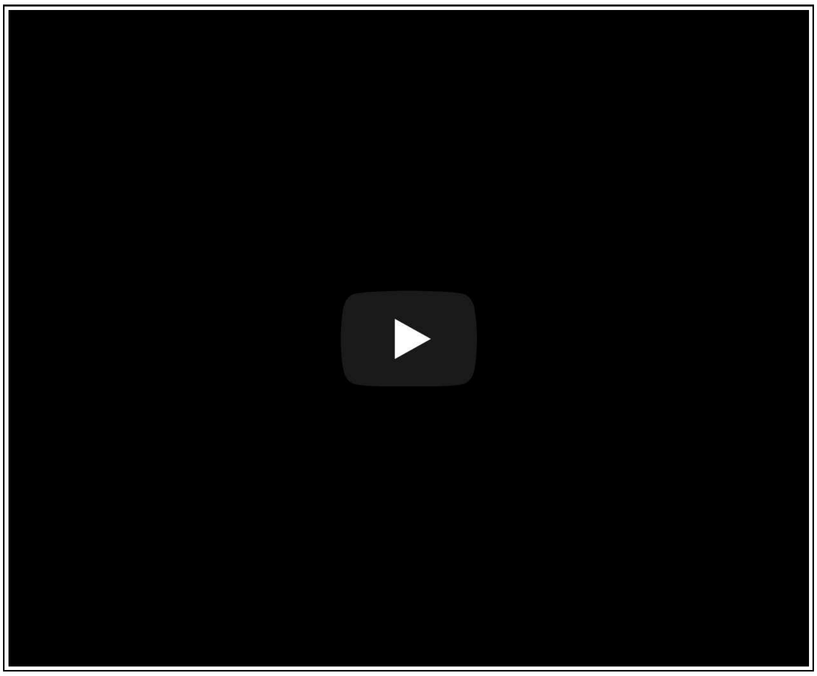
Dos o más ecuaciones son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

En la siguiente presentación vas a descubrir con todo lujo de detalles (propiedades, pasos...) cómo se resuelve una ecuación de primer grado.


Presentación en Slideshare por Patricia_Perez

Además, las acompañamos de unos vídeos de juanmemol de su canal ecuaciones de primer grado. Por cierto si te sabe a poco, si pinchas en este enlace descubrirás 52 vídeos más. Toda una lección de ecuaciones.





Resumiendo la presentación anterior, este método de resolución podemos simplificarlo en cuatro pasos:

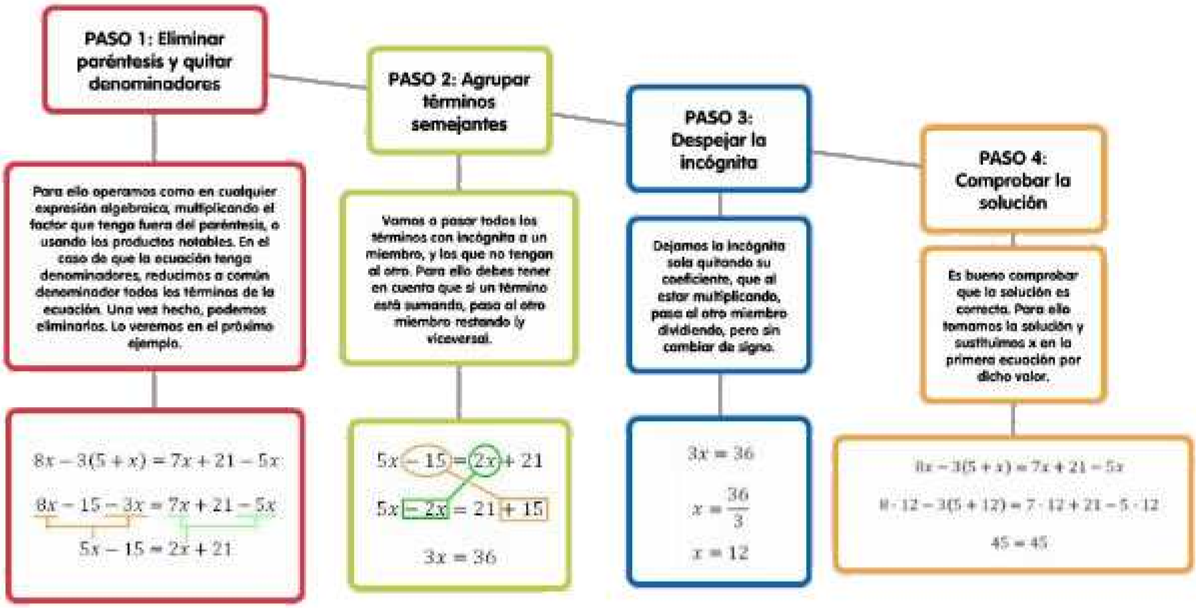



Imagen de elaboración propia

## Ejercicio resuelto

Intenta resolver la siguiente ecuación paso a paso. Si no sabes seguir, puedes consultar el resultado.

$$1-\frac{x-3}{4}=4x+\frac{3(1-3x)}{2}$$

Paso 1: Quitar paréntesis

$$1-\frac{x-3}{4}=4x+\frac{3-9x}{2}$$

Paso 2: Quitar denominadores

**Mostrar retroalimentación**

Calculamos m.c.m(2,4)=4, luego hacemos común denominador 4 y recalculamos los numeradores de todos los términos:

$$\frac{4}{4}-\frac{x-3}{4}=\frac{16x}{4}+\frac{6-18x}{4}$$

Una vez hecho, podemos eliminar los denominadores. Ten cuidado, pues un signo negativo delante de una fracción cambia el signo de todo el numerador:

$$4-x+3=16x+6-18x$$

Simplificamos los términos semejantes,

$$7-x=-2x+6$$

Paso 3: Agrupar términos semejantes

**Mostrar retroalimentación**

$$-x+2x=6-7$$
$$x=-1$$

Paso 4: Despejar la incógnita

Este paso no es necesario, pues ya la tenemos despejada.

Paso 5: Comprobar la solución

**Mostrar retroalimentación**

$$1-\frac{-1-3}{4}=4\cdot(-1)+\frac{3-9\cdot(-1)}{2}$$
$$2=2$$

*Importante*

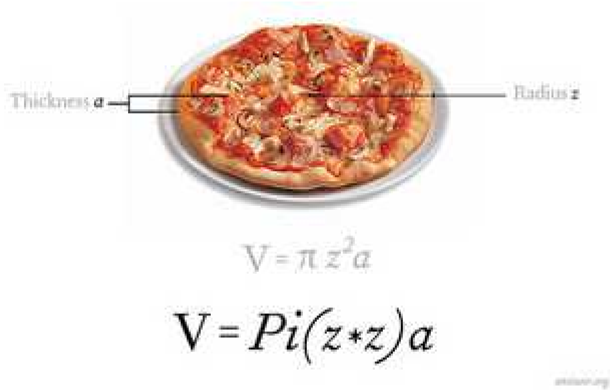
Cuando simplificamos una ecuación y llegamos a una equivalente de la forma $0\cdot x=b$ , con $b$ un número distinto de cero, la ecuación no tiene solución. Se dice entonces que dicha ecuación es **incompatible**.

**Ecuaciones de segundo grado**

Una ecuación será de **segundo grado** si tiene algún término en $x^2$ y no tiene términos de grado superior.

Para resolver una ecuación de segundo grado, en principio, seguimos el mismo método que para las ecuaciones de primer grado, ir buscando ecuaciones equivalentes cada vez más sencillas, hasta obtener una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ , donde $a$ , $b$ y $c$ son números reales.

