INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Números y Álgebra: Números Reales

1. Números reales

Uno de los aspectos más sorprendentes de la historia de los números es que cada nueva invención es ampliación de las precedentes y de alguna manera las completa. Los números enteros incluyen los naturales, y los números racionales incluyen los números enteros. La idea de número es común a todos ellos. Mas por otra parte la historia de la invención de los números no es lineal, está llena de vicisitudes, y batallas encarnizadas. Hoy día sorprende leer lo que se dijo de los números negativos, los siglos que tuvieron que pasar para la introducción plena del sistema decimal en Occidente. El viaje que empezamos con los números naturales, siguió con los números enteros, ¿habrá concluido con los números racionales? La respuesta a tal pregunta es NO.

Fotografía en Flickr por blmiers2 bajo CC

Ya los antiguos griegos descubrieron que había objetos, cuyas dimensiones no podían expresarse con los números racionales, una vez elegida una unidad. Llamaron a tales magnitudes inconmensurables, que no pueden medirse. La unión del sustantivo 'magnitudes' y el atributo 'inconmensurables' parece encerrar en sí misma una contradicción o paradoja. Constituyen el equivalente en lenguaje geométrico de lo que en lenguaje numérico se designa hoy día como número irracional. Un número irracional contra lo que puede parece a simple vista no es un número absurdo, ilógico, sino un número que no es racional, que no puede expresarse como cociente de números enteros.

Fotografía en Flickr por fotogake bajo CC

Importante

El conjunto de los irracionales, **I**, está formado por los números que no pueden ser expresados como fracción. Su expresión decimal tiene un número infinito de cifras que no se repiten de forma periódica.

Existen infinitos números irracionales. Algunos de ellos por su importancia histórica y práctica, han llegado a adquirir un nombre propio. Pulsa en la imagen para verla a mayor tamaño:

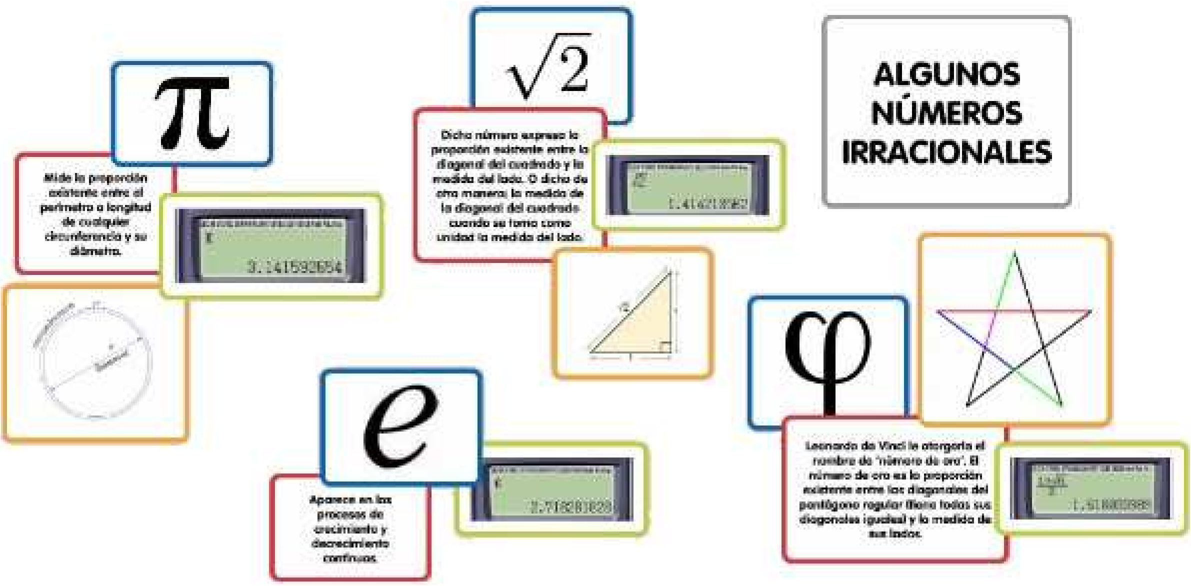


Imagen de elaboración propia

¿Cómo escribir los números irracionales?

Si te fijas en la imagen anterior, el número de oro o número áureo phi (φ o ϕ), viene expresado a través de una suma y un cociente de un número irracional $\sqrt{5}$, con dos números racionales, pues bien, la irracionalidad de phi, no es casualidad.

Importante

Si a un número irracional le sumamos (restamos) o lo multiplicamos (dividimos) por un número racional, el resultado es un número irracional.

Según el importante anterior, en algunos casos podremos escribirlos de forma simbólica, basándonos en otros números irracionales. Pero en el caso en el que recurramos a su expresión decimal, escribimos el número hasta una determinada cifra e indicamos mediante puntos suspensivos que los decimales continúan. Esto nos permitirá no confundirlos con números decimales exactos.

Los números reales

Importante

Se llama número real a cualquier expresión decimal, ya tenga una cantidad finita o infinita de cifras.

El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$.

Se clasifican en:

- Racionales (pueden expresarse como cociente de números enteros)
- Irracionales (no racionales)

El conjunto de los números reales se puede representar como si de un cuadro de Modrian se tratara:

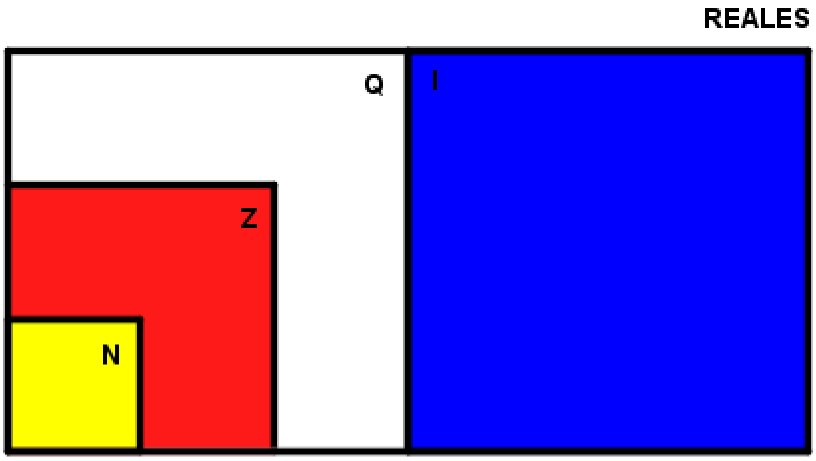


Imagen de elaboración propia

Si te fijas, uno de los aspectos más sorprendentes de la historia de los números es que cada nueva invención es ampliación de las precedentes y, de alguna manera, las completa. Los números enteros incluyen los naturales, los números racionales incluyen los números enteros y los reales incluyen los racionales y los irracionales.

Aunque parezca increíble la historia de los números no termina con los números reales. Existe otro conjunto de números llamado números complejos, que como no podía ser de otra forma, está repleto de números imaginarios. Pero no temáis, por ahora no nos complicaremos la vida con "complejidades".

Comprueba lo aprendido

Veamos si has entendido bien los conceptos de número racional, irracional y real. Responde si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $\sqrt{5}$ es racional.

Sugerencia

Verdadero Falso

Falso
Ten en cuenta que es la raíz cuadrada de un número natural que no es cuadrado perfecto.

b. $\frac{5}{3}$ es racional.

Sugerencia

Verdadero Falso

Verdadero
Fíjate bien, es una fracción de dos números enteros.

c. 3,242424... es un número irracional.

Sugerencia

Observa que es un número decimal con infinitas cifras periódicas.

d. Todos los números anteriores son reales.

Sugerencia

Verdadero Falso

Verdadero
Los reales son todos los racionales e irracionales.

1.2. Radicales. Operaciones

Hemos llegado a uno de los apartados más importantes del tema: la noción y el manejo de radicales.

