

Ordenamos y mejoramos la información: ¿Y si ponemos un poco de orden?

Estimada alumna, estimado alumno.

Si estás leyendo esto es porque has superado el primer curso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Esto significa que estás muy cerca de terminar el bachillerato.

Comenzamos aquí este segundo curso, estamos seguros de que contamos con tu esfuerzo y dedicación y nos tendrás a tu disposición para ayudarte en aquello que quieras preguntarnos.

En este primer tema, tal como aparece en el título, vamos a empezar a ordenar y sobre todo a simplificar la información que recibimos. Hoy en día se usan tablas numéricas y diversos gráficos en muchos órdenes de la vida, no tienes más que abrir un periódico e ir repasando las distintas secciones:



Galería de imágenes

Plan de inversión 2014-2015

| Región | Presupuesto | Realización | Diferencia |
|----------------------|-------------|-------------|------------|
| Madrid | 1.200.000 | 1.150.000 | -50.000 |
| Cataluña | 800.000 | 780.000 | -20.000 |
| Valencia | 500.000 | 480.000 | -20.000 |
| País Vasco | 300.000 | 290.000 | -10.000 |
| Galicia | 200.000 | 190.000 | -10.000 |
| Castilla-La Mancha | 150.000 | 140.000 | -10.000 |
| Extremadura | 100.000 | 90.000 | -10.000 |
| Canarias | 80.000 | 70.000 | -10.000 |
| Baleares | 60.000 | 50.000 | -10.000 |
| Comunidad Valenciana | 40.000 | 30.000 | -10.000 |
| Castilla y León | 30.000 | 20.000 | -10.000 |
| La Rioja | 20.000 | 10.000 | -10.000 |
| Navarra | 10.000 | 0.000 | -10.000 |

| Acción | Precio | Variación |
|----------------------------|--------|-----------|
| Inditex | 12.500 | +0,50 |
| Industria de Diseño Textil | 12.500 | +0,50 |
| Industria de Diseño Textil | 12.500 | +0,50 |
| Industria de Diseño Textil | 12.500 | +0,50 |
| Industria de Diseño Textil | 12.500 | +0,50 |
| Industria de Diseño Textil | 12.500 | +0,50 |
| Industria de Diseño Textil | 12.500 | +0,50 |
| Industria de Diseño Textil | 12.500 | +0,50 |
| Industria de Diseño Textil | 12.500 | +0,50 |
| Industria de Diseño Textil | 12.500 | +0,50 |

TEMPERATURAS PARA HOY

| Ciudad | Temperatura |
|----------------------|-------------|
| Madrid | 15-20 |
| Cataluña | 14-19 |
| Valencia | 13-18 |
| País Vasco | 12-17 |
| Galicia | 11-16 |
| Castilla-La Mancha | 10-15 |
| Extremadura | 9-14 |
| Canarias | 8-13 |
| Baleares | 7-12 |
| Comunidad Valenciana | 6-11 |
| Castilla y León | 5-10 |
| La Rioja | 4-9 |
| Navarra | 3-8 |

SUDOKU

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 9 | 5 | 1 | 6 | 2 |
| 6 | 1 | | 3 | | 8 |
| 4 | | 8 | 9 | | 5 |
| 2 | | 7 | | 6 | 4 |
| | 4 | 6 | 2 | 9 | 3 |
| 6 | | | 1 | | |

- Hay artículos que vienen ilustrados con tablas numéricas sobre las que apoyan su información.
- En la sección de economía encontraremos los datos sobre la bolsa ordenados en tablas numéricas.
- La clasificación de los equipos de fútbol o baloncesto viene en una completa tabla con datos de punto, partidos ganados, perdidos, anotación, ... en la sección de deportes.
- En las predicciones meteorológicas tenemos una tabla con los datos de las temperaturas del día anterior y los máximos y mínimos previstos para ese día organizados por capitales de provincia.
- En la sección de pasatiempos encontramos el SUDOKU, un pasatiempo de

moda consistente en colocar los números del 1 al 9 de una determinada forma en una tabla.



Imagen de [mackarus](#) bajo licencia Creative Commons

En nuestra vida cotidiana podemos ver muchas cosas que nos pueden parecer de lo más normal, carreteras, líneas telefónicas, líneas de televisión por cable, el transporte colectivo (autobuses, aviones, metro, trenes), los circuitos eléctricos de nuestras casas, las redes informáticas ,... Lo que no pensamos frecuentemente es que estos forman parte de algo que en matemáticas se denomina como grafos.

Una de las aplicaciones más importantes es la de hallar el camino más corto a un destino, y para esto es especialmente importante simplificar la información de las comunicaciones

que existen entre los distintos lugares.

Fíjate en el siguiente [video](#) y en lo que se puede y se llega a aplicar las matemáticas:

Del mismo modo que se muestra en el anterior vídeo, se pueden responder preguntas como ¿por qué camino se tarda menos tiempo?, ¿cuál es el camino más corto?...

Cuestiones como estas son las que intentaremos resolver a lo largo de este tema.

1. La sociedad de la información

Hoy en día nuestra sociedad se ha convertido en la sociedad de la información. Estamos inundados de datos.

Las listas del paro, los clientes de una determinada empresa, los estudiantes de un determinado centro escolar, etc. Estas listas son susceptibles de ser transformadas en datos numéricos.

Organizar la información en tablas nos ayudará a realizar cálculos con estos datos de forma más fácil.

Existen aplicaciones informáticas que nos permiten la ordenación, búsqueda y localización de estos datos que se encuentran en grandes listas, y serán las matemáticas las que nos ayuden en esta ardua tarea.

Curiosidad



| | | | |
|----|----|----|----|
| 1 | 14 | 14 | 4 |
| 11 | 7 | 6 | 9 |
| 8 | 10 | 10 | 5 |
| 13 | 2 | 3 | 15 |

Cuadrado mágico en la Sagrada familia.
Barcelona.

Un cuadrado mágico es la disposición de una serie de números enteros en un cuadrado de tal forma que la suma de los números por columnas, filas y diagonales principales sea la misma, la constante mágica.

Habitualmente los números empleados para rellenar las casillas son consecutivos, de 1 a n^2 , siendo n el número de columnas y filas del cuadrado mágico.

En este caso el autor, Antoni Gaudí, se ha permitido disminuir los números 16 y 12 en dos unidades, convirtiéndose en el 14 y el 10, duplicando estos números y consiguiendo que la constante mágica sea 33.

Algunos autores indican que esto puede ser debido a la pertenencia del famoso artista a una secta masónica.