Las ecuaciones de segundo grado pueden tener **dos, una, o ninguna solución**. Para resolverlas, usaremos la siguiente fórmula:




Fotografía en Flickr por antiuser bajo CC

$$ax^2+bx+c=0 \Longrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

## Ejercicio resuelto

Resuelve la ecuación $6x^2-5x-1=0$

**Mostrar retroalimentación**

En este caso, será a = 6, b = -5 y c = -1. Si lo sustituimos en la fórmula, nos queda:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot6\cdot(-1)}}{2\cdot6}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{12}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{5\pm7}{12}$$

Obtenemos dos soluciones, una operando con el signo + y otra con el signo -

$$x_1=\frac{5+7}{12}=\frac{12}{12}=1 \quad \text{y} \quad x_2=\frac{5-7}{12}=\frac{-2}{12}=\frac{-1}{6}$$

## Ejercicio resuelto

Resuelve la ecuación: $(x+1)^2-(3x+8)=-(2x+3)^2$

- Quitamos paréntesis:

**Mostrar retroalimentación**

$$x^2+2x+1-3x-8=-(4x^2+12x+9)$$

- Pasamos todos los términos al mismo miembro:

**Mostrar retroalimentación**

$x^2-x-7+4x^2+12x+9=0$

$5x^2+11x+2=0$

- Usamos la fórmula de resolución:

**Mostrar retroalimentación**

Tenemos $a=5$ , $b=11$ y $c=2$ , luego:

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot5\cdot2}}{2\cdot5}=\frac{-11\pm\sqrt{81}}{10}=\frac{-11\pm9}{10}$$

$x_1=\frac{-11+9}{10}=\frac{-2}{10}=\frac{-1}{5}$ y $x_2=\frac{-11-9}{10}=\frac{-20}{10}=-2$

## Comprueba lo aprendido

Resuelve las siguientes ecuaciones y completa los huecos. Si tiene una única solución, escríbela repetida en cada hueco. Si no tiene solución, escribe **no** en cada hueco. Los huecos con una barra / entre ambos indican una fracción.

1. $x^2+2x+1=0$ tiene solución ☐ y ☐
2. $x^2+5x+7=0$ tiene solución ☐ y ☐
3. $(2x-1)^2=5x-1$ tiene solución ☐ y ☐ / ☐
4. $x^2-\frac{2x}{3}=\frac{5}{3}$ tiene solución ☐ y ☐ / ☐

**Enviar**

**Número de soluciones de una ecuación de segundo grado**

En la fórmula hay una raíz cuadrada que va a ser la que determine el número de soluciones de la ecuación. La expresión a la que calculamos la raíz, $b^2-4ac$ , se llama **discriminante**. Tendremos los siguientes casos:

1. Si $b^2-4ac>0$ : La raíz existe, y por lo tanto la ecuación tendrá dos soluciones, una operando con el signo + y otra con el signo -.

2. Si $b^2-4ac=0$ : La raíz vale 0 y la ecuación tendrá una única solución, $x=\frac{-b}{2a}$ .

3. Si $b^2-4ac<0$ : La raíz no existe y la ecuación no tiene solución.

**Ecuaciones de segundo grado incompletas**

*Importante*

Una ecuación de segundo grado es **incompleta** si los coeficientes $b$ o $c$ son cero.

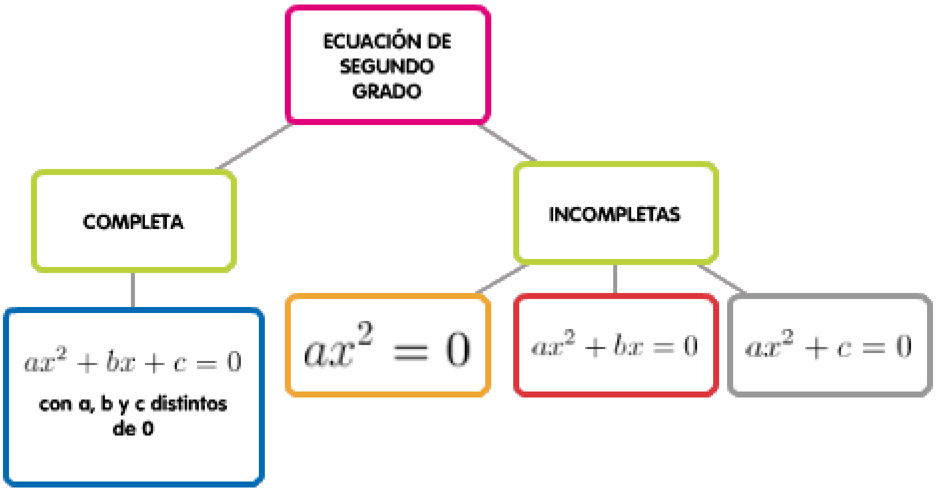
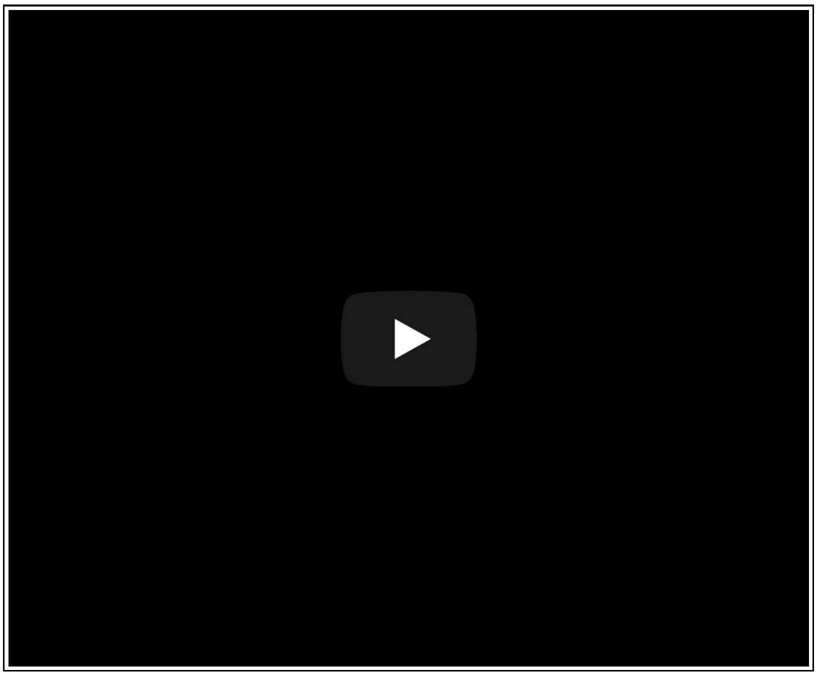


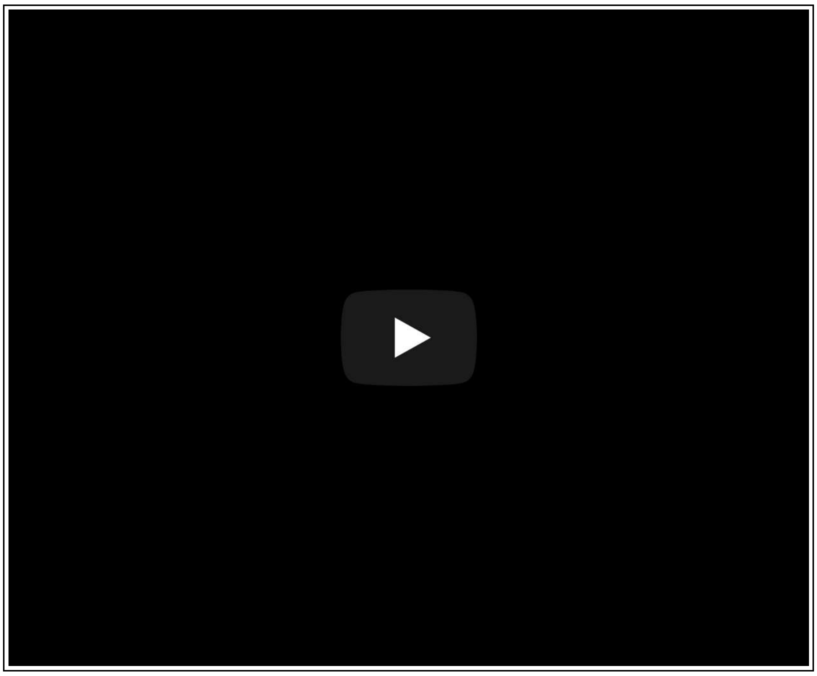

Imagen de elaboración propia

Aunque para resolver las ecuaciones incompletas se puede recurrir a la fórmula general, se pueden resolver de forma más sencilla usando los siguientes métodos:

Faltael término independiente $(c=0)$



Falta el término en $x$ $(b=0)$



Si en la ecuación no aparecieran a la vez los términos $b$ y $c$, la ecuación tendría una única solución, $x=0$.