Su importancia para nosotros no sólo se debe al papel que jugaron en el descubrimiento de los números irracionales, sino también por la frecuencia con que aparecen en la prueba que estamos preparando.

Fotografía en Flickr por Waka Jawaka bajo CC

Ya hemos estudiado en el tema anterior operaciones como la suma, y la multiplicación, así como sus inversas, la resta y la división. Pero no podemos dejarnos en el tintero la potenciación. Observa el siguiente cuadro:

Potenciación	Radicación
Conocemos la base, b , y el exponente, n , y calculamos la potencia: $b^n = a$	Conocemos la potencia, a , y el exponente, n y calculamos la base: $\sqrt[n]{a} = b$

La radicación es una operación relacionada con la potenciación, y se representa utilizando el símbolo √ que proviene de la inicial de la palabra en latín, radix. En muchas ocasiones da como resultado un número irracional (recuerda que la raíz cuadrada de 2 fue posiblemente el primer número irracional conocido).

Importante

Una potencia de exponente fraccionario $a^{\frac{m}{n}}$ es un radical de índice n y radicando a^m , y se denota por: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

En consecuencia, las raíces pueden expresarse como potencias de exponente fraccionario. Y, por tanto, podemos efectuar los cálculos utilizando las propiedades de las fracciones y las reglas básicas de las potencias.

Importante

Decimos que la raíz **n-ésima** de un número a es b si cumple que b elevado a n

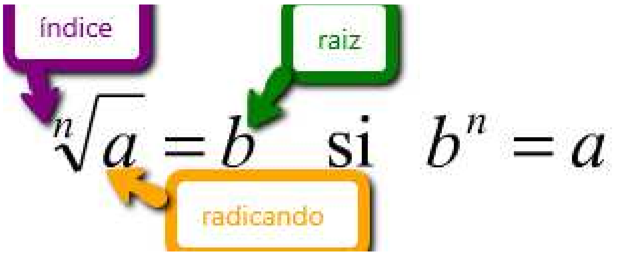


Imagen de elaboración propia

Comprueba lo aprendido

La raíz cuadrada de 4:

- No tiene solución.
- Tiene una única solución y es 2.
- Tiene dos soluciones: 2 y -2.

Incorrecto

Incorrecto

Opción correcta

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

La raíz cuadrada de -6:

- Carece de sentido dentro de los números reales.
- Tiene una única solución y es -3.
- Tiene dos soluciones.

Opción correcta

Incorrecto

Incorrecto

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

- Existe y tiene una única solución del mismo signo que el radicando.
- Tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa.

Incorrecto

Opción correcta

Incorrecto

Solution

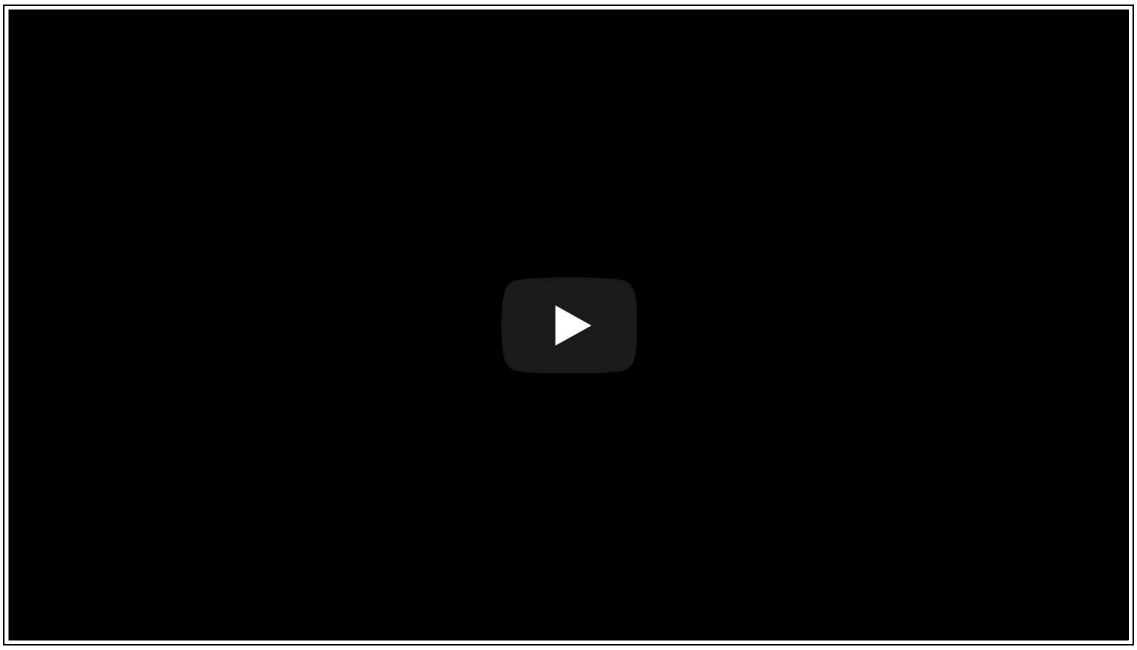
1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

Radicales equivalentes. Simplificar y operar con radicales.

En la siguiente presentación encontrarás un pequeño repaso a la teoría de radicales, cómo operar con ellos y muchos ejemplos. Pero no te preocupes, por si no es suficiente, algo más abajo entraremos en detalle de algunos de estos aspectos.

Además te enlazamos un pdf con un detallado resumen de la página 3con14. Para verlo haz clic en la siguiente imagen:

En la anterior presentación has visto la teoría de radicales acompañada de ejemplos, pero debes tener en cuenta que las preguntas de este tipo en la prueba son frecuentes. Por eso es conveniente que aprendas a operar con ellos a la perfección y que mejor forma de conseguirlo, que viendo cómo se hace. A continuación te ofrecemos una serie de vídeos de juanmemol del canal de YouTube lasmatematicas.es. En dicho canal, puedes encontrar una sección de radicales que puede serte de gran ayuda, pero para que no te pierdas en la marabunta de vídeos (hay 52), te ofrecemos una pequeña muestra en la siguiente lista de reproducción de 6 vídeos:



Racionalización

Ya hemos visto en la presentación, que se llama así al proceso consistente en transformar expresiones en forma de cociente y con raíces en el denominador en otras expresiones en las que se han eliminado las raíces del denominador.

CASO I: El denominador es una única raíz

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

1º) Simplificar el radical

2º) Se multiplica numerador y denominador por la raíz del denominador cuyo radicando se eleva a la diferencia entre el índice y el exponente

CASO II: El denominador es una suma o diferencia uno de cuyos operandos es una raíz cuadrada

Si el denominador de la fracción contiene dos términos en uno de los cuales o en los dos hay una raíz cuadrada, se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador. O sea si es una suma se multiplica por la resta, y viceversa.

Ejercicio resuelto

Curso 2010/2011

Racionalice las expresiones:

a. $\frac{3}{4\sqrt{3}-3}$

b. $\frac{2}{\sqrt{27}}$

Mostrar retroalimentación

$$\frac{3}{4\sqrt{3}-3}=\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{(4\sqrt{3}-3)(4\sqrt{3}+3)}=\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{(4\sqrt{3})^2-3^2}=\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{48-9}=\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{(4\sqrt{3})^2-3^2}=$$
$$=\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{48-9}=\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{39}=\frac{4\sqrt{3}+3}{13}$$

b. Como tenemos en el denominador una única raíz cuadrada, multiplicamos tanto en el numerador como en el denominador por ella misma para racionalizar:

$$\frac{2}{\sqrt{27}}=\frac{2\sqrt{27}}{(\sqrt{27})^2}=\frac{2\sqrt{27}}{27}=\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{27}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Aunque en la actividad no nos pedían simplificar, es recomendable hacerlo.