Ejercicio resuelto

Especifica dos situaciones de la vida cotidiana en las que nos encontremos con tablas numéricas.

1.1. Ordenando los datos

En nuestra empresa TRANS VELOX usan las tablas numéricas a diario. Vamos a ver dos ejemplos de como las utilizan.

Aquí tenemos una lista con la asignación de conductores (cada conductor tiene asignado un número) a las rutas del día:

Rutas del día 02/03/2010

| Ruta 1 | Ruta 2 | Ruta 3 | Ruta 4 | Ruta 5 | Ruta 6 | Ruta 7 | Ruta 8 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 3 | 7 | 8 | 4 | 2 | 10 | 5 | 9 |



La lista nos indica qué conductor está asignado a cada ruta.

La ruta 1 la tiene asignada el conductor 3, es decir, $a_1 = 3$; la ruta 2 la hace el conductor número 7, es decir, $a_2 = 7$; y así sucesivamente.



Indica que conductores realizan las siguientes rutas:

El conductor asignado a la ruta 5 es $a_5 = \square$.

La ruta 3 la realiza $a_3 = \square$.

$a_7 = \square$

$a_4 = \square$

Enviar

Veamos ahora este cuadro en el que se hace un estudio del reparto de paquetes según provincia y peso:

| | Hasta 100 gr | 100 gr - 500 gr | 500 gr - 2 kg | Mayor de 2 kg |
|---------|--------------|-----------------|---------------|---------------|
| Cádiz | 120 | 150 | 155 | 98 |
| Córdoba | 40 | 90 | 100 | 35 |
| Huelva | 92 | 78 | 112 | 49 |
| Sevilla | 150 | 130 | 185 | 135 |



Imagen de [zaido](#) con licencia Creative Commons

En esta tabla, cada fila (línea horizontal) corresponde a los datos de una ciudad, y en ella se registra el número de paquetes que se han repartido de cada categoría.

Cada columna (línea vertical) determina el peso del paquete: de 0 a 100 gramos, entre 100 y 500 gramos, de 500 gramos a 2 kilos y los que pesan más de 2 kilos.

Comprueba lo aprendido **últiple**

Utiliza la tabla anterior para responder las siguientes preguntas:

¿Cuántos paquetes de hasta 100 gr. se han repartido en la ciudad de Cádiz?

☐

120

92



155



135

¿En qué ciudad se han repartido 49 paquetes mayores de 2 Kg?



Huelva



Cádiz



Córdoba



Sevilla

¿En Huelva se han repartido 112 paquetes con un peso de ...?



Hasta 100 gr.



Entre 100 gr. y 500 gr.

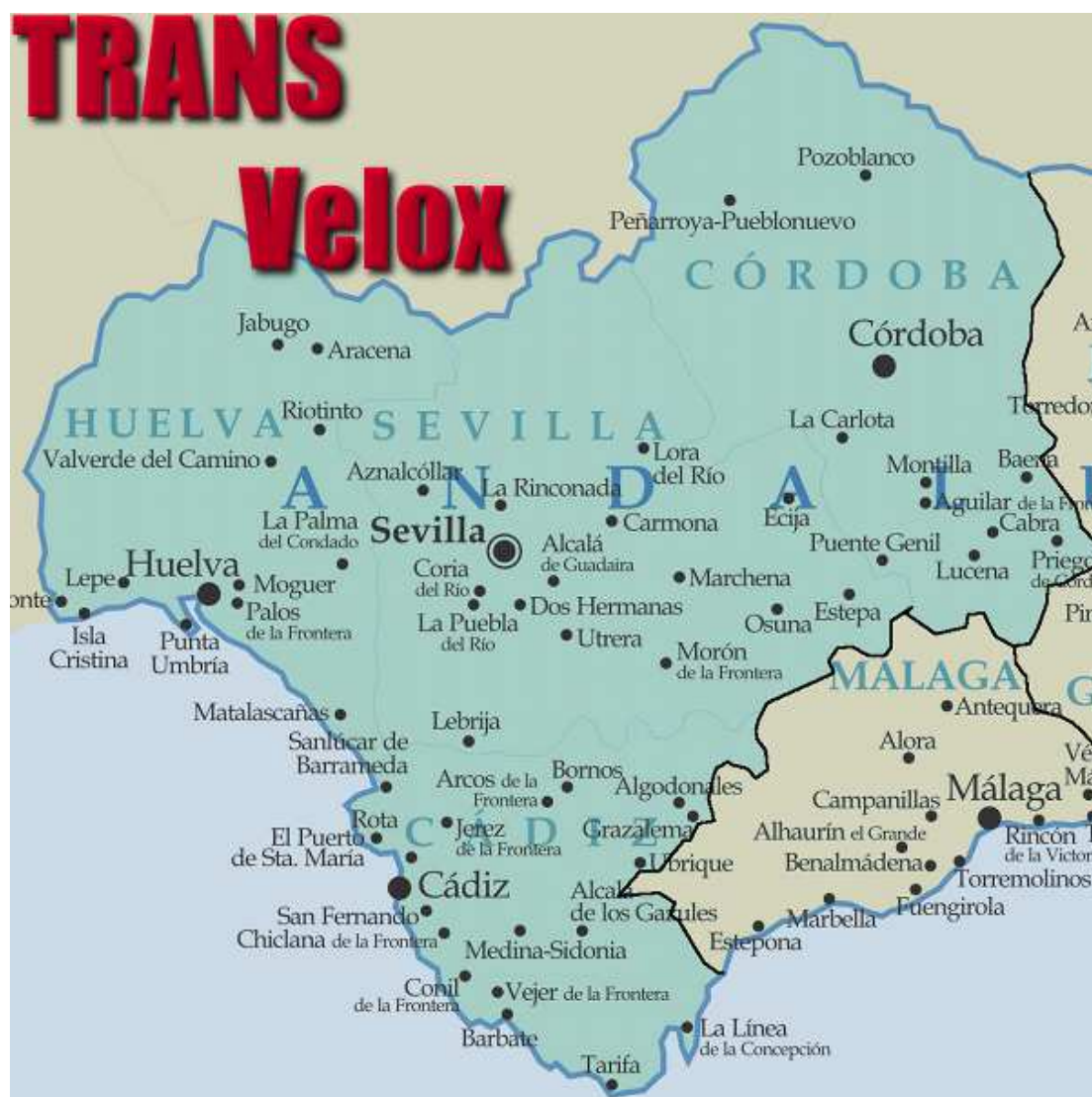


Entre 500 gr. y 2 kg.