## Ejercicio resuelto

**Curso 2014/2015**

Resuelva la ecuación:

**Mostrar retroalimentación**

El primer paso es eliminar los paréntesis:

$$6x^2-9x+2x-3-(6x^2+4x-18x-12)=9x \rightarrow 6x^2-9x+2x-3-6x^2-4x+18x+12-9x=0$$

A continuación simplificamos la expresión:

$$-2x+9=0 \rightarrow -2x=-9 \rightarrow x=\frac{9}{2}$$

### Desigualdades e inecuaciones

Observa la siguiente imagen y procura relacionarla con el nombre del epígrafe de este apartado, desigualdades e inecuaciones.

Las dudas sobre Grecia y las provisiones de la banca llevan la prima a máximos

ISABEL LAFONT | Madrid 686

El tipo de interés de los bonos a 10 años supera el 6% en previsión del esfuerzo público que exigirá el saneamiento del sector bancario español. El Ibex inicia la sesión con fuertes caídas

El consejero delegado de Yahoo! presenta su dimisión por mentir

SANDRO POZZI | Nueva York 26

Tras menos de seis meses al frente de la 'puntocom', Scott Thompson deja el cargo acusado de falsear el currículo

El repliegue de Afganistán tendrá cuatro fases y durará 22 meses

MIGUEL GONZÁLEZ | Madrid 15

El Ejército afronta su mayor reto logístico con la salida del país, que comenzará a finales de este año o a principios de 2013

Imagen de elaboración propia con recortes de titulares de elpais.com del día 14/05/2012

Probablemente lo primero que se os venga a la cabeza es una desigualdad del tipo social, puede que incluso te hagas preguntas como: ¿es justo que una persona haya ocupado un puesto de relevancia basándose en una mentira? o ¿nos merecemos que suba el tipo de interés por las dudas de los bancos?, incluso ¿era necesaria la ocupación del territorio afgano? Es una lástima que no podamos entrar en estos detalles, porque las desigualdades con las que nos disponemos a trabajar son otras, y si no fíjate en las frases que están recuadradas y en la siguiente actividad.

## Comprueba lo aprendido

En el día de ayer, las temperaturas medias en cinco capitales europeas fueron:

| Capital | Madrid | Londres | Berlín | Moscú | Roma |
|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura (ºC) | 16 | 8 | -1 | -5 | 8 |

Indica la veracidad o falsedad de la siguientes afirmaciones:

En Madrid hace más calor que en Londres.

○ Verdadero ○ Falso

**Verdadero**
Porque 16 > 8

En Berlín hace más frío que en Moscú.

○ Verdadero ○ Falso

valor absoluto es el menor de los dos.

En Londres hace la misma temperatura que en Roma.

○ Verdadero ○ Falso

**Verdadero**
Porque 8 = 8

## Importante

Recordamos que, dados dos números $a$ y $b$ pueden darse únicamente tres relaciones entre ellos:

- $a$ es menor que $b$ y lo expresamos $a < b$
- $a$ es igual a $b$ y lo expresamos $a = b$
- $a$ es mayor que $b$ y lo expresamos $a > b$

La segunda relación se denomina **igualdad** y cuando aparecen letras además de cifras numéricas, dan origen a las **ecuaciones.**

Las relaciones primera y tercera se denominan **desigualdades** y cuando aparecen letras además de cifras numéricas, dan origen a las **inecuaciones.** Con ellas trabajaremos a continuación.

## Comprueba lo aprendido

Ordena la lista de temperaturas de la tabla anterior, en orden ascendente (y luego en orden descendente), colocando entre cada dos valores el signo <, =, >, que corresponda.

En orden ascendente (de menor a mayor): ☐ ☐ ☐ < 8 ☐ ☐ ☐ ☐

En orden descendente (de mayor a menor): 16 > ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

**Enviar**

## Comprueba lo aprendido

1. ¿Qué ocurre si aumenta la temperatura 2 ºC en Moscú y en Roma? ¿Sigue haciendo más frío en Moscú que en Roma?

Verdadero  Falso

**Verdadero**
La respuesta es afirmativa puesto que -5 < 8 (si sumamos 2 a cada miembro) -3 < 10, luego la desigualdad no ha cambiado.

2. Si disminuye 2 ºC la temperatura en ambas ciudades, podemos afirmar ahora que hace más frío en Roma que en Moscú.

Verdadero  Falso

**Falso**
Es falso puesto que -5 < 8 (y si restamos 2 a cada miembro tendríamos) -7 < 6, luego la desigualdad no ha cambiado y sigue haciendo más frío en Moscú que en Roma.

3. Si se triplica la temperatura en ambas ciudades, hará más calor en Moscú que en Roma.

Verdadero  Falso

**Falso**
Efectivamente, la afirmación es falsa.
No ha cambiado la situación puesto que al triplicar la temperatura lo que ha ocurrido es que se ha hecho aún mayor la diferencia entre ambas ciudades.
Veámoslo. Tenemos que -5 < 8 y al multiplicar por 3 ambos miembros tendremos que -15 < 24.

4. En las noticias, dan el siguiente titular:

"*Hoy 15 de Diciembre, se aprecian los efectos del cambio climático en las temperaturas de ciertas capitales europeas. Se ha invertido la situación, Moscú presenta una temperatura atípica para estas fechas con 10 ºC. Al mismo tiempo una ola de frío se encuentra situada sobre Roma donde se han alcanzado temperaturas de -16 ºC*."

Por tanto, podemos afirmar que ahora sí que hace más calor en Moscú que en Roma.

Verdadero  Falso

**Verdadero**
Veremos de manera detallada lo que ha ocurrido.
¿Qué significa que se ha invertido la situación? Pues que ahora hace más calor en Moscú que en Roma.
Tenemos la siguiente relación: -16 < 10, cuando antes teníamos: -5 < 8.
Si observas las temperaturas actuales: 10 = **(-2)** · (-5) y -16 = **(-2)** · 8, se obtienen multiplicado las anteriores por un número negativo, en este caso -2, pero al hacer esta operación la desigualdad ha cambiado de sentido, la balanza se ha desequilibrado para el otro lado.

Cada una de las situaciones de la autoevaluación anterior muestra el comportamiento de una desigualdad numérica cuando se suman, restan, multiplican o dividen los dos miembros de una desigualdad por una misma cantidad.

A continuación, se presenta de manera resumida cada uno de los casos.

