

Tema 3. Ecuaciones de primer y segundo grado



En nuestra vida cotidiana estamos tan acostumbrados a relacionarnos con los símbolos que los utilizamos sin ser conscientes de ello. Por ejemplo, las señales de tráfico que inundan nuestras calles o la gran variedad de carteles indicadores en comercios o transportes públicos.

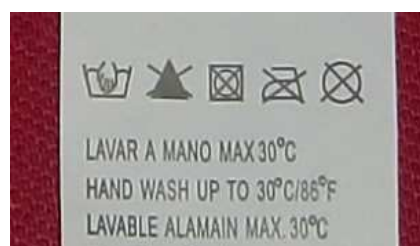


Fuente propia

En el super

Un consumidor responsable y bien informado, debe entender la simbología que aparece en los envases y etiquetas de los distintos productos que utiliza.

Por ejemplo, Alberto acaba de recibir una nueva entrega de artículos para su tienda, y observa cómo con unos cuantos símbolos puede saber el cuidado que necesitan las diferentes prendas.



fuentes propia

En las matemáticas

El objetivo del lenguaje algebraico tiene el mismo sentido: sustituir por símbolos, elementos de la vida cotidiana. Al relacionar dichos símbolos con cantidades conocidas, obtenemos las expresiones algebraicas.

El camino a recorrer entre el lenguaje cotidiano y el algebraico no es tan complicado como puede parecer. En pocas palabras, consiste en sustituir elementos de diversa índole por símbolos. Ya hemos visto anteriormente que lo hacemos continuamente en la vida diaria.

Alberto, en su tienda, está haciendo balance del número de calcetines que tiene en exposición. Y ha anotado en su cuaderno lo siguiente: $3b + 7n + 5m$, con ello tiene la información de que dispone en ese momento de 3 pares de calcetines blancos, 7 negros y 5 marrones.



Fuente propia

De esa forma, con unos pocos símbolos puede tener la información completa. Como veremos más adelante, si sustituimos las letras que aparecen por el precio de cada par de calcetines, puede saber exactamente cuánto puede ganar si los vende todos.

La parte de la matemática que estudia este tipo de expresiones se llama **ÁLGEBRA**. Como podrás ver en este tema, es una poderosa herramienta para resolver problemas.

Reflexiona

Poco se sabe de la vida de Diofanto, pero sí es posible conocer la duración de la misma gracias al epitafio que dejó escrito sobre su tumba.

" Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad ."

¿Sabrías escribir en lenguaje algebraico la expresión que ayuda a saber los años que vivió Diofanto? Utiliza x para representar la edad de Diofanto.

1.1 Planteamiento general



Alberto salió de compras acompañado de su socio. Llevaba en la cartera 300 euros, y a su regreso sólo le quedaban 120. La compra la había pagado a medias con su socio; se trataba de botes de pintura para adecentar el almacén. Cada lata les había costado 12 euros. El transporte les había costado 36 euros, que también pagaron a medias. Quería Alberto saber cuántas latas de pintura habían comprado. Y no teniendo ganas de bajar al almacén para contarlas, anotó en una hoja la siguiente expresión:



$$\frac{12x+36}{2} = 300-120$$

Ejercicio resuelto

Vamos a aplicar la simbolización algebraica al problema de Alberto que hemos visto antes. Vamos a seguir los pasos y ver qué expresión obtenemos. Como el número de latas no lo conozco, lo voy a representar por un símbolo, en este caso la letra x.

Lenguaje cotidiano	Lenguaje algebraico
Nº de latas	x
12 € por lata. El costo del lote es	12x
Mas 36 € del transporte	12x+36
Alberto puso la mitad, el gasto es	(12x+36)/2
Por otra parte salio con 300 € y lleva 120, se ha gastado	300-120
Ambas cantidades deben de coincidir, es decir	(12x+36)/2=300-120

Importante

simbólicamente mediante una letra (incógnita) se llaman **ecuaciones** (si la incógnita sólo puede tomar determinados valores para que se cumpla la igualdad) o **identidades** (si la incógnita puede tomar cualquier valor).