Mayores de 2 kg.

1.2. Vamos a jugar a los barquitos



Nuestra empresa, TRANS VELOX, está instalada a nivel nacional. En la oficina central de Andalucía Occidental trabajan con la siguiente tabla, con las distancias en kilómetros entre las cuatro capitales de provincia:

| | Cádiz | Córdoba | Huelva | Sevilla |
|---------|-------|---------|--------|---------|
| Cádiz | - | 263 | 219 | 125 |
| Córdoba | 263 | - | 232 | 138 |
| Huelva | 219 | 232 | - | 94 |
| Sevilla | 125 | 138 | 94 | - |

Ejercicio resuelto

En la tabla anterior, teníamos las distancias entre las cuatro capitales de

La información que proporciona la tabla anterior se puede resumir de forma simplificada, mediante la siguiente ordenación:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 263 & 219 & 125 \\ 263 & 0 & 232 & 138 \\ 219 & 232 & 0 & 94 \\ 125 & 138 & 94 & 0 \end{bmatrix}$$

La distancia entre Córdoba (Fila 2) y Sevilla (Columna 4) se representará por $a_{24} = 138$



Una **matriz** de m filas y n columnas es un conjunto de números reales ordenados en filas y columnas. La posición de cada elemento a_{ij} queda determinado por sus dos subíndices: el primero indica la fila y el segundo la columna.

Las matrices suelen representarse como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

que es una matriz con m filas y n columnas. Se dice que es una **matriz de orden $m \times n$** .

Cuando la matriz tiene el mismo número de filas que de columnas se dice que es una **matriz cuadrada**.



La siguiente tabla nos indica las distancias en kilómetros entre las distintas sucursales que la empresa TRANS Velox tiene en la provincia de Sevilla

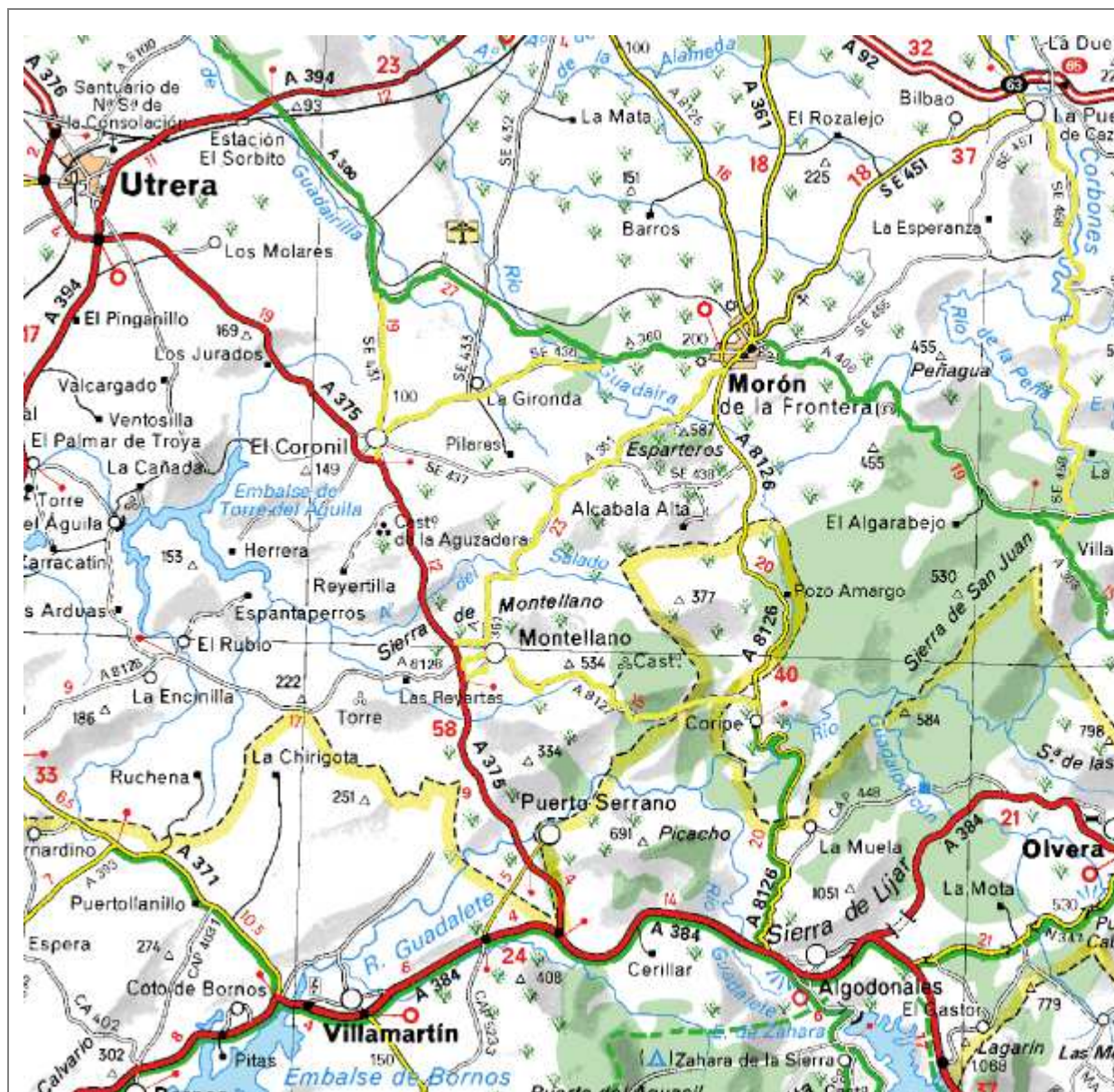
| | Cazalla de la Sierra | Écija | Morón de la Fra. | Pilas | S |
|----------------------|----------------------|-------|------------------|-------|---|
| Cazalla de la Sierra | - | 105 | 131 | 118 | |

| | | | | | |
|------------|-----|-----|-----|-----|--|
| de la Fra. | 131 | 74 | - | 110 | |
| Pilas | 118 | 128 | 110 | - | |
| Sevilla | 80 | 89 | 66 | 39 | |

Escribe la matriz A, asociada a la tabla de distancias e indica los valores de los siguientes elementos de la matriz: a_{13} , a_{22} , a_{35} , a_{41} , a_{54} .

2. Caminante, no hay camino,...

Fijate en la siguiente imagen:



Tenemos un mapa en la que aparece la parte este de la Sierra Sur de Sevilla y de la Sierra Norte de Cádiz.