**Importante**

- Si a los dos miembros de una desigualdad se le **suman o restan un número positivo**, la desigualdad **no cambia de sentido.**
- Si a los dos miembros de una desigualdad se le **suman o restan un número negativo**, la desigualdad **no cambia de sentido.**
- Si se **multiplican o dividen por un número positivo** los dos miembros de una desigualdad, entonces la desigualdad **no cambia de sentido.**
- Si se **multiplican o dividen por un número negativo** los dos miembros de una desigualdad, entonces **se invierte y cambia de sentido.**

**Inecuaciones**

Foto de Flickr por PixelPlacebo bajo CC

Si eres un buen conductor seguro que sabes que en las autopistas españolas debemos circular a una velocidad inferior o igual a 120 km/h.

Si llamamos $v$ a la velocidad en kilómetros por hora a la que conducimos, la expresión algebraica que representa esa situación vendría dada por: $v \leq 120$ .

Si circulamos a velocidad superior a 120 km/h estaremos poniendo en peligro nuestra seguridad y seremos sancionados. En este caso la expresión algebraica sería: $v > 120$ .
Las dos expresiones anteriores se denominan inecuaciones o desigualdades.
Lo primero que llama la atención de las inecuaciones es que tienen infinitas soluciones. Esa es una característica esencial de las inecuaciones.
Trabajaremos exclusivamente con inecuaciones de una incógnita.

**Importante**

Una **inecuación** es una expresión matemática con cifras y letras caracterizada por tener alguno de los signos de desigualdad $(<, \leq, >, \geq)$ , mostrando un desequilibrio entre cifras y letras**.**

Una inecuación respeta todas las propiedades vistas para las desigualdades numéricas, que son:

- Tampoco cambia de sentido, si se multiplican o dividen ambos miembros por un número positivo.
- Cambia de sentido, se desequilibra hacia el otro lado, si se multiplican o dividen ambos miembros por un número negativo.

## Importante

Resolver una inecuación es **encontrar el conjunto** de números reales que cumplen la desigualdad. Este **conjunto infinito** de soluciones será un intervalo de la recta real.

El proceso de resolución consiste en realizar transformaciones (suma, resta, multiplicación o división) de una misma cantidad a ambos miembros de una inecuación, hasta llegar a una inecuación en la que la incógnita esté sola en uno de sus miembros, en el otro haya un número y, entre ambos, uno de los signos de desigualdad.

El objetivo de estas transformaciones es llegar a obtener uno de los siguientes modelos (donde $x$ es la incógnita y $s$ un número real)

$$x<s, \quad x\leq s, \quad x>s, \quad x\geq s$$

Finalmente, la solución de la inecuación vendrá dada por los infinitos valores que verifican esta última desigualdad. Es decir, todos los puntos del intervalo que tienen por extremo inicial (o final) al valor $s$ .

## Comprueba lo aprendido

a. Tenemos la siguiente inecuación: $1-\frac{x-5}{2}\geq 3x$ .

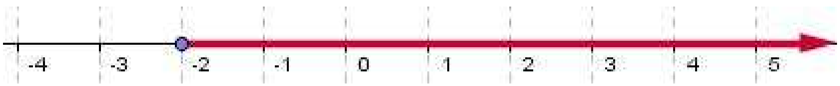
¿Cuáles de los siguientes valores son solución de esa inecuación?

- [ ] $x=0$
- [ ] $x=3$
- [ ] $x=-2$
- [ ] $x=\frac{1}{2}$

**Solution**

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto
4. Correcto

b. ¿Cuáles de las siguientes inecuaciones, tienen como solución la siguiente representación gráfica?




- [ ] $2x+1 \geq 3$

- [ ] $3(x+2) \geq 0$

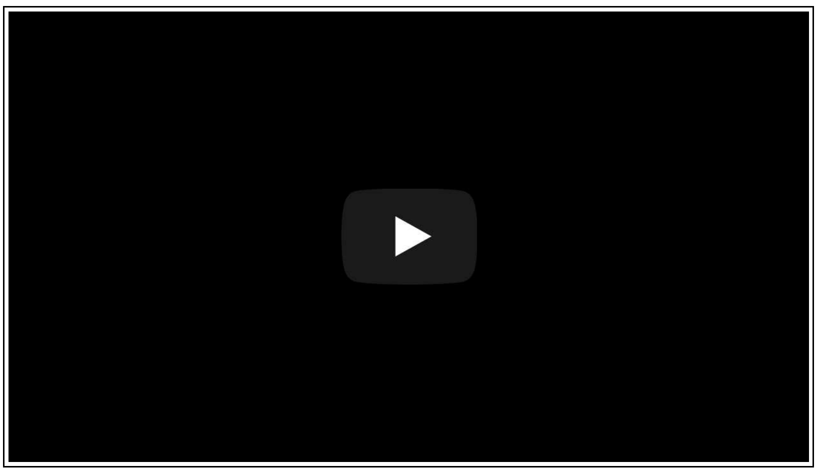
- [ ] $2(x+5) \geq 2-2x$

**Mostrar retroalimentación**

**Solution**

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Correcto

Como en algunos apartados anteriores, te ofrecemos unos vídeos del profesor juanmemol. En este caso es una lista de reproducción que consta de 18 vídeos de inecuaciones de primer grado y aquí te mostramos un ejemplo:



## Ejercicio resuelto

Resuelve la siguiente inecuación y representa la solución obtenida:

$-2(x-3) \geq 18$

**Mostrar retroalimentación**

Primero operamos para quitar el paréntesis:

$-2x+6 \geq 18$

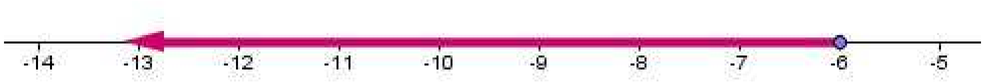
Sumamos -6 a ambos miembros y la desigualdad no varía:

$-2x \geq 12$

Dividimos ambos miembros por -2, la desigualdad cambia de sentido:

$x \leq -6$

El conjunto de soluciones de la inecuación es $(-\infty,-6]$ y su representación gráfica es:




## Comprueba lo aprendido

¿Cuál es el conjunto de soluciones de la siguiente inecuación?

$2x+3 \leq 5x$

- $x=1$
- $[1,+\infty)$
- $(-\infty, 1]$

Inténtalo otra vez.

Muy bien.

Inténtalo otra vez.

2. Incorrecto
3. Opción correcta

## Ejercicio resuelto

**Curso 2010/2011**

Halle el conjunto de soluciones de la inecuación:

$$3(x-2) \leq \frac{4-2x}{3}$$

**Mostrar retroalimentación**

El primer paso al igual que si fuera una ecuación es quitar paréntesis y denominadores:

$$9(x-2) \leq 4-2x \Rightarrow 9x-18 \leq 4-2x$$

A continuación, pasamos los términos que tengan $x$ a un lado y los que no la tengan a otro:

$$9x+2x \leq 4+18 \Rightarrow 11x \leq 22$$

Por último, despejamos:

$$x \leq \frac{22}{11} \Rightarrow x \leq 2$$

Si queremos podemos dar la solución en formato gráfico también:

El siguiente titular apareció en el diario **SPORT.es** el día 3 de abril de 2010.


UN TÁNDEM QUE CADA VEZ SE ENTIENDE MEJOR

**Messi-Ibrahimovic, seguro de gol... y de victoria**

**En lo que va de Liga entre los dos delanteros han marcado 40 goles, los mismos que lleva el Athletic**

Titular del diario sport.es (03/04/2010)

Fotografía en Flickr por tetegil bajo CC

Si traducimos al lenguaje algebraico la frase del subtítulo: "entre los dos delanteros han marcado 40 goles", al haber dos objetos (en este caso dos jugadores), y dos cantidades asociadas a ellos, "número de goles que ha marcado cada uno", necesitamos dos incógnitas.