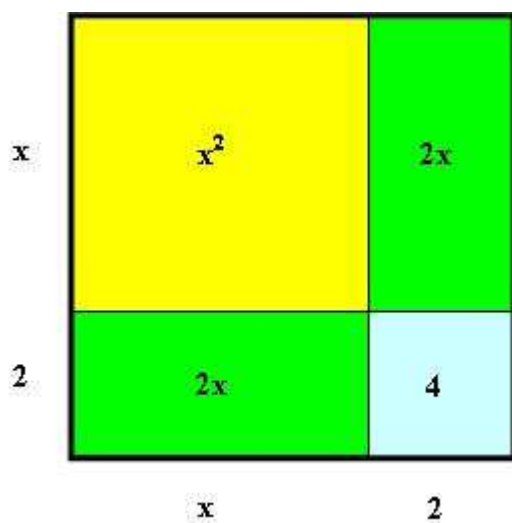
El mayor exponente al que esté elevado la incógnita x , x^2 , x^3 ...se denomina grado de la incógnita. En caso de ser 1 se llaman de primer grado.

Ejemplo $\frac{2x+36}{2} = 300 - 120$

Si el mayor grado de la incógnita es 2, segundo grado.

Ejemplo $\frac{2x+36}{4} = 300x^2$

Veamos ahora un ejemplo importante de identidad (igualdad que se cumple sea cual sea el valor que tome la incógnita).



La expresión $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ es verdadera cualquiera que sea el valor de x , y responde al hecho de que las expresiones de los dos miembros tienen siempre el mismo valor cuando la x se sustituye por cualquier número.

El primer miembro expresa el área del cuadrado grande, de lado $x+2$. Luego su área será $(x + 2)^2$. El segundo miembro divide el mismo área en cuatro partes: el cuadrado de lado x (la medida de su área, según la geometría, es lado por lado, es decir, x^2), dos rectángulos de lados x y 2 (cuya área conjunta totaliza $4x$), y un cuadrado de lado 2 . Si sumamos las 4 partes obtenemos:

$$x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4.$$

Como el área es la misma, deben coincidir: $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ y se verifica para cualquier x . Por eso es una identidad.

En general, si en vez de 2 sumamos una constante cualquiera a la que llamamos b : $(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$ (es una de las "identidades notables").

Importante

El cuadrado de una suma : $(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$

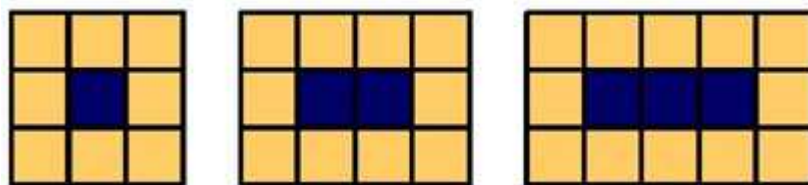
El cuadrado de una diferencia: $(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$

La diferencia de cuadrados: $x^2 - b^2 = (x + b)(x - b)$

(La tendrás memorizada como "suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados")

Comprueba lo aprendido

La calle donde se encuentra la tienda de moda de Alberto ha sido peatonalizada recientemente por el Ayuntamiento. Alberto observa el diseño que están utilizando para la solería de la calle. Como puedes apreciar en el dibujo, se compone de filas de losetas azules rodeadas por losetas naranjas.



¿Cuántas losetas naranjas se necesitarían para rodear "n" losetas azules?

☐

a) $3 \cdot n + 6$

☐

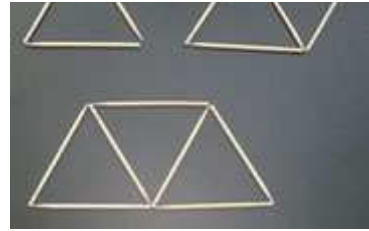
b) $6 + 2 \cdot n$

☐

c) $2 \cdot n$

Comprueba lo aprendido

tranquila. Para entretenerse, Alberto está jugando con un puñado de palillos que se ha encontrado en la trastienda. Se ha dedicado a construir triángulos siguiendo el patrón que puedes ver en la siguiente imagen.



Alberto quiere saber cuántos palillos necesitará para construir "n" triángulos. Señala todas las opciones que expresen dicho valor.