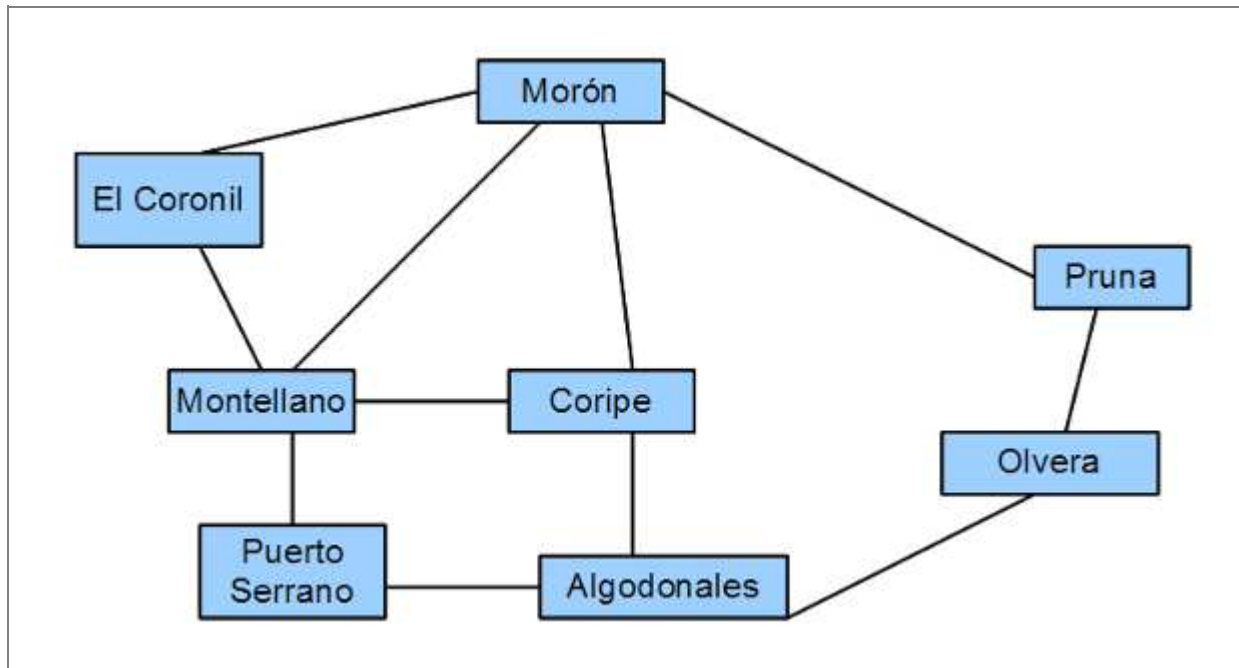
En ese mapa se reflejan localidades, núcleos de población más pequeños, ríos, montañas, carreteras, caminos, embalses, ...

Nuestra empresa Trans VELOX tiene una delegación en Morón de la Frontera y una de las zonas en las que tiene dividida su ámbito de actuación es la que estás viendo en la imagen, es decir, la zona próxima al sur de Morón que está formada por las localidades de El Coronil, Montellano, Coripe, Puerto Serrano, Pruna, Olvera y Algodonales.

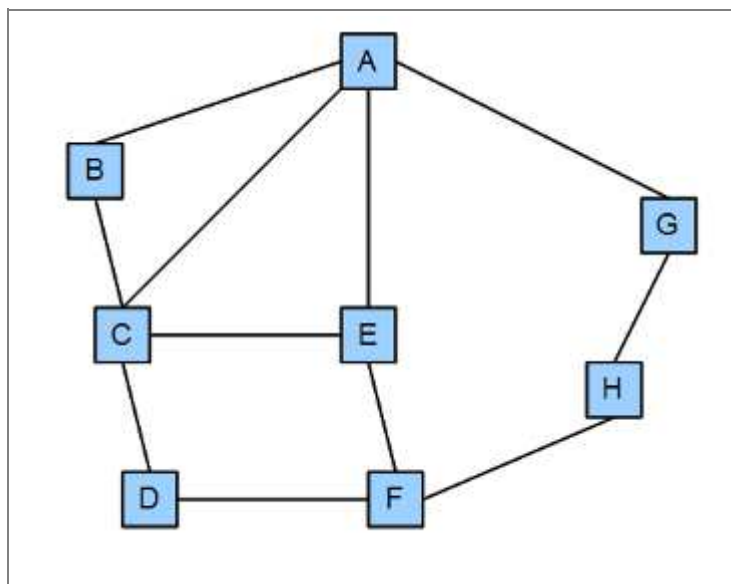
Como te puedes imaginar, a la empresa de transporte hay mucha información que no le interesa, que no utiliza para nada. Por ejemplo, que la Sierra de Esparteros tenga 587 m de altitud o que el río próximo a Olvera sea el Guadalporcún no influye demasiado en sus itinerarios de repartos. Lo que verdaderamente les importa son las carreteras que existen en esa zona y cómo se comunican unos pueblos con otros.

Así que, a efectos prácticos, podíamos hacer un nuevo mapa en el que sólo se reflejaran las localidades y las carreteras que las comunican.

¿Qué te parece este?



O incluso mejor, si a cada pueblo le damos una clave, todavía quedaría más simple. ¿Qué tal así?



Un grafo es una representación de un conjunto de elementos (en el ejemplo, los pueblos) y de las relaciones que guardan entre sí esos elementos (las

A los elementos se les llaman **vértices** y a las líneas que muestran la relación, **aristas**.

Curiosidad

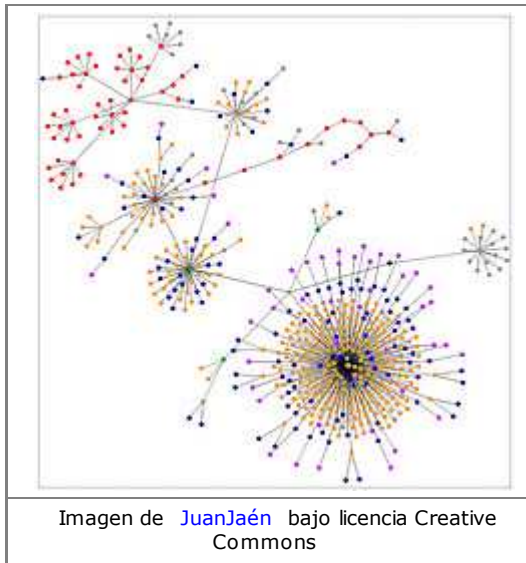
Los grafos se utilizan para resolver numerosas situaciones reales: problemas relacionados con tráfico aéreo, de transporte de mercancías, con envíos postales, de distribución de gas o electricidad, problemas de información en redes de ordenadores.