Por tanto, si llamamos:

$x$ **: Número de goles que ha marcado Messi**
$y$ **: Número de goles que ha marcado Ibrahimovic**

La frase anterior ya traducida, quedaría de la siguiente forma: $x+y=40$ , que es una ecuación (igualdad entre dos miembros) con dos incógnitas (letras). ¿Has visto que no es tan complicado?

### Importante

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Su expresión general tiene la siguiente forma: $ax+by=c$ , donde $x$ e $y$ son las incógnitas de la ecuación y $a$ , $b$ y $c$ son números.

$a$ y $b$ son los **coeficientes** y $c$ es el **término independiente** de la ecuación.

En el caso anterior $x+y=40$ , $a=1$ , $b=1$ y $c=40$ .

Las **soluciones de la ecuación son pares de números** que al sustituirlos en la ecuación por $(x,y)$ , hacen que ambos miembros valgan lo mismo (se alcance el equilibrio).

### Comprueba lo aprendido

1. ¿Es posible que Messi haya marcado 30 goles e Ibrahimovic 20 goles?

- Sí
- No

¡Incorrecto!

No es posible, porque 30 + 20 = 50 y entre los dos han marcado 40 goles no 50.

Conclusión: $(x,y)=(30,20)$ no es una solución de la ecuación.

¡Correcto!

No es posible, porque 30 + 20 = 50 y entre los dos han marcado 40 goles no 50.

Conclusión: $(x,y)=(30,20)$ no es una solución de la ecuación.

**Solution**

1. Incorrecto
2. Opción correcta

2. ¿Es posible que tanto Messi como Ibrahimovic hayan marcado 20 goles cada uno?

- Sí
- No

han marcado entre ambos, según indica el periódico.

Conclusión: $(x,y)=(20,20)$ es una solución de la ecuación.

¡Incorrecto!

Sí es posible, porque 20 + 20 = 40 , que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.

Conclusión: $(x,y)=(20,20)$ es una solución de la ecuación.

**Solution**

1. Opción correcta
2. Incorrecto

3. Yo creo que Messi ha marcado 25 goles y que Ibrahimovic ha marcado sólo 15 pero mi hermana dice que, según sus cuentas, Messi ha marcado 12 goles e Ibrahimovic 28. ¡Vaya disparidad de opiniones!. Pero, ¿podemos tener razón los dos?

- Sí
- No

¡Correcto!

En efecto, y aunque parezca contradictorio, tenemos razón los dos, porque

- Según mis datos: 25 + 15 = 40 , que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.
- Según las cuentas de mi hermana: 12 + 28 = 40 , que es la cantidad de goles que han marcado.

Conclusión: $(x,y)=(25,15)$ es una solución de la ecuación y $(x,y)=(12,28)$ es otra solución de la ecuación.

¡Incorrecto!

En efecto, y aunque parezca contradictorio, tenemos razón los dos, porque

- Según mis datos: 25 + 15 = 40 , que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.
- Según las cuentas de mi hermana: 12 + 28 = 40 , que es la cantidad de goles que han marcado.

Conclusión: $(x,y)=(25,15)$ es una solución de la ecuación y $(x,y)=(12,28)$ es otra solución de la ecuación.

**Solution**

1. Opción correcta
2. Incorrecto

Para saber si una pareja de números es solución de una ecuación lineal con dos incógnitas, basta con sustituir en la ecuación cada número por la letra correspondiente y comprobar si se cumple o no la igualdad numérica.

Acabamos de ver, que los pares (12, 28), (20, 20) y (25, 15) son soluciones de la ecuación

$x+y=40$ . Estos pares de puntos, además de cumplir la ecuación tienen sentido en el contexto de la situación que planteamos, es decir, pueden ser los goles marcados por Messi e Ibrahimovic respectivamente.

Pero hay otros pares de puntos que también cumplen la igualdad $x+y=40$ . Por ejemplo (-5, 45) ó (30'5, 9'5) suman 40, pero no tienen sentido como goles marcados en un partido.

Nos planteamos entonces ¿cuántos pares de puntos pueden ser solución de la ecuación lineal $x+y=40$ ?

En la imagen de la derecha hemos representado en unos ejes coordenados los pares de puntos que hemos visto que son solución de $x+y=40$ . Para ello, el valor de la $x$ lo hemos colocado en el eje OX, y el de la $y$ en el eje OY.

A la vista de la imagen, ¿qué otros pares de puntos pueden ser solución de nuestra ecuación?

Imagen de elaboración propia

## Importante

Dada una **ecuación lineal** con dos incógnitas, $ax+by=c$ , siempre se cumple:

1. Que sus soluciones, pares de valores $(x,y)$ , representan puntos del plano que están alineados, es decir, están situados sobre la misma **recta.**

2. Como una recta tiene infinitos puntos, una ecuación lineal con dos incógnitas también tiene **infinitas soluciones**.

## Comprueba lo aprendido

En un portal deportivo en internet leemos el siguiente titular:

> *"A estas alturas de la temporada el Real Madrid es el equipo más goleador de la Liga con 6 goles más que el F.C. Barcelona, que ocupa la segunda posición en la clasificación de equipos goleadores."*

Indica **Verdadero** o **Falso** en las siguientes afirmaciones:

1. La ecuación que relaciona el número de goles marcados por ambos equipos es: $x=y+6$ , siendo $x$ : nº goles marcados por el Real Madrid e $y$ : nº goles marcados por el F.C. Barcelona.

○ Verdadero ○ Falso

2. El F.C Barcelona ha marcado 73 goles y el Real Madrid 80.

Verdadero Falso

**Falso**

No es cierto. Veamos por qué.

Sabemos que la relación entre los goles marcados por ambos equipos viene dada por la ecuación: $x = y + 6$ , donde $x$ **: nº goles marcados por el Real Madrid** e $y$ **: nº goles marcados por el F.C. Barcelona.**

Si fuera cierto, entonces, la pareja: $(x,y) = (80,73)$ sería una solución de la ecuación.

Pero, si sustituimos en la ecuación vemos que no la satisfacen, porque: 80 = 73 + 6, 80 = 79, que no es cierto.

3. Podemos afirmar, con toda seguridad, que: "El F.C Barcelona ha marcado 73 goles y el Real Madrid 79".

Verdadero Falso

**Falso**

No es cierto. Veamos por qué.

Sabemos que la relación entre los goles marcados por ambos equipos viene dada por la ecuación: $x = y + 6$ , donde $x$ **: nº goles marcados por el Real Madrid** e $y$ **: nº goles marcados por el F.C. Barcelona.**

En este caso, la pareja: $(x,y) = (79,73)$ si que es una solución de la ecuación. **Podemos decir que es una combinación goleadora posible, pero, con los datos que disponemos, no podemos afirmar con toda seguridad que esta sea la única combinación posible**.

Esto es debido a que una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

# 3.2. Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

Fotografía en Flickr por Ignacio Conejo bajo CC

En las dos situaciones mostradas en el punto anterior no hemos podido más que *establecer una relación entre las dos incógnitas* y *dar posibles combinaciones de resultados*.

Pero, ni hemos podido determinar un número único de goles marcados por cada uno de los delanteros del F.C Barcelona, ni el número preciso de goles marcados por cada uno de los equipos.

En ambas situaciones nos falta una pista: otra ecuación. Al tener dos incógnitas, para poder encontrar unos valores únicos para los goles marcados, necesitamos al menos dos pistas, es decir, dos ecuaciones.

Si las dos pistas son "buenas", entonces sí que podremos encontrar unos valores únicos para las incógnitas planteadas.

Con las dos pistas tendremos lo que en Matemáticas se conoce con el nombre de **sistema de ecuaciones**.