☐

a) $3 \cdot n$

☐

b) $3+2 \cdot n$

☐

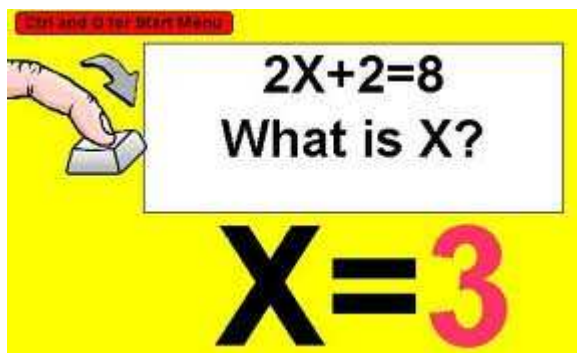
c) $2 \cdot n+1$

☐

d) $3+3 \cdot (n-1)$

Mostrar retroalimentación

1.2. Resolución de una ecuación de primer grado



auladeintegracion08.blogspot.com

Bajo licencia de Creative Commons

Vamos a ver los pasos generales a seguir en la resolución de ecuaciones de primer grado:

1º) Eliminación de paréntesis (cuidado con los signos menos antes del paréntesis)

$$x - \frac{3x}{4} = \frac{1}{3} \cdot (2x - 1) + \frac{x}{6}$$
$$x - \frac{3x}{4} = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} + \frac{x}{6}$$

2º) Eliminar denominadores. Se calcula el m.c.m. y este se divide por cada uno de los denominadores multiplicando cada resultado por el numerador correspondiente.

Ejemplo:

$$x - \frac{3x}{4} = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} + \frac{x}{6}$$
$$\text{mcd}(3, 4, 6) = \text{mcd}(3, 2^2, 2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Multiplicando la ecuación al completo por 12

$$12 \cdot x - \frac{12 \cdot 3x}{4} = \frac{12 \cdot 2x}{3} - \frac{12 \cdot 1}{3} + \frac{12 \cdot x}{6}$$
$$12x - 3 \cdot 3x = 4 \cdot 2x - 4 + 2x$$

3º) Operar: $12x - 9x = 8x - 4 + 2x$

4º) Transposición de términos. Pasar las "x" a un miembro y los términos sin "x" al otro. (recuerda que lo que está en un término, pasa al otro con signo contrario)

$$12x - 9x - 8x - 2x = -4$$

5º) Se despeja la "x" (El coeficiente de la "x" pasa dividiendo al otro miembro)

$$-7x = -4$$

$$x = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

Ejercicio resuelto

$$\frac{x + 2}{3} = -1$$

Multiplique Cruzado

$$x + 2 = -3$$

Despeje la "x"

$$x = -3 - 2 = -5$$

Alternativa B)

psu-matematicas.blogspot.com

Bajo licencia de Creative Commons

Resuelve la ecuación: $\frac{3x-1}{20} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{4x+2}{15} - 5$

Importante

- Si un término está sumando en un miembro podemos pasarlo al otro restando y viceversa.
- Si un término está multiplicando a todo un miembro de una ecuación se puede pasar al otro miembro dividiendo.



lacunaprf512.wordpress.com

Bajo licencia De CC

Los pasos que debes de seguir para resolver un problema son:

1. Identifica los datos y las incógnitas.
2. Elegir la incógnita, designarla con una letra y expresar los demás datos en función de ella.
3. Plantear la ecuación, traduciendo al lenguaje algebraico la igualdad que exista en el problema.
4. Resolver la ecuación planteada.
5. Comprobar que la solución obtenida cumple la ecuación de partida, para detectar posibles fallos de cálculo.
6. Interpretar los resultados obtenidos en relación al problema.
7. Comprobar los resultados obtenidos con el enunciado del problema.

Ejercicio resuelto



jesmanzan.com

Bajo licencia de Creative Commons

a) Si a un número se le resta 1 el resultado es dos veces mayor que restandole 10. ¿de qué numero se trata?

Solución:

El número es "x". Restando 1 $x-1$ es el doble $2(x-10)$; igualando $x-1=2(x-10)$.

Resolviendo $x-1=2x-20$, por tanto despejando $x=19$. Veamos que la solución es la correcta.

