INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

# PAU

## Mayores de 25 años

# Contenidos

## Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
## Estadística y probabilidad: Introducción a la probabilidad

# 1. Primeros conceptos

Los juegos de **azar** (cartas, dados…) y las apuestas vinculadas a los mismos están en el origen de los primeros problemas y conceptos relacionados con la **probabilidad**. En el Renacimiento algunas personas amantes de este tipo de juegos plantearon algunas cuestiones “prácticas”; por ejemplo, cómo obtener ganancias en sus apuestas o cómo repartir de forma justa lo apostado al tener que interrumpir una partida.

Imagen en Flickr por aesedepece bajo CC

Al mismísimo Galileo Galilei (1564-1642), un jugador italiano mostró su sorpresa porque al jugar con 3 dados la suma 10 aparece con más **frecuencia** que la suma 9, aunque ambas sumas tenían el mismo número de **casos favorables**. La suma 9 se obtenía en los seis casos siguientes: 126, 135, 144, 225, 234 y 333; mientras que a su vez la suma 10 se obtenía con los resultados: 136, 145, 226, 235, 244 y 334. Galileo dedicó su inteligencia a tales temas “intrascendentes” y en 1612 escribió el libro titulado “Sobre la puntuación en tiradas de dados”.

Si repasas los párrafos anteriores descubrirás unas palabras en negrita, que seguro que a partir de este tema adquieren una nueva dimensión para ti:

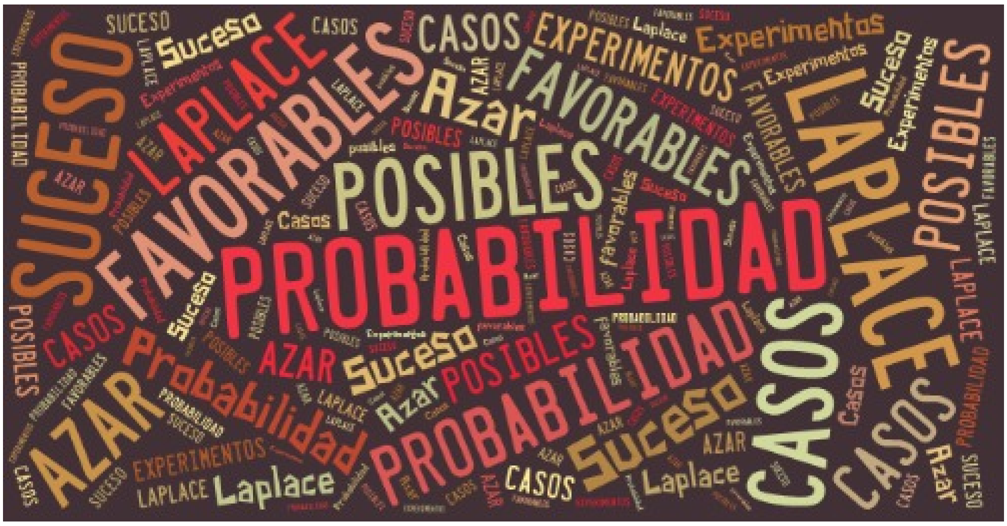



Imagen de elaboración propia

### Probabilidad y fenómenos aleatorios

Probabilidad es una palabra que utilizamos con mucha frecuencia, y si tienes dudas de esta afirmación solo hay que echar un vistazo a la prensa diaria, de la que a continuación te ponemos unos ejemplos de titulares:

TIENE OCÉANOS BAJO HIELO
**Europa, luna de Júpiter, tiene más posibilidades de vida que Marte**

SEMANA SANTA
**Vía Crucis de Sevilla 2013: Desciende la probabilidad de lluvia al 40 por ciento**
L. RODRÍGUEZ / SEVILLA | Día 16/02/2013 - 10.52h

CASO PRESTIGE
**Peritos concluyen que la probabilidad de llevar con éxito el buque a la ría era muy baja**

**La AMA cree que hay "alta probabilidad" de encontrar futbolistas implicados en la Operación Puerto**
"Las muestras de sangre no se refieren solo a ciclistas", dice el presidente de la Asociación Mundial Antidopaje

Pero, ¿qué tienen en común estos titulares, sin tener en cuenta la palabra probabilidad? Si te fijas cada uno pertenece a un ámbito de la actualidad, pero en ninguno conocemos de antemano cuál será el resultado. Y es que la idea de probabilidad está íntimamente ligada al concepto de azar y aleatoriedad.

*Importante*

Un fenómeno o experimento se dice **aleatorio** (estocástico) si no puede predecirse cuál será su resultado, es decir, si está sujeto al azar. En caso contrario se dice que el fenómeno es **determinista**.

La **Probabilidad** es una rama de las Matemáticas que estudia los fenómenos aleatorios.

Ejemplos de experimentos aleatorios son el lanzamiento de un dado (*alea* en latín) o la edad media de las personas que subirán al autobús en la próxima parada. Por el contrario, la temperatura de fusión del hielo y la aceleración de la gravedad en un determinado punto de la Tierra son constantes en fenómenos deterministas. Hay también fenómenos que, aunque en principio, podría pensarse que son deterministas, la cantidad de variables que intervienen en los mismos hace imposible su predicción cierta (¿si está nublado implica que llueve?).

## Comprueba lo aprendido

Indica si las siguientes experiencias corresponden a experimentos deterministas o aleatorios.

1. Conocer el número de coches que saldrán a la carretera el primer fin de semana de las vacaciones de verano.

- Determinista.
- Aleatorio.

Vuelve a pensarlo.

Correcto. Podemos estimar el número de vehículos, pero nunca conocer exactamente cuantos saldrán.