Otra posibilidad para resolverlo sería extraer factores en el denominador (en este caso es posible) antes de racionalizar :

$$\frac{2}{\sqrt{27}}=\frac{2}{\sqrt{3^3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

Racionalice y simplifique la fracción:

$$\frac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}$$

Mostrar retroalimentación

Al ser el denominador una suma de raices cuadradas, utilizamos el conjugado para racionalizar:

$$\frac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}=\frac{2(\sqrt{18}-\sqrt{8})}{(\sqrt{18}+\sqrt{8})(\sqrt{18}-\sqrt{8})}=\frac{2(\sqrt{18}-\sqrt{8})}{(\sqrt{18})^2-(\sqrt{8})^2}=\frac{2(\sqrt{18}-\sqrt{8})}{10}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

Otra posibilidad para resolverlo sería darnos cuenta que en el denominador podemos hacer previamente operaciones:

$$\frac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}=\frac{2}{\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3}}=\frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=\frac{2}{5\sqrt{2}}$$

$5\sqrt{2} \quad 5\sqrt{2}\,\sqrt{2} \quad 5(\sqrt{2})^2 \quad 5\cdot 2 \quad 10 \quad 5$

Ejercicio resuelto

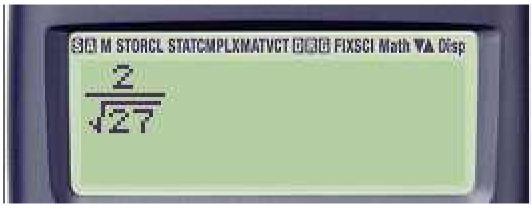
Comprueba los resultados obtenidos con la calculadora.

Mostrar retroalimentación

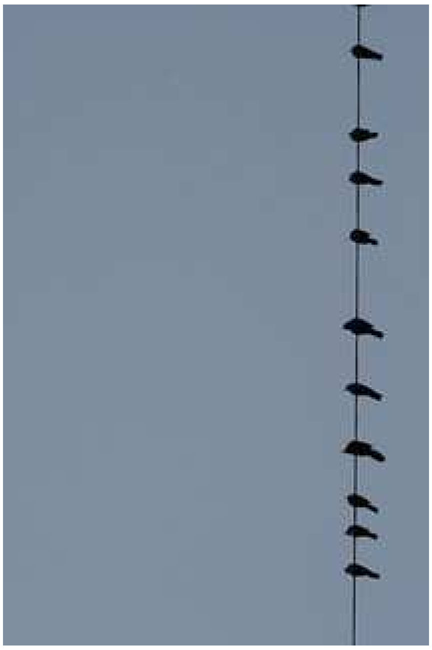
Actividad 1

Apartado a

Apartado b



Actividad 2



Fotografía en Flickr por arsheffield bajo CC

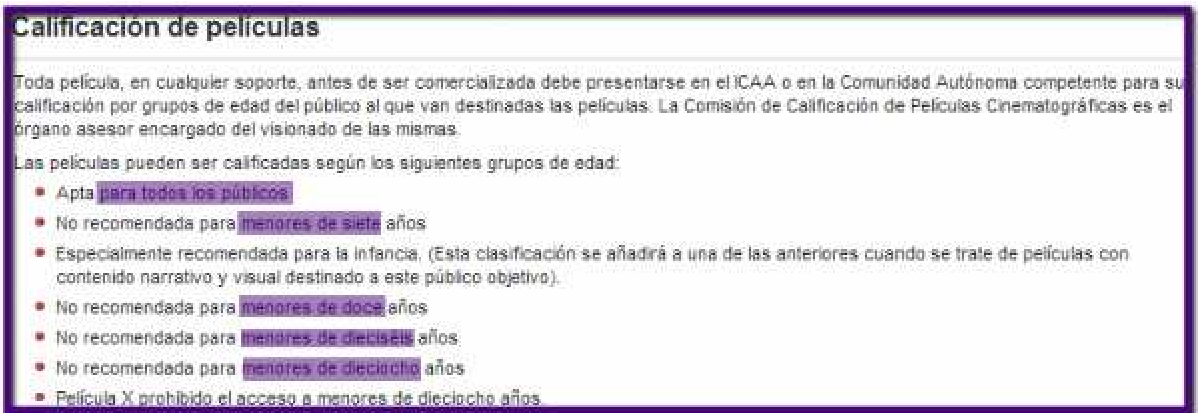
La recta real

A estas alturas ya habrás descubierto que todos los tipos de números los hemos podido ir representando en una recta. Pues bien, a este objeto matemático mitad numérico y mitad geométrico se le llama recta real.

Los números reales llenan completamente la recta, de tal forma que todo punto de la recta real tiene una expresión entera o decimal (exacta, periódica o no periódica). Recuerda además que según el tipo de número con el que estemos trabajando utilizamos un método u otro de representación.

Intervalos

Observa la siguiente captura de pantalla del ministerio de educación, referida a la calificación de las películas según su contenido y su adecuación al público según la edad.



Calificación de películas

Toda película, en cualquier soporte, antes de ser comercializada debe presentarse en el ICAA o en la Comunidad Autónoma competente para su calificación por grupos de edad del público al que van destinadas las películas. La Comisión de Calificación de Películas Cinematográficas es el órgano asesor encargado del visionado de las mismas.

Las películas pueden ser calificadas según los siguientes grupos de edad:

- Apta para todos los públicos
- No recomendada para menores de siete años
- Especialmente recomendada para la infancia. (Esta clasificación se añadirá a una de las anteriores cuando se trate de películas con contenido narrativo y visual destinado a este público objetivo).
- No recomendada para menores de doce años
- No recomendada para menores de dieciséis años
- No recomendada para menores de dieciocho años
- Película X prohibido el acceso a menores de dieciocho años

Captura de pantalla del ministerio de cultura, educación y ciencia

Si te fijas, no hablamos de que un determinado film es apto para personas de exactamente 14 años, sino para personas mayores de o menores de. Dicho de otra forma, la cinta no está recomendada para personas menores de 14 años, o para edades comprendidas de los 0 a los 14.

Importante

Si $a < b$ se llama **intervalo** de extremos a y b al conjunto de números que están entre a y b en la relación de orden. Según contengan o no los extremos los intervalos se llaman cerrados, abiertos o semicerrados o semiabiertos si contienen solamente uno de los extremos.

Es decir, los intervalos son "trozos" de la recta real.

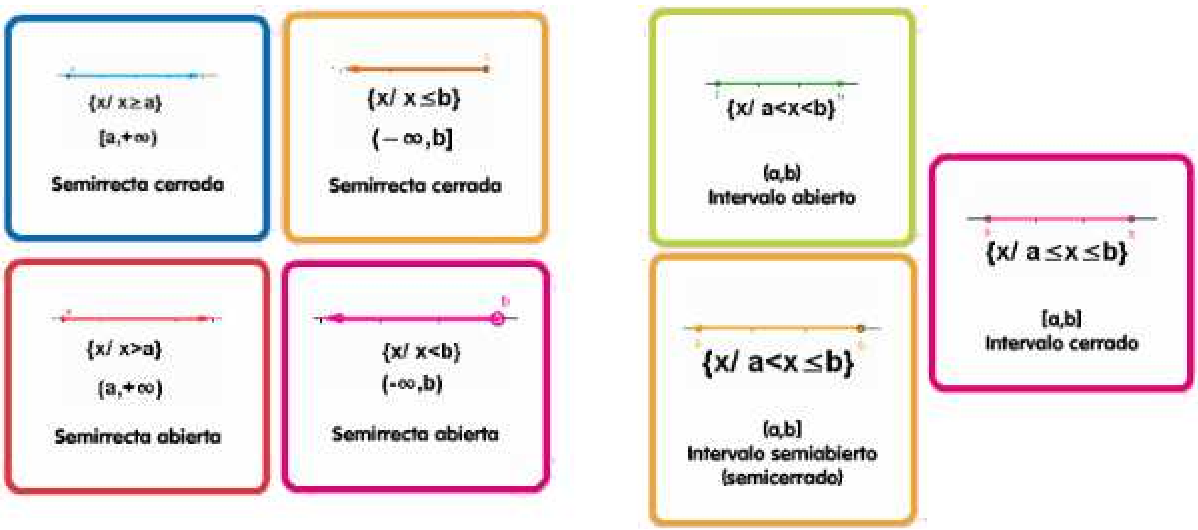


Imagen de elaboración propia

Si observas la imagen anterior, tenemos distintas formas de expresar un intervalo:

- Gráficamente: utilizando la recta real, e indicando los extremos del intervalo.
- A través de conjunto y desigualdades
- Notación de intervalo. En este caso observa que en el caso de las semirrectas, el infinito nunca está contenido.