Pero también son una herramienta eficaz en otras disciplinas de la ciencia como en genética, arqueología e ingeniería. Los grafos, se utilizan para diseñar los programas que rigen el funcionamiento de los cajeros automáticos, puntos de información en grandes ciudades, e incluso en el diseño de páginas web.



Imagen de [stee](#) bajo licencia Creative Commons

2.1. Lo simplificamos todo



En el apartado anterior hemos visto como podemos simplificar la información que nos aporta un mapa construyendo un grafo que nos muestre sólo lo que nos interesa. Pero aún podemos simplificarlos más. Podemos olvidarnos de todas las líneas y convertir el gráfico de vértices y aristas en una matriz.

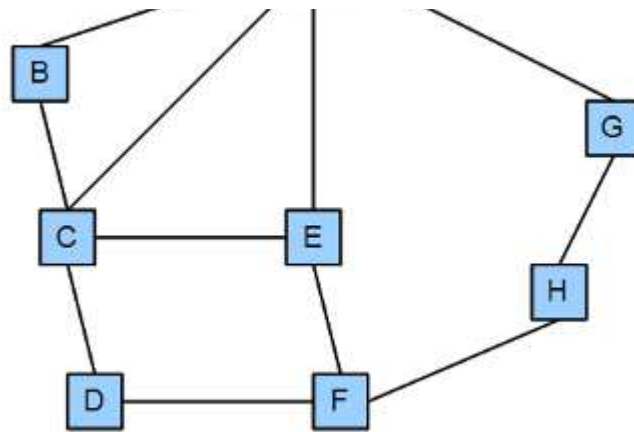
Sí, en una matriz, como las que has visto en el apartado anterior con las tablas. O lo que es lo mismo, cambiar líneas por números. Y claro, como veremos en el siguiente tema, si hay números, seguramente se podrán hacer operaciones con esos números o con esas matrices.

Importante

Se llama **matriz de adyacencia** de un grafo a la matriz cuyos elementos son 0 y 1, donde 1 indica que existe un camino para ir del vértice que ocupa la fila al vértice que ocupa la columna y 0 que no existe tal camino.

Ejercicio resuelto

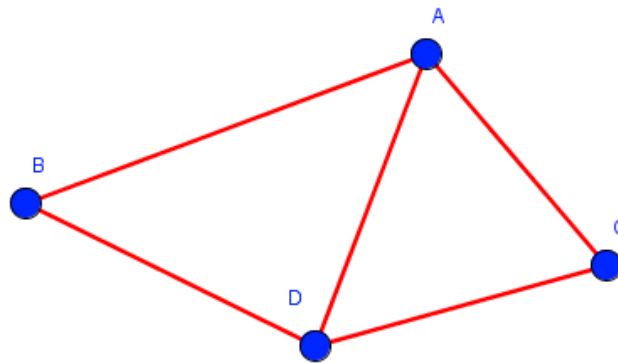
Vámonos otra vez al mapa de distribución de nuestra empresa TRANS VELOX. El grafo lo habíamos simplificado así:



¿Cuál es la matriz de adyacencia?

Reflexiona

La matriz de adyacencia de este grafo es:



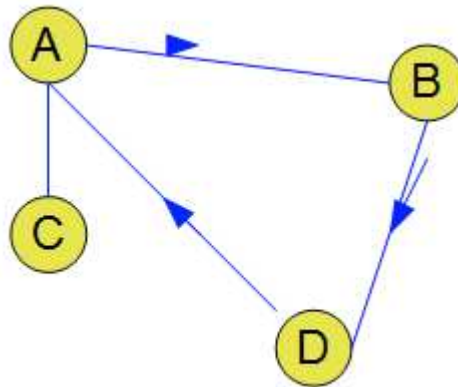
Curiosidad

sentido o algunas en un sentido y otras en el doble. Si piensas en las carreteras no le encuentras la lógica, pues la carretera está ahí para ir de Montellano a Coripe o de Coripe a Montellano, pero piensa por ejemplo en una cadena de montaje, tras colocar una pieza, después se coloca la otra, pero la segunda no se puede colocar antes que la primera, es decir, la línea que uniría la primera con la segunda sólo se podría recorrer en el sentido de la primera a la segunda.



Imagen de jaenpedia.es bajo licencia Creative Commons

En los grafos esto se representa con una flechita que indica la dirección, como por ejemplo en este que sigue:



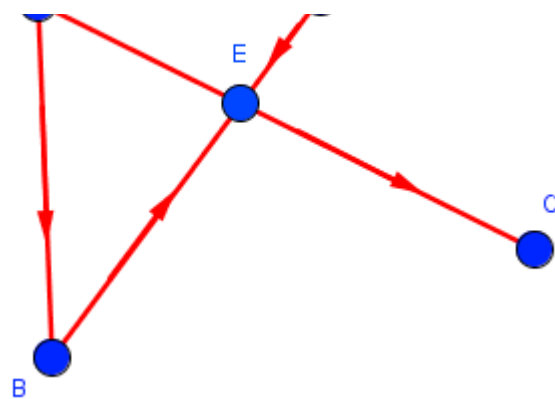
En este grafo podemos ir de A a B pero no al revés, de B a D pero no al revés y de D a A pero no al revés. De A a C sí podemos ir en el doble sentido.

La matriz de adyacencia sería:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reflexiona

Encuentra la matriz que le corresponde a este grafo. Ten en cuenta ahora que el grafo es orientado:



3. ¿Le sacamos partido al grafo?

La teoría de grafos se ha utilizado a menudo para optimizar problemas de la vida cotidiana.

Uno de estos problemas fue el que se encontró nuestro amigo Juan, cuando llevaba poco tiempo trabajando en TRANS VELOX.

Tenía que llevar un paquete urgente desde Sevilla hasta Cádiz, pero antes debía hacer una parada en Utrera, y para poder estar pronto de regreso a Sevilla, tuvo que plantearse cuál era el camino en el que iba a emplear menos tiempo.



Después de buscar en mapas de carreteras la distancia que había entre las distintas localidades y el tiempo aproximado que tardaría desde Sevilla hasta Utrera y desde Utrera hasta Cádiz y comparar los resultados con el tiempo que podía emplear si tomaba otras carreteras secundarias, como por ejemplo pasando por Montellano, o a través de Los Palacios y Villafranca, tuvo una genial idea.