*Importante*

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**, como su propio nombre indica, está compuesto por dos ecuaciones de primer grado.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

**Resolver el sistema** es encontrar una solución común de ambas ecuaciones. Por tanto, una **solución** del sistema es una pareja de valores $(x,y)$ que cumple ambas ecuaciones de manera simultánea.

**Resolución de sistemas de ecuaciones: Método gráfico.**

Vamos a ver distintas maneras de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Comenzaremos con el **método gráfico** que nos mostrará que resolver un sistema de ecuaciones no es otra cosa que calcular los puntos de corte de sus dos rectas asociadas.

*Importante*

ecuaciones es una solución común de ambas ecuaciones.

Si interpretamos esto desde un punto de vista gráfico, una solución del sistema vendrá dada por las coordenadas $(x,y)$ de un punto que pertenezca a las dos rectas, esto es, de un punto de corte de las dos rectas.

Por tanto, para resolver un sistema de ecuaciones, por el método gráfico, debemos:

- Representar gráficamente la recta de cada una de las ecuaciones.
- Determinar los puntos comunes de ambas rectas.

En el siguiente applet aparecen multitud de ejemplos de sistemas resueltos para que puedas practicar de manera autónoma. Pulsa sobre el botón gris situado debajo del sistema para ver **"OTRO EJEMPLO"**.

Hallar dos números sabiendo que el mayor más 7 veces el menor es igual a 28 y el menor más 6 veces el mayor es igual a 45 .

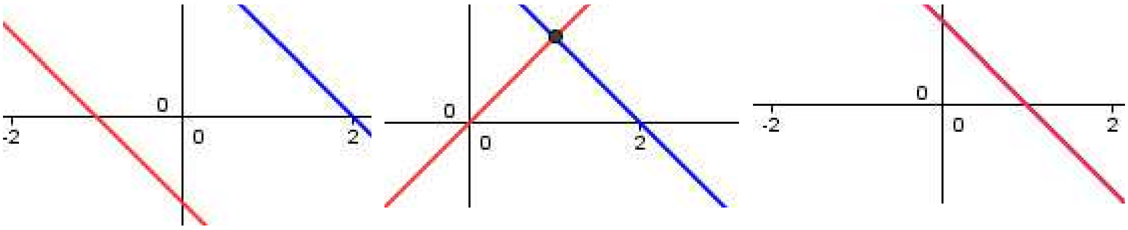
ver solución

Como puedes ver, dibujar las rectas de cada una de las ecuaciones no es una tarea excesivamente compleja. Basta despejar $y$ en función de $x$ , elaborar una pequeña tabla de valores y representar los puntos obtenidos.

## Comprueba lo aprendido

Asocia cada sistema con su representación gráfica.

| Sistema 1 | Sistema 2 | Sistema 3 |
|---|---|---|
| $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-1 \end{cases}$ | $\begin{cases} x+y=1 \\ -2x-2y=-2 \end{cases}$ | $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$ |
| Gráfica 1 | Gráfica 2 | Gráfica3 |




- Al Sistema 1 le corresponde la:

Sugerencia

- Gráfica 1
- Gráfica 2
- Gráfica 3

¡Correcto!

**Gráfica 1.**

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de x y realizando una pequeña tabla de valores.

Ten en cuenta esta observación para futuros sistemas que vayas a resolver. Si observas las ecuaciones verás que es imposible que al mismo tiempo: "la suma de dos números (x e y) valga 2 y que valga -1". O una cosa o la otra pero no ambas. **Las ecuaciones, son contradictorias** y así es imposible encontrar una solución. Cada vez que ocurra ésto, en las ecuaciones de un sistema, en **la representación gráfica van a salir dos rectas paralelas que**, evidentemente, **nunca se cortan. No hay punto de corte, no hay solución.**

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

**Solution**

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

- Al sistema 2 le corresponde la:

- Gráfica 1
- Gráfica 2
- Gráfica 3

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

¡Correcto!

**Gráfica 3.**

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de x y realizando una pequeña tabla de valores.

equivalentes, tienen las mismas soluciones. Se cortan en infinitos puntos. **El sistema tiene infinitas soluciones**. Cuando ocurra ésto, **su representación gráfica serán dos rectas coincidentes, una encima de la otra**.

**Solution**

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

- Al sistema 3 le corresponde la:

- Gráfica 1
- Gráfica 2
- Gráfica 3

¡Incorrecto!

¡Correcto!

**Gráfica 2.**

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de x y realizando una pequeña tabla de valores.

Ten en cuenta esta observación para futuros sistemas que vayas a resolver. Si observas las ecuaciones verás que ni son contradictarias, ni una es múltiplo de otra. Cada vez que ocurra ésto, **la representación gráfica van a salir dos rectas secantes (que se cortan) en un único punto. El sistema tiene una única solución, que viene dada por las coordenadas (x,y)=(1,1) del punto de corte.**

¡Incorrecto!

**Solution**

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

## Importante

Un sistema es **compatible** si tiene solución e **incompatible** si no la tiene.

Un sistema es **determinado** si tiene un número finito de soluciones e **indeterminado** si tiene infinitas soluciones.

En el ejemplo anterior, la gráfica 1 correspondería a un sistema incompatible (no hay puntos de corte), la gráfica 2 a un sistema compatible determinado (un único punto de corte) y la gráfica 3 a un sistema compatible indeterminado (infinitos puntos de corte).

**Resolución de sistemas de ecuaciones: Métodos analíticos**

Como hemos visto en el apartado anterior, un sistema se puede resolver gráficamente. Pero en muchas ocasiones, este método presenta algunos inconvenientes.

En el caso de que no dispongamos de una herramienta informática preparada para representar las gráficas, estaremos obligados a construir una tabla con los puntos, para posteriormente realizar la representación de las rectas a mano.

También nos puede ocurrir que, una vez representadas las rectas, el punto de corte esté muy alejado del origen de coordenadas o que no tenga las coordenadas enteras. Situaciones estas, que suelen significar un obstáculo para encontrar la solución exacta.

Todos los inconvenientes señalados anteriormente justifican de manera clara la necesidad de que existan métodos de resolución de sistemas analíticos, es decir, realizando operaciones.

Veamos los tres métodos más clásicos, que consisten en buscar **sistemas equivalentes**, que son aquellos que tienen la misma solución, cada vez más sencillos:


Imagen de elaboración propia

Como en apartados anteriores, antes de que te pongas manos a la obra, te ofrecemos una lista de reproducción de juanmemol sobre resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. En ella puedes encontrar 21 vídeos, en los que aparecen ejercicios clásicos, problemas e incluso una actividad de la prueba de acceso para mayores de 25 años planteada en Cataluña en el 2010.

## Comprueba lo aprendido

A las dos situaciones relacionadas con el fútbol que vimos en el punto anterior, le vamos a añadir una nueva pista.

Plantea en cada uno de los casos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, resuélvelos por el método que prefieras y completa los espacios en blanco que nos dan la solución.

1. Sabemos que $x$ : Número de goles que ha marcado Messi e $y$ : Número de goles que ha marcado Ibrahimovic y que entre los dos han marcado 40 goles. La nueva pista que nos dan es: "Messi ha anotado 10 goles más que su compañero Ibrahimovic".

| | |
|---|---|
| $x$ : Número de goles marcados por Messi | |
| $y$ : Número de goles marcados por Ibrahimovic | |

2. La ecuación que relaciona el número de goles marcados por ambos equipos es: $x = y + 6$ , siendo $x$ : nº goles marcados por el Real Madrid e $y$ : nº goles marcados por el F.C. Barcelona. En este caso, la nueva pista que nos dan es: "Entre los dos equipos han marcado 172 goles."

| | |
|---|---|
| $x$ : Número de goles marcados por el Real Madrid | |
| $y$ : Número de goles marcados por el F.C Barcelona | |

**Enviar**

1. La nueva pista, traducida al lenguaje matemático, quedaría: $x = y + 10$

A continuación, planteamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos. En este caso, se ha optado por resolverlo mediante el **método de sustitución**.