En el siguiente vídeo, puedes ver los diferentes tipos.

Ejercicio resuelto

Escribe como intervalo los siguientes conjuntos de números reales:

a) Los números que están entre 3 y 10:

Mostrar retroalimentación

Como no nos indican que el 3 y el 10 sean parte del conjunto, nuestro intervalo es **(3 , 10)**. Es decir, son los números x que cumplen: $3 < x < 10$.

b) Los números mayores que 0 y menores o iguales que 8.5:

Mostrar retroalimentación

El 0 no está incluido, pero el 8.5 sí. Por tanto el intervalo estará abierto en 0 y cerrado en 8.5: **(0 , 8.5]**. Este intervalo está formado por los números x que cumplen: $0 < x \leq 8.5$.

c) Los números menores que 2/3:

Mostrar retroalimentación

La fracción 2/3 no está incluida, y recuerda que $+\infty$ y $-\infty$ siempre van abiertos,

Comprueba lo aprendido

¿Cuál es el intervalo que representa los números que cumplen $2 \leq x < 5$?

- [2 , 5]
- (2 , 5)
- [2 , 5)

Incorrecto

Incorrecto

Opción correcta

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

Indica qué intervalo representa a los números mayores que -2:

- (-2 , +∞)
- (-2 , +∞]
- (-∞ , -2)

Opción correcta

Incorrecto

Incorrecto

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Indica cuál de los siguientes números pertenecen al intervalo [3.26 , 3.42):

- 3.423
- 3.31
- 3.2

Incorrecto

Incorrecto

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

Al igual que operábamos con números, con los intervalos podemos hacer algunas operaciones:

a. **Unión** (U): al unir dos intervalos, consideramos los números que están en uno u otro intervalo:

[1,4] U (3,5) = [1,5)

b. **Intersección** (∩): la intersección de dos intervalos consiste en quedarse con los números que están en los dos a la vez:

[1,4] ∩ (3,5) = (3,4]

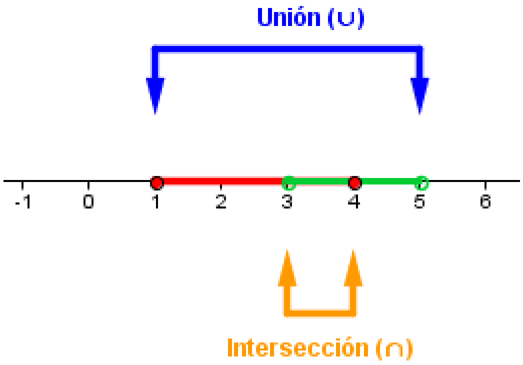
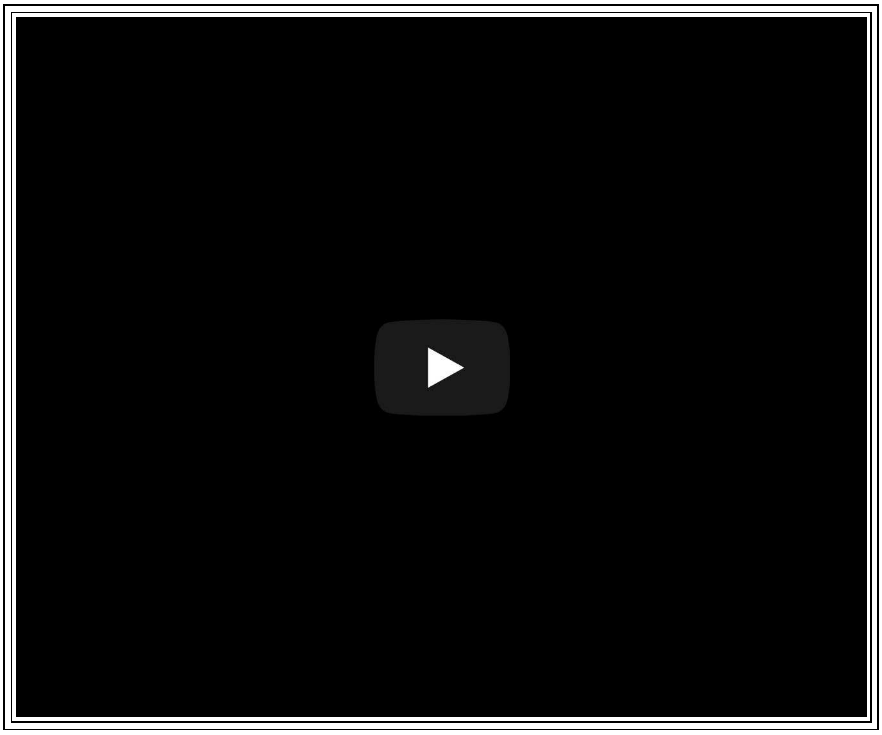
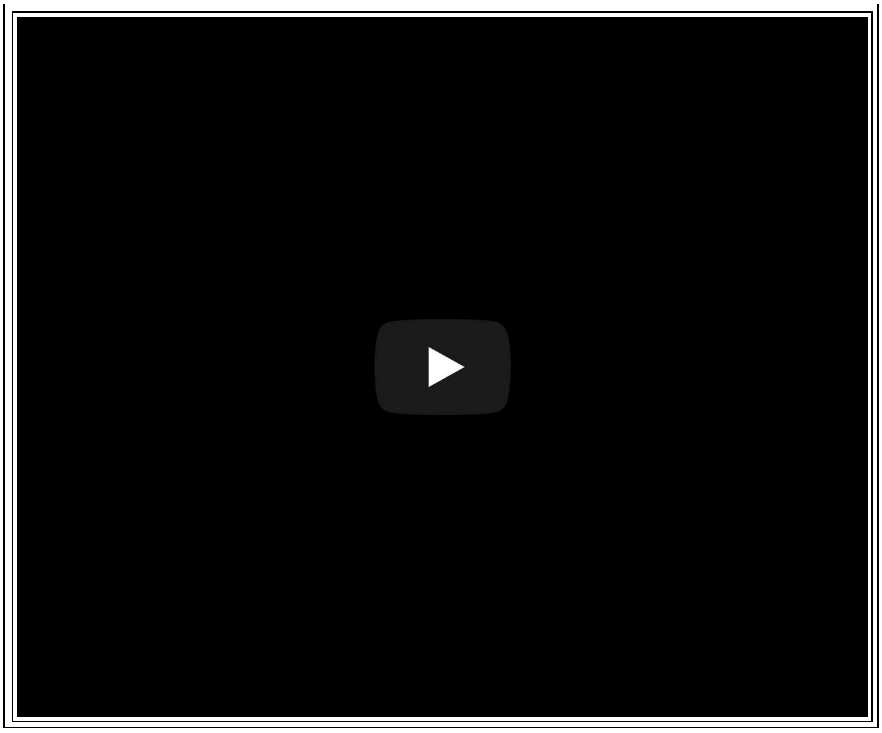


Imagen de elaboración propia

En los siguientes vídeos, puedes ver la unión y la intersección.