Durante el verano, Juan había conocido en la playa de Marbella, a una matemática que se llamaba María, y tomando un refresco con ella en un chiringuito, bajo la luz de la luna, le había hablado de "Los puentes de Königsberg", un curioso problema, que resolvió un matemático llamado Euler en el siglo XVIII, utilizando lo que ellos llaman "Teoría de Grafos".

Todo lo que le contó, ahora podía servirle para resolver su problema del camino más corto y se puso manos a la obra.

Más adelante, profundizaremos en este problema.

3.1. El camino más corto

En la Teoría de Grafos, uno de los problemas más conocido es el del camino más corto.

El problema consiste en encontrar un camino entre dos vértices (o nodos) de tal manera que la suma de los pesos de las aristas que lo constituyen es mínima.

Para nosotros, los vértices serán poblaciones y los pesos de las aristas el tiempo que empleamos en desplazarnos de un sitio a otro.

La empresa TRANS VELOX es experta en resolver este tipo de problemas, ya que Juan en su juventud, aquel encuentro en la playa con María la Matemática, dio mucho de sí y siempre atento, aprendió mucho de ella, durante los 15 días que pasó en Marbella.

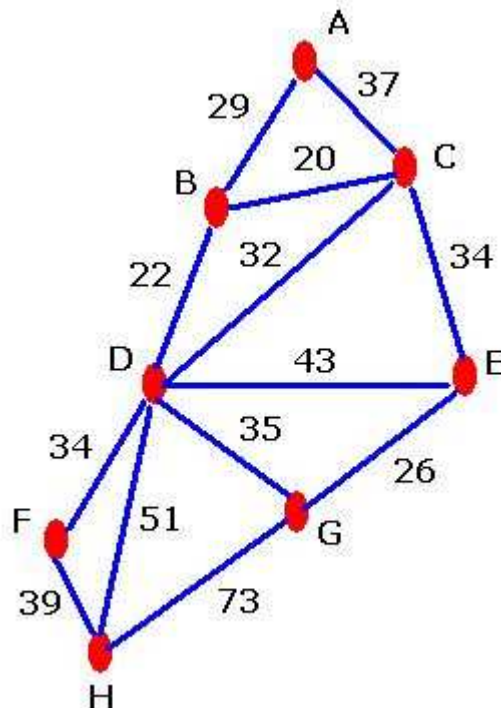
Volviendo al ejemplo del paquete que tenían que enviar desde Sevilla hasta Cádiz, Juan transformó esa situación real en una situación matemática (a esto lo llamamos modelización), después lo resolvió matemáticamente y lo volvió a pasar al mundo real.

¿Cómo crees que lo hizo?

Ejercicio resuelto

Vamos a ver el método que empleó Juan.

Lo primero que hizo, fue coger el mapa y modelizar el problema (dibujar un grafo en un papel como el de abajo).



Donde **A** representa a Sevilla, **B** a Los Palacios y Villafranca, **C** a Utrera,

Los números que hay sobre las aristas (carreteras) representan el tiempo que se tarda en desplazarse de un nodo a otro (de una población a otra).

1. ¿Qué camino tiene que tomar TRANS VELOX para llevar un paquete desde Sevilla a Cádiz?
2. ¿Cuál sería el camino si primero tiene que pasar por Utrera para recoger a un compañero?

Para resolver este tipo de problemas se utiliza el algoritmo de **Dijkstra**, también llamado algoritmo de caminos mínimos.

Este algoritmo consiste en ir explorando todos los caminos más cortos que parten del vértice origen (A:Sevilla) y que llevan al último vértice (H:Cádiz).

Dada la complejidad de dicho algoritmo, nosotros lo resolveremos marcando caminos y realizando las operaciones correspondientes.

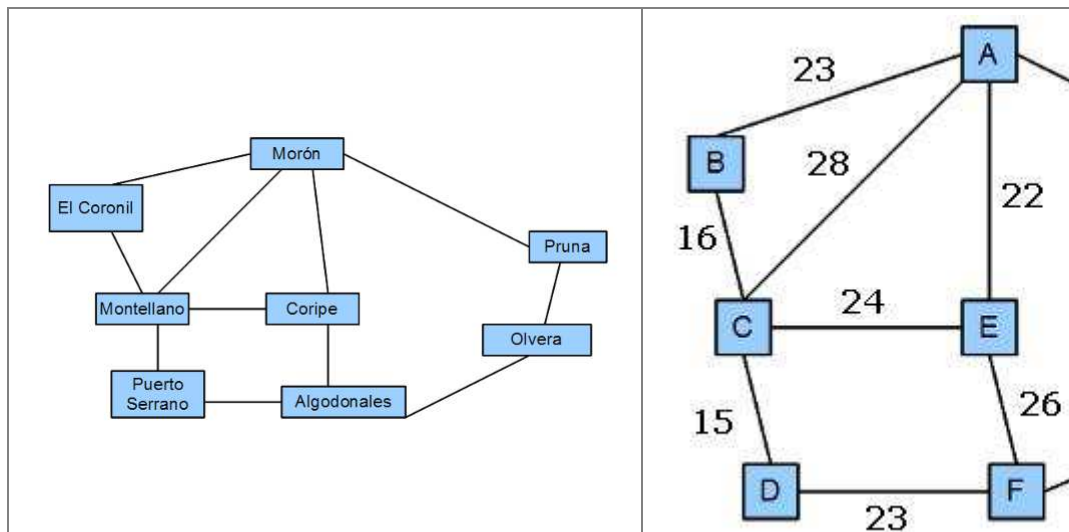
Reflexiona

¿Te acuerdas de la delegación de TRANS VELOX que había en Morón de la Frontera?

Resulta que acaban de cumplir 25 años desde que abrieron la oficina y han decidido irse a comer a El Coronil.

Estando allí de celebración, reciben una llamada y tienen que desplazarse hasta Olvera.

Calcula cuál será el camino más rápido, utilizando los datos que te mostramos en el siguiente grafo.