Si a 19 le restamos 1, nos queda 18 y es el doble de $19-10=9$.

b) La edad del padre es de 32 años y el hijo, 8. ¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

Solución:

Si el tiempo que ha de transcurrir es x , cuando transcurra x años el padre tiene $32+x$ y el hijo $8+x$. Como el la del padre es el doble que la del hijo, queda la ecuación $32+x=2(x+8)$; resolviendo

$x+32=2x+16$; $x=16$ años. Comprobemos, dentro de 16 años las edades son 48 y 24 respectivamente

se comprueba que el padre duplica en edad al hijo.

c) ¿Cuántos años vivió Diofanto? (Recuerda el problema planteado en el apartado 1)

Comprueba lo aprendido

1) Hallar un número que restándole 2 se obtiene como resultado el doble de la resta del número y 3.

La ecuación que resuelve el problema es:

☐

b) $x-2=2x-3$

☐

c) $x-2=2(x-3)$

2) La solución al problema anterior es:

☐

a) $x=5$

☐

b) $x=7$

☐

c) $x=4$

2. Ecuaciones de segundo grado



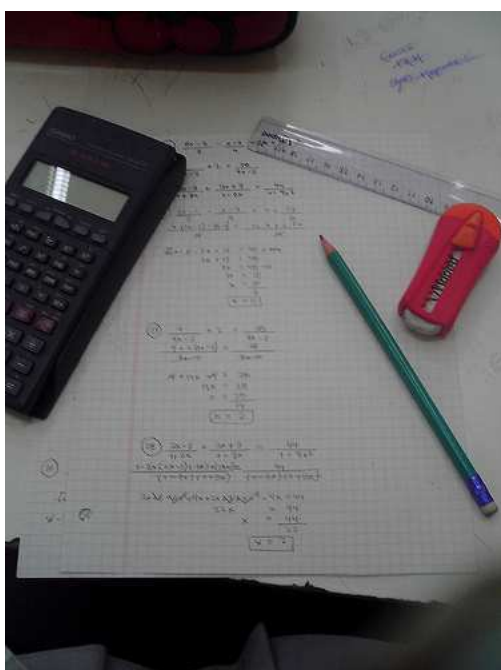
Muchos problemas no se pueden expresar en términos de una sola incógnita. Aparece entonces el estudio de los sistemas, que verás posteriormente.

E igualmente muchos problemas, aunque se reduzcan a una sola incógnita, no se pueden expresar en ecuaciones de primer grado.

Podrás observar que los dos procedimientos básicos (sumar, restar, multiplicar o dividir en los dos miembros de la ecuación; calcular algún término a partir del resultado conocido de una operación) se utilizan no sólo en las ecuaciones de primer grado. Son los dos instrumentos básicos para la resolución de ecuaciones en general.

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \eta} \\ \mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \eta} &= -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} \\ \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} &= 0 \\ \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned}$$

En este tema solamente estudiarás, además de las ecuaciones lineales o de primer grado, las de segundo grado o que se reducen a ellas por las transformaciones que venimos viendo. Las ecuaciones de segundo grado se suelen llamar cuadráticas (como las de tercer grado se llaman cúbicas, etc)



Flirck. Licencia CC

Hay muchas ecuaciones que no se reducen a ninguno de los tipos anteriores. En este curso verás algunas de ellas.

2.1. Ecuaciones completas



Las ecuaciones de segundo grado se resuelven por procedimientos análogos, aunque ya sabes que en la mayoría de los casos se resuelven automáticamente aplicando una fórmula, "la fórmula".

Una ecuación de segundo grado se expresa de la forma con $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

y se resuelve con la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

es decir una solución es $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

y la otra $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$



Sólo tienes que tener cuidado en sustituir los coeficientes de la ecuación y hacer operaciones. Ten especial cuidado con la regla de los signos. (si b es negativo, entonces $-b$ es positivo, etc)

Pero no siempre es necesaria (ni aconsejable) la fórmula. O en otras ocasiones tendrás que elaborar la expresión antes de aplicarla.