Como la **x** está despejada en la segunda ecuación, lo aprovecharemos y la

$x=y+10 \quad x=y+10 \quad x=y+10 \quad x=y+10 \quad x=25$

2. La nueva pista, traducida al lenguaje matemático, quedaría: $x+y=172$

A continuación, planteamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos. En este caso, se ha optado por resolverlo mediante el **método de igualación**.

Para ello, como la **x** está despejada en la primera ecuación, la despejamos también en la segunda e igualamos ambas expresiones. El resto es hacer operaciones.

$$\begin{cases} x=y+6 \\ x+y=172 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y+6 \\ x=172-y \end{cases} \rightarrow y+6=172-y \rightarrow 2y=166 \rightarrow$$

$$\rightarrow y=\frac{166}{2} \rightarrow y=83 \rightarrow x=83+6=89 \rightarrow \begin{cases} x=89 \\ y=83 \end{cases}$$

# *Ejercicio resuelto*

A un partido benéfico celebrado en el estadio Ramón Sánchez Pizjuan, de Sevilla, han asistido 42.000 espectadores. Se ha puesto a la venta únicamente dos tipos de entradas, a un precio de 15 € para los adultos y entradas infantiles a 6 €. La recaudación total ha sido de 612.000 €. ¿Cúantas entradas de cada tipo se han vendido?

**Mostrar retroalimentación**

Si llamamos $x$ : Nº de entradas de adultos vendidas, $y$ : Nº de entradas infantiles vendidas, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 42.000 \\ 15x + 6y = 612.000 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos vistos anteriormente, tendremos que se han vendido:

$x$ = 40.000 entradas de adultos, $y$ = 2.000 entradas infantiles.

Si en el sistema del ejercicio anterior $\begin{cases} x + y = 42.000 \\ 15x + 6y = 612.000 \end{cases}$ multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por -15, tendremos que el coeficiente de **x** en ambas ecuaciones es opuesto, -15 y 15.

$$\begin{cases} -15x - 15y = -630.000 \\ 15x + 6y = 612.000 \end{cases}$$

Si ahora sumamos las dos ecuaciones miembro a miembro, haremos desaparecer la $x$ , y nos quedará una ecuación con una única incógnita, $y$ . Si la resolvemos tendremos el valor numérico de $y$ .

$$-9y=-18.000 \Rightarrow y=\frac{-18.000}{-9} \Rightarrow y=2.000$$

Posteriormente, sustituiremos este valor de $y$ en la primera ecuación, calculando el valor de $x$ .

$$x+2.000=42.000 \Rightarrow x=40.000 \Rightarrow \begin{cases} x = 40.000 \\ y = 2.000 \end{cases}$$

*Hemos encontrado la solución de una manera rápida, simplemente consiguiendo coficientes opuestos en una de las incógnitas*. Lo que hemos es aplicar el **método de reducción.**

## Reflexiona

Uno de los motores que propulsa el lanzamiento del cohete **Ariane 5** es el **Vulcain 2**.

Durante los 540 segundos que dura su funcionamiento consume las 155 toneladas de combustible que contiene, compuestas exclusivamente de **oxígeno** e **hidrógeno** líquido.

Por cada tonelada de hidrógeno el Vulcain carga 5,2 toneladas de oxígeno.

Plantea y resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que nos permita saber la cantidad exacta de oxígeno e hidrógeno líquido que almacena en el motor.

**Mostrar retroalimentación**

Por ejemplo, si llamamos $x$ a las toneladas de hidrógeno e $y$ a las de oxígeno, obtendremos las siguientes ecuaciones.

Como almacena 155 toneladas en total, tenemos que: $x+y=155$ .

Y por otro lado, ya que por cada tonelada de hidrógeno carga 5,2 de oxígeno: $y=5{,}2\cdot x$ .

Por tanto el sistema nos queda $\begin{cases} x+y=155 \\ y=5{,}2\cdot x \end{cases}$

Sustituimos la $y$ en la primera ecuación, y nos queda

$$x+5{,}2x=150 \Rightarrow 6{,}2x=155 \Rightarrow x=\frac{155}{6{,}2} \Rightarrow x=25$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones (por ejemplo en la segunda), obtenemos el valor de $y$ :

$$y=5{,}2\cdot 25=130$$

Por tanto $\begin{cases} x = 25 \ toneladas \\ y = 130 \ toneladas \end{cases}$

## Ejercicio resuelto

**Curso 2009/2010**

Determine los coeficientes de la ecuación $3x^2-ax+b=0$ para que sus soluciones sean los valores 3 y -2.

Mostrar retroalimentación

Para que la ecuación tenga como soluciones 3 y -2, al sustituir $x$ por dichos valores en la ecuación, la igualdad debe cumplirse . Es decir:

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow 3\cdot 3^2-a\cdot 3+b=0 \Rightarrow 27-3a+b=0 \Rightarrow -3a+b=-27 \\ x=-2 \Rightarrow 3\cdot(-2)^2-a\cdot(-2)+b=0 \Rightarrow 12+2a+b=0 \Rightarrow 2a+b=-12 \end{cases}$$

Por lo tanto, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} -3a+b=-27 \\ 2a+b=-12 \end{cases}$$

Vamos a proceder a resolverlo por reducción, para lo que a la primera ecuación le cambiamos el signo (multiplicamos por -1) y le sumamos la segunda ecuación:

$$\begin{cases} -3a+b=-27 \\ 2a+b=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-b=27 \\ 2a+b=-12 \end{cases} \Rightarrow 5a=15 \Rightarrow a=3$$

De esta forma obtenemos la incógnita $a$ . Para obtener $b$ , sustituimos $a$ en una de las ecuaciones y despejamos:

$$-3\cdot 3+b=-27 \Rightarrow -9+b=-27 \Rightarrow b=-18$$

Por lo que la ecuación tendría que tener la forma: $3x^2-3x-18=0$

Para comprobar que el resultado es correcto, resolvemos la ecuación de segundro grado. Pero antes de aplicar la fórmula que conocemos, vamos a simplificar dicha ecuación ya que hemos observado que podemos dividir ambos miembros de la ecuación entre 3, con lo que nos quedaría:

$$x^2-x-6=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{1+5}{2}=3 \\ x_2=\frac{1-5}{2}=-2 \end{cases}$$

## Ejercicio resuelto

Universidades Públicas de Andalucía

**Curso 2011/2012**

Resuelva el sistema lineal:

$$\begin{cases} 3(x-2)-5y=4 \\ 4x-3(y-2)=3x+8 \end{cases}$$

**Mostrar retroalimentación**

El primer paso es quitar los paréntesis y simplificar las ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x-6-5y=4 \\ 4x-3y+6=3x+8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-5y=10 \\ x-3y=2 \end{cases}$$

A continuación, lo resolvemos por unos de los métodos vistos anteriormente, por ejemplo el de sustitución. Despejamos la x de la segunda ecuación:

$$x=2+3y$$

Y sustituimos en la primera:

$$3(2+3y)-5y=10 \rightarrow 6+9y-5y=10 \rightarrow 4y=4 \rightarrow y=1$$

Solo falta calcular el valor de y:

$$x=2+3\cdot 1=5$$

Como en temas anteriores, es muy importante que adquieras soltura en el cálculo, pero esta vez con expresiones algebraicas y siempre teniendo en cuenta la notación propia del Álgebra. Todo esto se consigue teniendo en cuenta unos principios fundamentales y practicando mucho. Por ello, te ofrecemos a continuación un pequeño esquema de lo que no debes olvidar y unos **enlaces donde encontrarás ejercicios resueltos (para saber más)** para que adquieras soltura. Además puedes amenizarlo todo con algunas curiosidades.