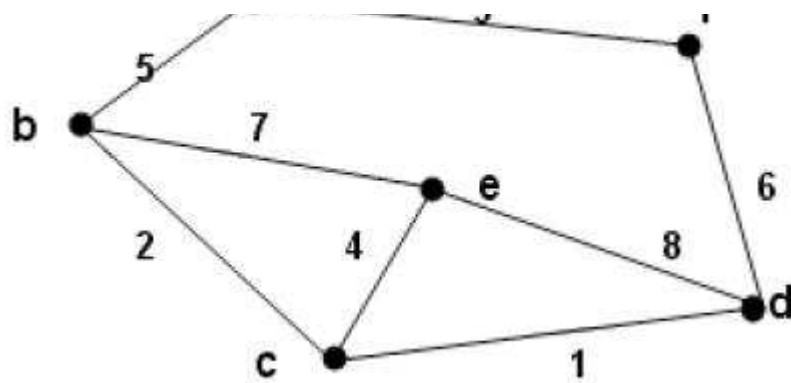
Para saber más

En el apartado anterior hemos hablado de que existe un algoritmo que resuelve estos problemas, el algoritmo de Dijkstra. En este vídeo se cuenta de manera fácil cómo funciona y los pasos que hay que seguir, aunque claro, todo será más complicado cuantos más vértices haya.

Para terminar este apartado vamos a resolver un problema que plantearon a Luisa y Pedro en la empresa TRANS VELOX, para ocupar el puesto de Juan y otro de "Los Puentes de la dársena del Guadalquivir".

Reflexiona

En el grafo siguiente, Luisa y Pedro tienen que encontrar el camino más corto (en el sentido de menos "pesado") entre los vértices a y e.



3.2. Los puentes de Königsberg

Königsberg, actualmente llamada **Kaliningrado**, es una ciudad que se encuentra a orillas del Mar Báltico, en territorio ruso y a unos 50 kilómetros de la frontera con Polonia.

Fue una ciudad que sufrió duros ataques durante las dos guerras mundiales, con lo cual podéis imaginaros los graves daños que se produjeron.

Muchos de sus edificios históricos fueron derrumbados por bombardeos. En 1946, en la Conferencia de Berlín, la ciudad pasó a manos de la antigua URSS, que le cambió el nombre, un año después, por el de Kaliningrado.



Galería de imágenes



Curiosidad

Königsberg es famosa por ser el lugar de nacimiento del filósofo **Kant**, pero también es famosa por sus siete puentes y por el problema que consistía en saber si una persona podría cruzar todos los puentes una sola vez.

Este problema fue resuelto por **Euler**.

Además de Kant, en esta ciudad nacieron destacados científicos de los 3

Weierstrass y Kronecker.

Además de sus magníficos trabajos, es famosa la conferencia que dio en el Congreso Internacional de Matemáticas de París de 1900, en el que además de defender que las matemáticas eran una ciencia que podía desarrollarse independientemente de las demás, proponía sus famosos 23 problemas que ocuparían a la matemática del siglo XX. Aún hoy alguno de estos problemas no se ha resuelto.

Hilbert recibió muchos honores y en 1930 estando ya retirado, la ciudad de Königsberg le hizo ciudadano de honor. Son famosas sus palabras en las que se reconoce su entusiasmo por las matemáticas: *"Debemos saber, así que sabremos"*. Estas mismas palabras se escribieron en su epitafio.

En el siglo XVII la ciudad de **Königsberg** estaba atravesada por el río **Pregel** que se dividía en el Viejo y en el Nuevo Pregel. Este río formaba dos islas a su paso por la ciudad, una de las cuales, la más pequeña, se llamaba la isla **Kneiphof**.



Para unir las cuatro partes de la ciudad separadas por la geografía, existían siete puentes.

Se cuenta que los domingos por la mañana y los días de fiesta, los habitantes de la ciudad salían a pasear (presumiblemente, para tomar el sol, habida cuenta del frío que debía hacer en Königsberg, dada su situación geográfica) y se entretenían tratando de resolver el siguiente problema: **¿Es posible recorrer todas las zonas de la ciudad, atravesando todos los puentes, una y sólo una vez cada uno de ellos?**

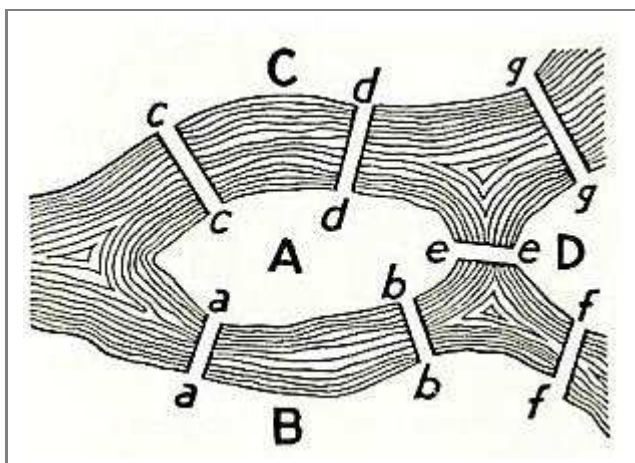
Prueba a resolverlo en la siguiente animación.

En la animación, aparece de forma esquemática la disposición de los puentes. La zona azulada corresponde al río, es decir, al agua y la verde a las zonas de tierra. Así, los puentes serían las siete franjas verdes que atraviesan la zona azul. Puesto que por el agua no podemos andar, tienes que intentar atravesar esas siete franjas verdes sin tocar las zonas azules.

Applet Descartes realizada por [Salvador Calvo-Fernández Pérez](#) bajo licencia Creative Commons.

Esta unidad interactiva requiere la máquina virtual de Java [J2RE](#).

Ejercicio resuelto



Euler, una vez enterado del problema gracias a un grupo de jóvenes de Königsberg que en 1735 le pidieron que resolviera el problema, se dedicó por completo al estudio del mismo, dando una solución simple e ingeniosa, que servía también para cualquier número de puentes.

Para empezar, Euler formuló el problema de la siguiente manera:

"En la ciudad de Königsberg, en Prusia, hay

una isla **A** llamada Kneiphof, rodeada por los dos brazos del río Pregel.

Hay siete puentes a, b, c, d, e, f y g, que cruzan por los dos brazos el río. La cuestión consiste en determinar si una persona puede realizar un paseo de tal forma que cruce cada uno de estos puentes sólo una vez".

A los pocos meses Euler presentó un voluminoso informe a la Academia rusa de San Petersburgo, en el que afirmaba haber demostrado la imposibilidad de tal ruta. Posteriormente, publicó un artículo titulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Euler 1736), en el que resolvía el problema en el caso general, obteniendo condiciones generales para la existencia de soluciones para cualquier problema del mismo tipo.

Este artículo es considerado por varios autores como el nacimiento de la Teoría de Grafos, utilizada actualmente en una gran cantidad de aplicaciones, y también como una de las primeras manifestaciones de una nueva Geometría.