Aproximación

Si lo piensas bien, existen muchas situaciones en nuestra vida cotidiana donde utilizamos los números de manera aproximada:

- Cuando vamos a comprar frutas o verduras y pedimos un kilo o tres cuartos de algún producto, si nos fijamos bien en la cantidad que marca la balanza, casi nunca el frutero coloca la cantidad exacta de la mercancía que hemos solicitado. "Pasa un poco del kilo", nos dice el comerciante; o "le faltan 35 gramos para los tres cuartos".
- "Nos vemos a las siete y media en la puerta del cine", y nadie llega a la hora exacta a la cita. Muy pocos llegarán unos minutos antes, y casi todo el mundo con algo de retraso.

Fotografía en Flickr por tarostatic bajo CC

Que los números reales se expresen en el sistema decimal mediante expresiones decimales finitas o infinitas plantea problemas no menores de cálculo. ¿Cómo manejar expresiones decimales infinitas de las que no conocemos todas sus cifras? ¿Cómo manejar de forma aceptable números decimales con un número grande de cifras? Tales consideraciones llevan a los conceptos de aproximación y error.

Importante

Si en un número decimal, a partir de un determinado orden, sustituimos todas las cifras de orden inferior por ceros, obtendremos otro número decimal que se dice una **aproximación** del primero (hasta el orden fijado).

Cuando se dice que la distancia de la Tierra al Sol es 150.000.000 kilómetros. Tal cifra con toda certeza es una aproximación y es muy probable que el orden de aproximación sean las decenas de millón.

Esto puede darnos qué pensar... ¿existe un orden de aproximación establecido de antemano? La respuesta es NO. Dependerá de lo que se desea medir. Así carecería de sentido fijar el mismo orden de aproximación para medir la distancia de entre dos ciudades o el diámetro de una pelota de pimpón.

En la vida real no es necesaria mucha precisión, basta con 2 ó 3 decimales, la cosa cambia si manejamos datos científicos.

Hay distintos métodos de aproximación:

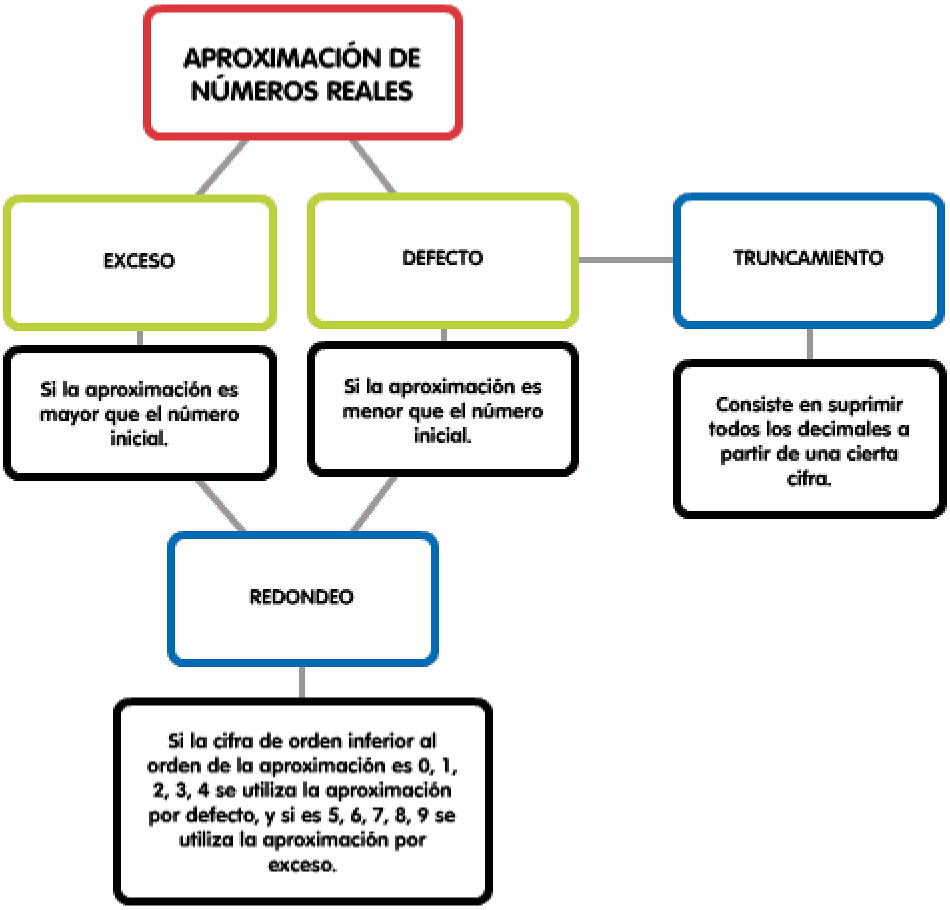


Imagen de elaboración propia

Si te paras a pensar, hay veces que aproximamos por exceso y por defecto, sin darnos cuentas. Por ejemplo, la duración del año solar medio no contiene un número exacto de días. Se usan dos tipos de años: el de 365 días (aproximación por defecto) y el de 366 (año bisiesto, aproximación por exceso).

Comprueba lo aprendido

Recordemos las diez primeras cifras decimales de nuestro querido número de oro φ = 1,6180339887.

Completa en la siguiente tabla los espacios en blanco correspondiente a las **aproximaciones de** φ que se indican.

Aproximación	Truncamiento	Redondeo
a la 3ª cifra decimal	1,	1,
a la 6ª cifra decimal	1,	1,
a la 8ª cifra decimal	1,	1,

Enviar

Recuerda, truncar es suprimir el resto de cifras decimales. Redondear aumenta

Las aproximaciones nos ayudan a representar los números irracionales en la recta real sin tener que recurrir a complejos métodos geométricos. Observa el siguiente applet de Geogebra, en él se representan las raíces de los primeros 50 números enteros, dando sus aproximaciones hasta el máximo de cifras decimales que permite el programa:

Errores

Al sustituir un valor por su aproximación evidentemente se comete un error.

ELPAIS.com > Deportes

"Un error de 10 centímetros te mata"

El lituano Stankevicius se convierte en el central más sólido del Valencia

CAYETANO ROS - Valencia - 22/04/2011

Titular en ELPAIS.com (22/04/2011)

En este reportaje al central del Valencia Marius Stankevicius, en la semana que se enfrentaban al Real Madrid, comentaba:

"El peor momento para un defensa es cuando tu equipo ataca: todos piensan en atacar y tú debes pensar en defender". Y la otra: "10 centímetros de error en el fútbol actual es suficiente. Te matan.

No hace falta que el error sea grave".

Pero... ¿cuándo un error empieza a ser grave?

Ejercicio resuelto

Fotografía en Flickr por juanpol bajo CC

Veamos un caso práctico. En el prospecto de unas cápsulas se indica que cada gramo del medicamento contiene 0,00285 gramos de **ácido bórico** y 0,00015 gramos de **tetraborato de sodio**.

En un control de calidad farmacéutico, se toma una muestra de una de las cápsulas y se detecta que cada gramo de la medicina contiene 0,0031 gramos de ácido bórico y 0,00013 gramos de tetraborato.

a. En uno de los casos el error es por exceso, supera a la cantidad fijada, y en el otro es por defecto, está por debajo. ¿cuál es uno y cuál es el otro?

b. ¿En cuál de los dos componentes la diferencia entre la cantidad indicada en el prospecto y la detectada en el tubo es mayor?