Importante

Se llama discriminante de una ecuación de segundo grado $\Delta = b^2 - 4ac$ y dependiendo de su signo la ecuación tiene:

- dos soluciones distintas si $\Delta > 0$
- dos soluciones iguales si $\Delta = 0$
- no tiene soluciones reales en otro caso

Ejercicio resuelto

Resolver las ecuaciones que siguen

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$

c) $x^2+2x+4=0$ es una ecuación que no tiene soluciones.

Comprueba lo aprendido

Las soluciones de las ecuaciones son:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$



a) 3 y 4



b) 4 y 5



c) No tiene solución real

b) Al resolver la ecuación $x^2 - 9 = 0$ las raíces que obtenemos son:



a) 0 y 2



b) 3 y 0



c) 3 y -3

c) Las raíces de la ecuación $x^2 - 2x = x$ son:

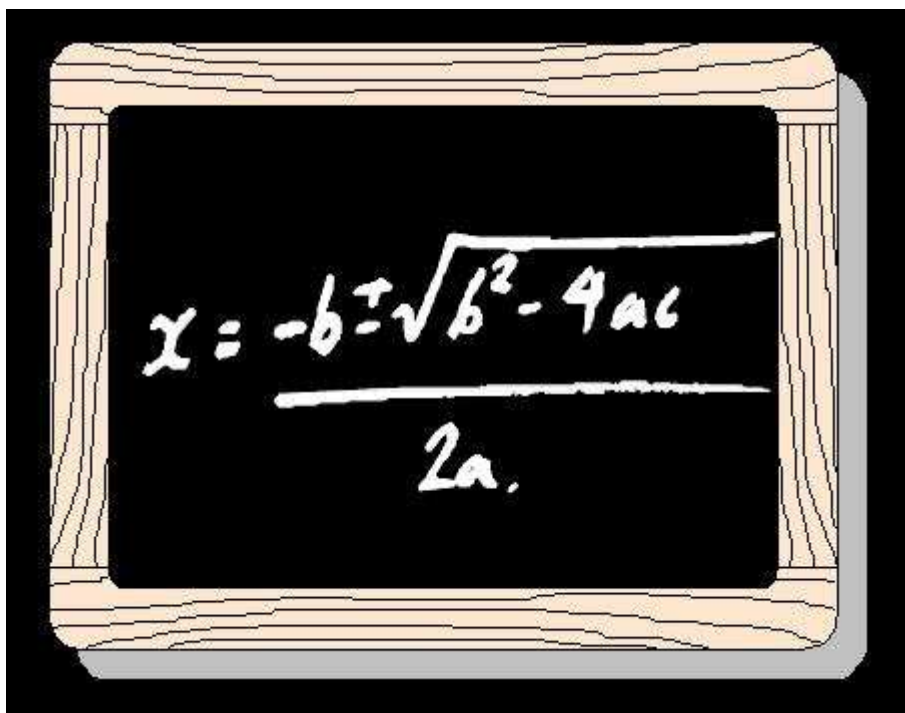


a) 0 y 2

b) $3 \leq 0$



c) $0 \leq -3$



www.juntadeandalucia.es

Bajo licencia de Creative Commons

Como ya hemos visto una el trinomio $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una formula general para resolverlas. Pero en aquellas que llamaremos incompletas, es decir cuando $b=0$ o $c=0$, conviene o es mas rapido por otros procedimientos particulares.

Vamos a estudiar los casos siguientes:

Tipo 1: $ax^2 + bx = 0$

Tipo 2: $ax^2 + c = 0$

Tipo 3: $(x+e)(x+r) = 0$

Ejercicio resuelto

Las ecuaciones de segundo grado incompletas admiten una resolución casi inmediata. No te dejes llevar de la tendencia a aplicar siempre "la" fórmula.

a) Resuelve $x^2 + 5x = 0$

b) Halla las soluciones de $x^2 - 7 = 0$

$$x+3=0 \text{ entonces } x=-3$$
$$x-2=0 \text{ y } x=2$$

Comprueba lo aprendido

$x^2+3x=0$ tiene como soluciones:

- 0 y -3
- 0 y 3
- No tiene soluciones
- Tiene infinitas soluciones

$$2x^2-5=0$$

- No puede resolverse por el signo negativo de 5
- No puede resolverse porque 5 no tiene raíz cuadrada exacta
- Una de sus soluciones es 0
- tiene como soluciones las raíces cuadradas de 2,5

$$(x-2)(x+1)=0$$

- Una de sus soluciones es -2
- Una de sus soluciones es 1

- Tiene como soluciones 2 y -1

ENVIAR RESPUESTAS



notenemosnadaqhacer.blogspot.com

Bajo licencia de Creative Commons

El problema de los grifos (regla inversa):

Un estanque se llena con un grifo en x_1 horas, con un segundo grifo en x_2 y así sucesivamente. ¿cuanto tardara con todos a la vez? La ecuacion se plantea con la siguiente expresion:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$$

Ejemplo 1: Un grifo tarda en llenar un deposito 3 horas, otro solo necesita 2 horas ¿Cuanto tiempo emplearan los dos a la vez?

La ecuacion planteada sera siendo x el tiempo total empleado por ambos

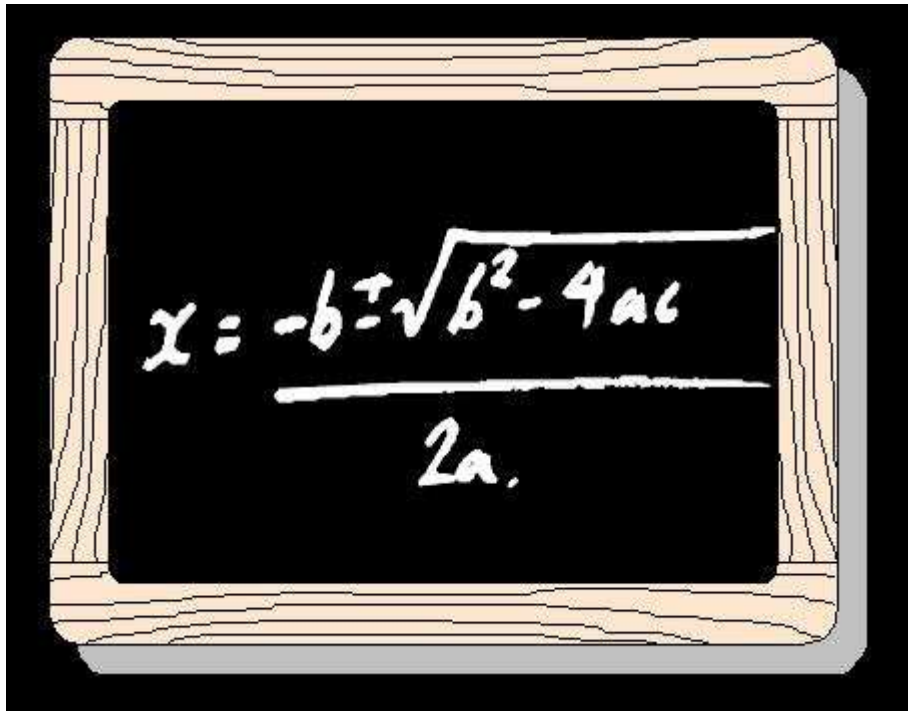
$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ mcm(x, 2, 3) &= 6x \\ 6 &= 2x + 3x \\ 5x &= 6 \\ x &= \frac{6}{5} = 1.2 \text{ horas} \\ &1 \text{ hora y } 12 \text{ minutos}\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Un obrero necesita 9 horas mas para terminar el trabajo solo que otro compañero, pero si lo hacen juntos el tiempo se reduce en 3 horas respecto al que menos tarda. ¿Cuanto se tarda?

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-3} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} \\ mcm(x-3, x, x+9) &= x(x-3)(x+9) \\ x(x+9) &= (x-3)(x+9) + x(x-3) \\ \text{operando queda } x^2 - 6x - 27 &= 0 \\ \text{es decir } x_1 &= 9 \quad x_2 = -3\end{aligned}$$

Un obrero tarda 9 horas, el otro 18 y en total lo harian juntos en 6 horas (la solucion negativa no se tiene en cuenta)

Ejercicio resuelto


$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1) Para vallar un terreno rectangular de 3000 m^2 se ha necesitado 220 metros de cerca. Calcula las dimensiones del terreno.