Fuente: Revista SUMA, n.º 45, febrero 2004.

Para saber más

Puedes leer este artículo de la [Revista SUMA](#), n.º 45, febrero 2004 si quieres más información sobre este tema.

Importante

separados como puedan ser la lingüística, la investigación operativa, la electricidad, la genética, la sociología, etc.

Un grafo consiste en un conjunto finito de vértices (puntos) y un conjunto finito de aristas (líneas) entre ellos.

Para saber más

En un grafo, dos **vértices** se dicen **adyacentes** si ambos son extremos de una **arista**.

Toda arista es incidente con sus vértices extremos y dos aristas se dicen **incidentes** si ambas comparten un vértice común.

Se denomina **valencia** (o grado) de un vértice al número de vértices adyacentes con él o bien al número de aristas incidentes con él. Por convenio, un vértice no se considera adyacente consigo mismo y los vértices de valencia 0 se denominan **vértices aislados**.

Un **camino** en un grafo es una sucesión consecutiva de vértices y aristas del grafo, comenzando por un vértice, del tipo $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{r-1}, e_r$, de tal manera que cada arista e_i una los vértices v_{i-1} y v_i .

Un **camino euleriano** sobre un grafo contiene cada arista del grafo una y sólo una vez.

Euler probó que el grafo de Königsberg no posee un camino euleriano.

Reflexiona

En 1875 los alemanes construyeron un nuevo puente en la ciudad de Königsberg, situado entre las zonas B y C.

¿Es posible ahora planificar un paseo tal que se crucen los ocho puentes sin pasar por ninguno más de una vez?

Dibuja el grafo asociado para que te resulte más fácil resolver el problema.

Esta unidad interactiva requiere la máquina virtual de Java [J2RE](#).

Podemos empezar a pensar si se puede realizar el paseo trabajando directamente sobre la escena o podemos ser más sistemáticos realizando el grafo asociado y estudiando dicho grafo.

Reflexiona

Sobre la dársena del Guadalquivir hay 9 puentes.

- Puente del Alamillo.
- Puente de la Barqueta.
- Pasarela de la Cartuja.
- Puente del Cristo de la Expiración.
- Puente de Isabel II, también conocido como puente de Triana.
- Puente de San Telmo.
- Puente de los Remedios.
- Puente de las Delicias
- Puente del V Centenario.

Dibuja el grafo asociado y comprueba si se puede dar un paseo por todos los puentes pasando solo una vez por cada uno de ellos.



Ver [Puentes de Sevilla](#) en un mapa más grande

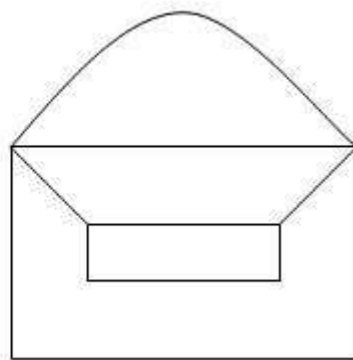
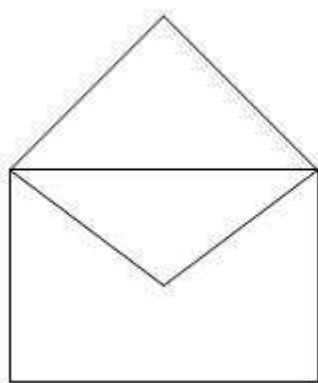
3.3. Otros problemas relacionados

DIBUJAR UNA FIGURA SIN LEVANTAR EL LÁPIZ DEL PAPEL

El problema de dibujar una figura sin levantar el lápiz del papel tiene que ver mucho con los grafos que hemos visto de los puentes de Königsberg.

Te recuerdo que tienes que ver cuál es la valencia (o el grado) de cada vértice, si es par o impar, para que no te desespere buscando una solución.

Sin mucha dificultad, seguro que puedes dibujar ese sobre de un tirón y sin repetir ningún lado, pero, ¿a qué no eres capaz de hacerlo con el buzón?



En la escena siguiente hay hasta un total de ocho figuras diferentes las cuales hay que dibujarlas sin levantar el lápiz del papel

Para pasar de una figura a otra se pulsa sobre las flechas del parámetro "Figura".

Applet Descartes de [Salvador Calvo-Fernández](#) Pérez bajo licencia Creative Commons

Esta unidad interactiva requiere la máquina virtual de Java [J2RE](#) .

En la siguiente página [Matemáticas Experimentales](#) , puedes practicar todo lo que hemos visto de grafos.

En el menú de la izquierda, accede a **Conectarse** y después en el menú superior a **De un único trazo , ¡Cuatro colores bastan! y ¿Dígame?**



Galería de imágenes

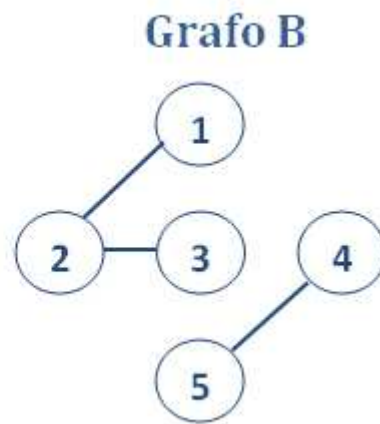
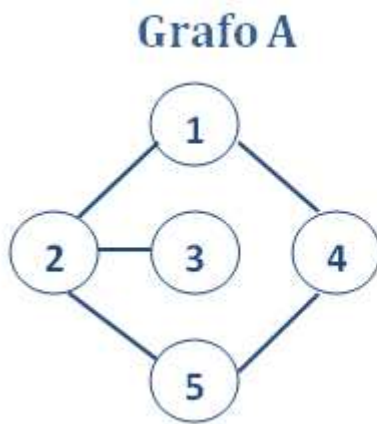
4. Ejemplos de Selectividad

Al final de varios años a proponer el ejercicio de Selectividad, quizás poco a poco te vaya descubriendo que todo te resulta conocido.

En esta ocasión vamos a proponer una actividad que se preparó como modelo para la elaboración de las PAU (Prueba de Acceso a la Universidad).

Ejercicio resuelto

Sean los grafos siguientes:



1. Escriba la matriz de adyacencia asociada a los grafos A y B de la figura anterior.
2. Si las matrices C y D, unen los nodos numerados con las etiquetas 1, 2, 3, representa los grafos asociados a dichas matrices de adyacencia.

| | |
|---|---|
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| Matriz C | Matriz D |