Mostrar retroalimentación

a. En el caso del ácido bórico el error es por exceso, puesto que 0,0031>0,00285. Y para el tetraborato es por defecto, ya que 0,00013<0,00015.

b. Hallamos en ambos casos la diferencia entre la cantidad indicada y la detectada:

$$|0,0031-0,00285| = 0,000250$$

$$|0,00013 - 0,00015| = |-0,00002| = 0,00002$$

Para poder comparar, se considera el valor absoluto de la diferencia. En nuestro caso, es mayor la diferencia del ácido bórico.

Importante

Se denomina **error absoluto** a la diferencia entre el valor real de un número y su aproximación. Se suele tomar el valor absoluto de dicha diferencia.

Error absoluto =|valor real - aproximación|

Los errores absolutos cometidos en las muestras detectadas de la pomada son 0,000250 para el ácido bórico y 0,00002 en el tetraborato.

Observa la siguiente noticia:

GALICIA

Una alcaldía a cara o cruz

- En el municipio ourensano de Os Blancos el bastón de mando de la alcaldía sigue sin dueño a causa de un error en el recuento de votos. La resolución puede depender ahora de una moneda lanzada al aire

A. R. / OURENSE

Día 26/05/2011

COMENTARIOS

Un fallo en el recuento de votos ha dejado en el aire la alcaldía del municipio ourensano de Os Blancos, que por el momento sigue en empate técnico entre el PP y Alternativa Popular Galega (APG), ambos con 393 votos. Cuatro día después de la jornada electoral y después de comprobarse que el número de votantes no coincide con el número de papeletas escrutadas, sobre la Junta Electoral de la zona recae ahora la responsabilidad de decidir el proceso a seguir para subsanar el error.

Noticia en ABC.es (26/05/2011)

Efectivamente, es un error muy grande pues había más votos que votantes. Ignoramos si eran 10, 15 o 20, pero... ¿qué hubiera ocurrido si en vez de ser unas elecciones municipales hubieran sido unas autonómicas o unas generales? ¿Crees que habría salido en los periódicos? ¿Estaríamos hablando de error? La respuesta a estas preguntas podría ser que el error es relativo dependiendo de la proporción de equivocación que haya en el total. No es lo mismo una equivocación de 10 papeletas en 1.000 habitantes que de 10 papeletas en 35 millones.

Importante

Se define **error relativo** de una aproximación a un número como el cociente entre el error absoluto y el valor del número. El error relativo se puede expresar en tanto por uno o en tanto por ciento.

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}}$$

Observa la diferencia entre el error absoluto y el error relativo:

- Si hablamos de error absoluto siempre podemos indicar las unidades. Por ejemplo, hay 100 papeletas erróneas.
- Si lo hacemos en términos de error relativo la cosa cambia. Hacemos referencia al total, dando el resultado en porcentajes. Por ejemplo, un 1% de las papeletas son erróneas.

Comprueba lo aprendido

¿Es distinta la significación de un error de un milímetro al medir al ancho de un folio de 21 cm o al medir el ancho de una habitación de 4 metros?

- No
- Sí

No es correcto

Correcto

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

¿Cuál es el error relativo de ambos?

- 0,48 % y 0,25% (folio, habitación)
- 0,48 % y 0,025% (folio y habitación)

No es correcto

En efecto, para el folio 1/210= 0,0048 (0,48%). En el caso de la habitación 1/4.000=0,00025 (0,025%). El error de medir el folio es 19 veces más grande.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

En la novela "Los viajes de Gulliver" de **Jonathan Swift**, el protagonista se traslada desde un país poblado de seres diminutos hasta las tierras en donde viven gigantes.

Fotografía en Flickr de mutantMandias bajo CC

A imitación suya, nosotros, vamos a realizar un viaje desde los números muy pequeños a los inmensamente grandes.

El vehículo que nos va a transportar a esos territorios es la **notación científica**. Ella nos ayudará a movernos por el mundo de los números cercanos a cero y, en un suspiro, nos elevará hasta las cantidades enormes de los valores astronómicos.

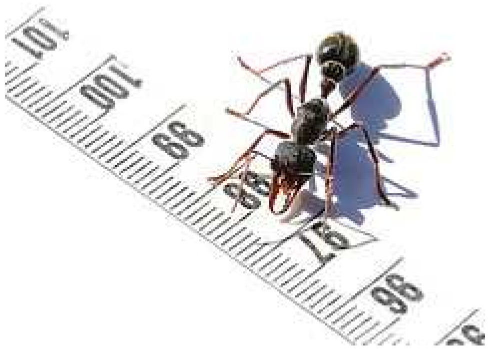
En la época de Hipaso las cantidades que utilizaba la gente corriente e incluso los matemáticos y pensadores no eran ni muy grandes ni muy pequeñas. Y así ocurrió a lo largo de la historia: décimas, centésimas, milésimas como máximo; unidades de mil, de diez mil, o de millón a lo sumo.

En el siglo XIX y sobre todo a lo largo del XX, al desarrollarse con más fuerza las ciencias experimentales, surgió la necesidad de expresar cantidades muy pequeñas en la física de partículas o microbiología, o muy grandes en astronomía o química.

Las potencias de 10, tanto negativas como positivas se muestran como un estupendo soporte donde apoyarnos y nos resultan muy útiles para poder comparar números pequeños o grandes entre sí.

Notación científica

El tamaño de una hormiga varía entre $7{,}5 \cdot 10^{-4}$ y $5{,}2 \cdot 10^{-2}$ metros. ¿Qué indican -4 y -2 en el exponente? Pues que el tamaño de la hormiga se encuentra entre las décimas de milímetro y los decímetros. Además, esa diferencia de 2 unidades entre los exponentes de 10 nos indica que la hormiga de mayor tamaño puede ser hasta 10^2 veces más grande que la de menor envergadura, es decir, 100 veces.



Fotografía en Flickr de young_einstein bajo CC

Una de las ventajas de la notación científica es que muestra a través del exponente de la potencia de 10 el orden de magnitud decimal del número. Con ello facilita la comparación de magnitudes.

Importante

Un número escrito en notación científica se compone de de tres partes:

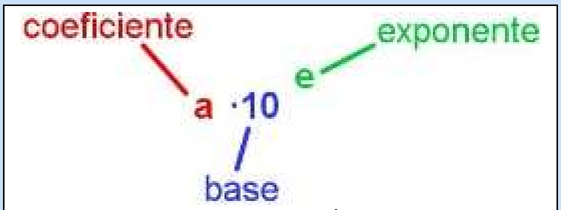


Imagen de elaboración propia

El **coeficiente** es un número decimal con una única cifra entera distinta de cero y dos o tres cifras decimales significativas.

La **base** es siempre el número 10.

Y el **exponente**, que indica el número al que se eleva la base, es un número entero.

Para expresar un número en notación científica debemos seguir el siguiente esquema:

Imagen de elaboración propia

Por ejemplo:

- 121,14 se expresaría en notación científica como $1{,}2114 \cdot 10^{2}$
- 0,00894 se expresaría en notación científica como $8{,}94 \cdot 10^{-3}$

Para calcular el exponente de la potencia de 10 basta con averiguar el orden decimal de la primera cifra que no es cero. Los órdenes decimales de las cifras se calculan recorriendo el número a partir de la coma hacia la izquierda (sentido creciente) y hacia la derecha (sentido decreciente). El orden de la cifra de las unidades es 0

Comprueba lo aprendido

Vamos a pasar las cantidades que comentamos en la introducción a **notación científica**. Rellena los huecos en blanco con los números adecuados.

- La distancia media entre el Sol y Plutón es de 5.913.520.000 km, que en notación científica son 5,91352 · 10 ____ km.
- La distancia de la Tierra a las Pléyades es de 4.162.400.000.000.000 km, es decir, 4,1624 · 10 ____ km.
- El diámetro de un glóbulo rojo mide 0,0075 mm. En notación científica sería ____ $\cdot 10^{-3}$ km.
- Un protón mide 0,000000000001 mm de diámetro, es decir, 1 · 10 ____ mm.