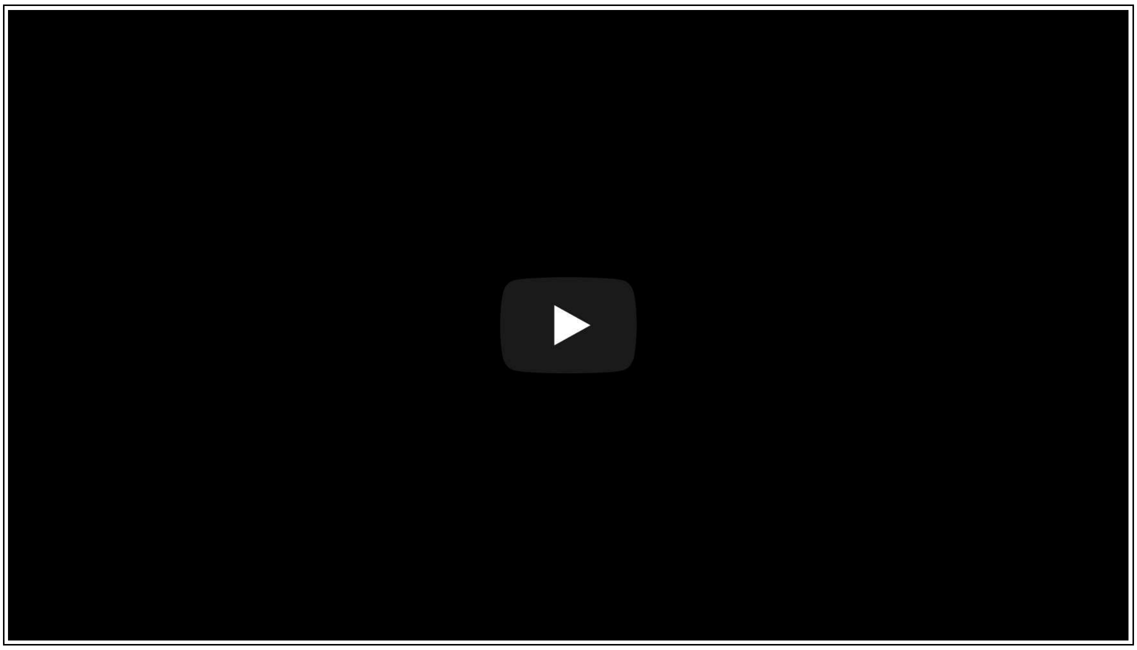
## Importante


Imagen de elaboración propia

## 4.1. Calculadora para trabajar con expresiones algebraicas

**Photomath: Escanea problemas matemáticas para un resultado instantáneo**

Hoy con las nuevas tecnologías existen multitud de aplicaciones y programas que resuelven ecuaciones y sistemas. Por su sencillez y por su rapidez os vamos a hablar de **Photomath**. Entre una de sus grandes virtudes es que posee una aplicación móvil, que utiliza la cámara para escanear las ecuaciones y los sistemas. En el siguiente vídeo puedes ver cómo funciona:



Úsala para comprobar tus resultados y detectar tus errores, ya que no solo te ofrece la solución sino también el desarrollo. Procura no acostumbrarte a ella ya que en la prueba no se permite usar dispositivos móviles.

## Curiosidad

La suma y resta de expresiones algebraicas se puede ver de una forma más visual. Vamos a representar los términos como figuras geométricas. Cada figura tiene la superficie que expresa dicho término.

El término $x$ será un rectángulo de base 1 y altura $x$ (y por tanto su superficie vale $1 \cdot x = x$ ); el término y $y$ tendrá base 1 y altura $y$ ; para $y^2$ , la base y la altura miden $y$ ; el término $xy$ tiene altura $x$ , base $y$ .

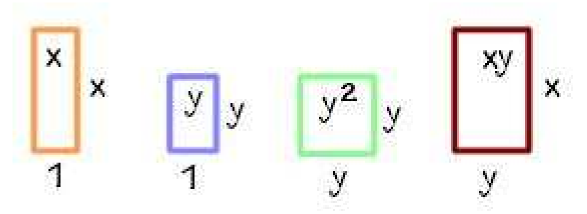


Imagen de elaboración propia

De esta forma, nuestra expresión quedaría:

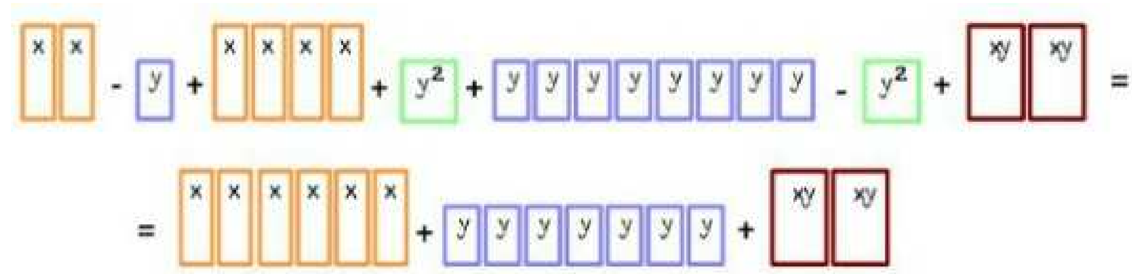


Imagen de elaboración propia

Es evidente que no podemos sumar o restar términos que no son semejantes, aunque coincidan algunas variables como en el caso de $x+xy$

## Curiosidad

Aunque ya vimos que la notación que usamos hoy en día para escribir en lenguaje matemático es relativamente actual, las ecuaciones se han resuelto desde la civilización egipcia.

*Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24*

$$x+\frac{x}{7}=24$$

Imagen en Wikimedia Commons de Luestling bajo Dominio Público

Los babilonios, unos 1000 años después, se centraron básicamente en las ecuaciones de segundo grado; y entre los griegos, que en general se dedicaron a la geometría, debemos destacar la figura de **Diofanto de Alejandría** (200 a.C. - 284 a.C.). Diofanto publicó en su obra sus estudios acerca de ecuaciones que tienen soluciones racionales. Como curiosidad, has de saber que su epitafio era un problema que se resuelve con una ecuación de primer grado. Dice así:

"*Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa, y cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.*"

Este problema se traduce en la siguiente ecuación, siendo x la edad de Diofanto:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

## Para saber más

**Ecuaciones de primer grado**

En el siguiente enlace a la página de Álgebra con Papas, se plantean unas cuantas ecuaciones para que las resuelvas. Cuando termines, pulsa el botón PrimerSol02, para hacer algunas ecuaciones con denominadores.

Ecuaciones primer grado

**Ecuaciones de segundo grado**

¿Te interesa saber de dónde sale la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado? En El Blog de Ed encontrarás la respuesta.

**Sistemas de ecuaciones lineales**

En la siguiente wiki del IES Mar de Alborán, encontrarás todo lo necesario para repasar los sistemas de ecuaciones. Además puedes encontrar varias actividades donde trabajar el planteamiento y la resolución de problemas en contexto haciendo uso de ellos.

**Desigualdades e inecuaciones**

En esta página de Descartes, puedes practicar con las inecuaciones lineales de una incógnita que ya hemos visto, pero además tendrás la oportunidad de aprender algo más sobre otro tipo de inecuaciones (las de segundo grado y los sistemas).