Enviar

Usando las propiedades de las potencias que viste en la Unidad 1, podemos hacer operaciones con números escritos en notación científica. Mira los siguientes ejemplos antes de resolver la actividad propuesta.

Ejercicio resuelto

$(4 \cdot 10^{5}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{9}) =$

$= 4 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^9 = 8{,}4 \cdot 10^{14}$

$(6{,}1 \cdot 10^{12}) \cdot (3{,}2 \cdot 10^{-4}) =$

Mostrar retroalimentación

$= 6{,}1 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-4} = 19{,}52 \cdot 10^8 = 1{,}952 \cdot 10^9$

En el último paso hemos pasado el número a notación científica, pues 19,52 no es válido por tener dos cifras en la parte entera.

$(5{,}85 \cdot 10^{-4}) : (1{,}5 \cdot 10^6) =$

Mostrar retroalimentación

$= (5{,}85 : 1{,}5) \cdot (10^{-4} : 10^6) = 3{,}9 \cdot 10^{-10}$

Comprueba lo aprendido

Elige si las siguientes igualdades o afirmaciones son verdaderas o falsas.

La notación científica de 154000 es $1{,}54 \cdot 10^5$

◯ Verdadero ◯ Falso

Verdadero
Es verdadero porque tenemos que avanzar 5 cifras a la derecha desde la coma para conseguir nuestro número inicial.

La notación científica de 0,0024 es $0{,}24 \cdot 10^{-2}$

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso
Es falso, porque para que un número esté escrito en notación científica, la parte entera debe ser un número de 1 a 9, y en este caso es 0.

$(4{,}5 \cdot 10^6) \cdot (2 \cdot 10^{-10}) = 9 \cdot 10^{-4}$
Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Verdadero

$(8{,}1 \cdot 10^{78}) : (2{,}7 \cdot 10^{14}) = 3 \cdot 10^{92}$
Sugerencia

◯ Verdadero ◯ Falso

Falso

Al igual que en el tema anterior de aritmética, es muy importante que adquieras soltura en el cálculo y que siempre optes por la notación adecuada. Todo esto se consigue teniendo en cuenta unos principios fundamentales y practicando mucho. Por ello, te ofrecemos a continuación un pequeño esquema de lo que no debes olvidar y unos **enlaces donde encontrarás ejercicios resueltos** para que adquieras soltura. Además puedes amenizarlo todo con algunas curiosidades.

Importante

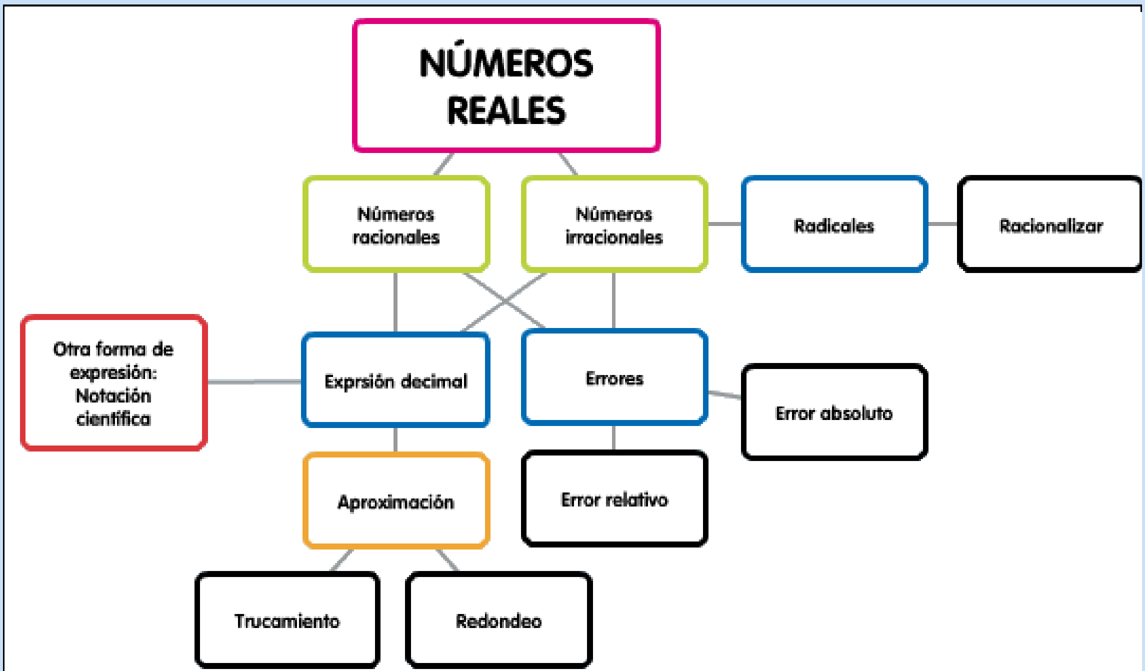


Imagen de elaboración propia

4.1. Calculadora para números reales

Te recordamos que respecto al uso de la calculadora en el temario de la PAU para mayores de 25, se menciona:

"Se podrá utilizar, no intercambiar, calculadora no programable, gráficas o con capacidad para almacenar o trasmitir datos. Su uso debe ser restringido únicamente al cálculo de operaciones numéricas; ***no se tendrá en cuenta un resultado final cuyo valor sea correcto si previamente no se han indicado los pasos conducentes a su obtención****."*

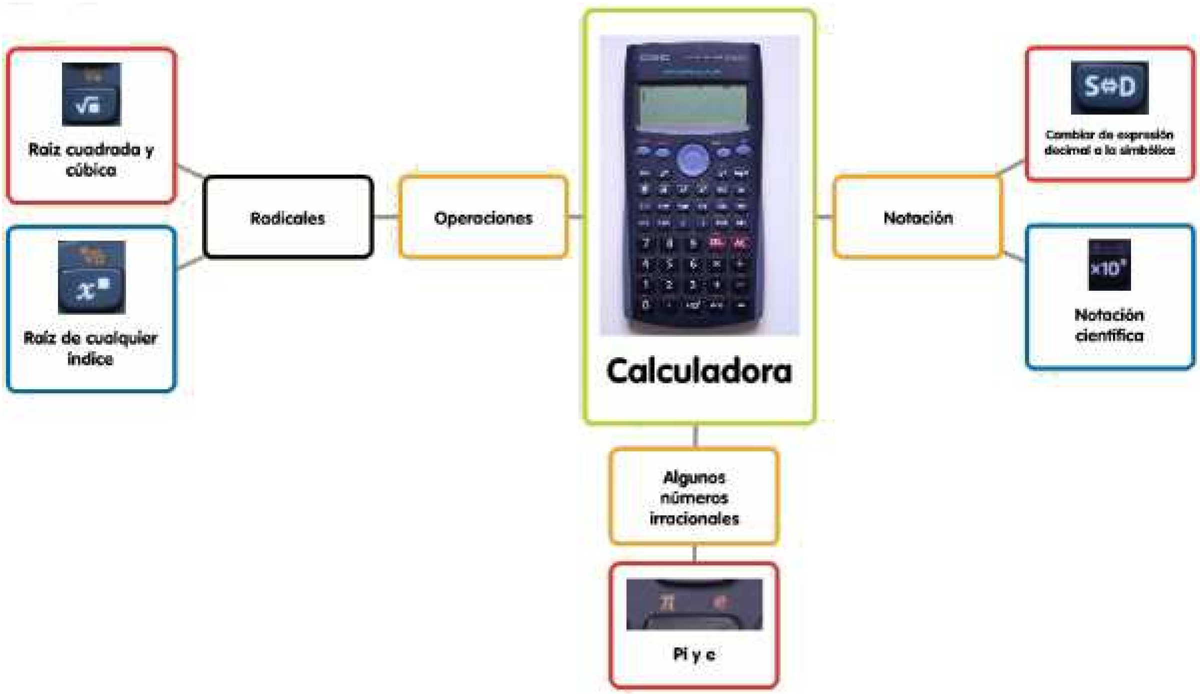


Imagen de elaboración propia

En el caso de que quieras trabajar con esta calculadora pero no la tengas físicamente, te adjuntamos este archivo comprimido con un emulador para el ordenador, para sistemas operativos Windows. Debes descomprimirlo, y guardarlo en alguna ubicación de tu ordenador, a continuación pincha en el fichero ejecutable fx82ES, y listo para trabajar.

Curiosidad

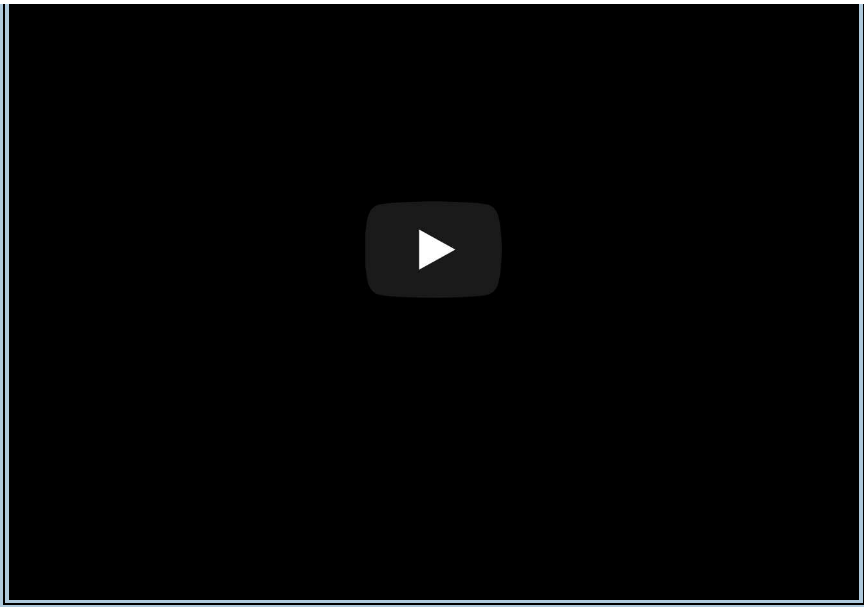
Sobre el nombre de irracional

Los nombres de racionales e irracionales viene de las matemáticas griegas. Racional tiene su origen en razón, que no tiene otro sentido más que proporción o división. Un número racional es el que se puede expresar como proporción de dos números enteros. Por tanto, un irracional es el número que no se puede escribir como el cociente de dos enteros. Para entender mejor la diferencia entre racionales e irracionales, veamos la imagen que propone el profesor Fernando Corbalán: "*si asignamos un sonido a cada cifra y hacemos sonar los decimales de un racional, escucharíamos una melodía que se va repitiendo, como el estribillo de una canción. En el caso de los números irracionales las notas sonarían sin ton ni son, y no podríamos obtener jamás una melodía*".

Curiosidad

Un número muy especial.

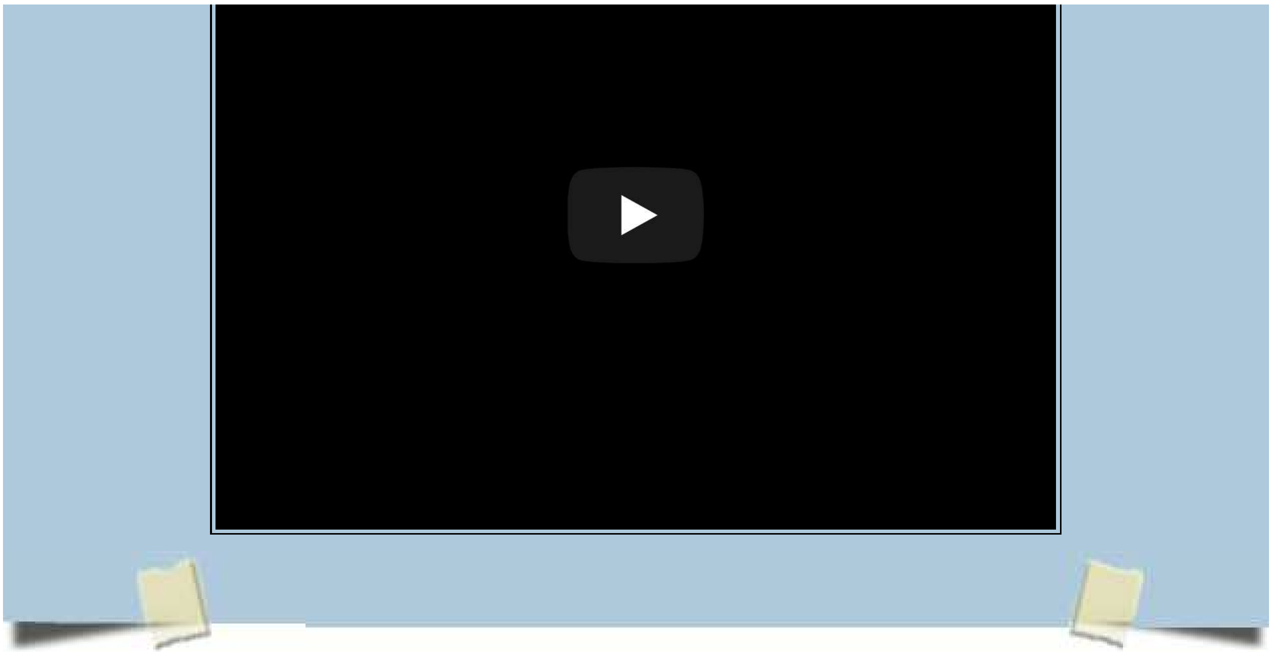
Ya hemos hablado de φ ends la presentación del tema. Este número esconde muchos secretos, relacionados tanto con las matemáticas como con la naturaleza y las artes. En un principio puede parecer un número como otro cualquiera. Está comprendido entre 1 y 2, luego no es muy grande. ¿Qué lo distingue entonces de 1,3 o 1,6? ¿De dónde viene la fascinación por él desde hace miles de años? Veamos antes el siguiente vídeo, a ver si salimos de nuestras dudas.



Curiosidad

Aproximaciones de π

La Tierra donde vivimos, la Luna que gira a nuestro alrededor, el balón alrededor del que giran la mirada y el ocio de millones de aficionados en todo el mundo y multitud de objetos tanto de la naturaleza como creados por el ser humano tienen forma esférica o, utilizando un lenguaje coloquial, son redondos. La rueda, sin duda uno de los grandes inventos de la humanidad, es una circunferencia. El uso de la rueda para el transporte, para girar en las norias y elevar el agua o batir las semillas en los molinos. No nos puede extrañar que desde muy pronto el ser humano se fijara en la circunferencia y se preguntara por la relación que existe entre el perímetro y el diámetro. De esa relación surgió uno de los números más famosos y conocidos por todas las civilizaciones: π . Para convencerte de que es cierto lo que hemos dicho, disfruta de este vídeo:



Para saber más

Potencias y radicales

En este enlace del CIDEAD puedes encontrar un resumen sobre potencias y radicales y muchos ejercicios con sus soluciones. Además en esta otra dirección de la wiki del IES Mar de Alborán, puedes encontrar actividades interactivas.

Aproximación y errores

En este enlace del CIDEAD puedes encontrar 3 ejemplos contextualizados del cálculo de errores. Además el último de ellos te permite practicar con distintos casos. También te recomendamos el siguiente pdf con actividades resueltas de aproximaciones y estimaciones.