**Solution**

1. Incorrecto
2. Opción correcta

2. Saber cuál será el perímetro de un hexágono de lados iguales a 3 cm.

- Determinista.
- Aleatorio.

Es cierto porque antes de medirlo sabemos que el perímetro será 3·6 = 18 cm.

Yo sé cuanto vale el perímetro antes de medirlo, luego no puede ser un valor aleatorio.

**Solution**

1. Opción correcta
2. Incorrecto

3. Saber de qué color es una bola que se va a extraer de una bolsa opaca donde hay 15 bolas rojas.

- Determinista.
- Aleatorio.

Está claro que la bola que sale es roja.

Venga ya, ¿seguro que no sabes de qué color va a salir la bola?

**Solution**

1. Opción correcta
2. Incorrecto

4.- Saber el número de goles que se van a marcar en el partido del próximo domingo de tu equipo favorito.

- Determinista.
- Aleatorio.

Pues va a ser que no.

Pues claro, ya que si supieras seguro cuantos goles se van a marcar te podrías hacer rico apostando.

**Solution**

1. Incorrecto
2. Opción correcta

**Espacio muestral y sucesos elementales**

Siempre que nos encontramos en una situación que depende del azar, antes de realizarla no podemos saber a ciencia cierta qué resultado vamos a obtener, pero siempre tendrá que estar entre un conjunto de valores que sí podemos conocer.

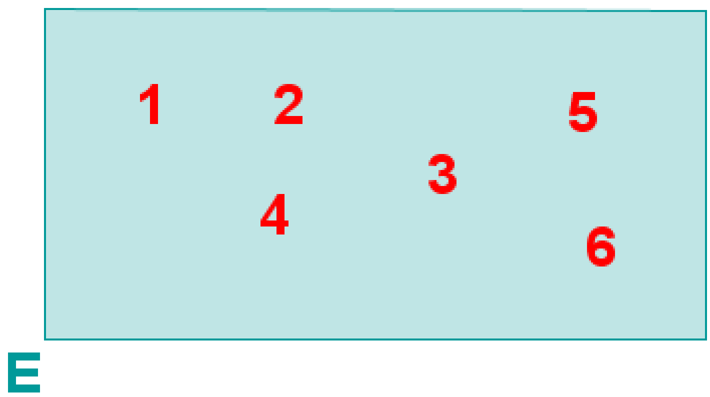
Por ejemplo, antes de empezar la liga no podemos saber quién va a ganar en Primera División (aunque conozcamos estadísticas de los que la ganaron los últimos años), pero es seguro que el ganador tiene que ser uno de los equipos que juegan en esa división.

*Importante*

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Lo denotaremos por E.

Cada uno de estos resultados recibe el nombre de **suceso elemental**.

Los espacios muestrales se visualizan mediante cajas en cuyo interior están los elementos. Por ejemplo el espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en el lanzamiento de un dado sería:




**Experimentos aleatorios compuestos**

Ya hemos visto experimentos aleatorios consistentes en tirar un dado o una moneda que se denominan experimentos aleatorios simples.

Un experimento compuesto es aquel que puede descomponerse en dos o más experimentos aleatorios simples, como el lanzamiento de varias monedas, dados, o la observación de varias características de un mismo colectivo...

Muchos experimentos compuestos consisten en sucesivas extracciones (de una baraja, urna, colectivo...).

Las hay de dos tipos:

- Extracciones con reemplazamiento. Tras cada extracción el elemento extraído se devuelve al contenedor (mazo, urna, colectivo…). De esta manera, cada extracción se realiza en las mismas condiciones que la precedente.

- Extracciones sin reemplazamiento. Tras cada extracción el elemento extraído no se devuelve al contenedor (mazo, urna, colectivo…). Cada extracción viene condicionada por las anteriores, es decir, cada vez tenemos menos elementos.

Para visualizar los espacios muestrales de los experimentos aleatorios compuestos se utilizan las tablas rectangulares (en las extracciones con reemplazo) y los diagramas en árbol, que verás después del ejercicio resuelto en un vídeo.

## Ejercicio resuelto

Escribe los espacios muestrales de los siguientes experimentos e indica si son simples o compuestos:

a. Sacar una carta de una baraja española (sin ochos ni nueves).

b. Lanzar una moneda.

c. Lanzar una moneda dos veces.

d. Sacar una bola de una caja que contiene 3 bolas rojas, dos azules y una negra.

**Mostrar retroalimentación**

a. Sacar una carta de una baraja española (sin ochos y nueves) Aqui, el espacio muestral sería:

E = {as de oros, 2 de oros, 3 de oros, 4 de oros, 5 de oros, 6 de oros, 7 de oros, sota de oros, caballo de oros, rey de oros, as de copas, 2 de copas, 3 de copas, 4 de copas, 5 de copas, 6 de copas, 7 de copas, sota de copas, caballo de copas, rey de copas, as de bastos, 2 de bastos, 3 de bastos, 4 de bastos, 5 de bastos, 6 de bastos, 7 de bastos, sota de bastos, caballo de bastos, rey de bastos, as de espadas, 2 de espadas, 3 de espadas, 4 de espadas, 5 de espadas, 6 de espadas, 7 de espadas, sota de espadas, caballo de espadas, rey de espadas}

Sería un experimento aleatorio simple, pues solo se realiza una extracción.

b. Lanzar una moneda. En este caso tendríamos:

E = {cara, cruz}

Sería un experimento aleatorio simple, pues solo se realiza una extracción.

c. Lanzar una moneda dos veces. El espacio muestral sería:

E = {(cara, cara), (cara, cruz), (cruz, cara), (cruz, cruz)}

Sería un experimento compuesto, ya que lanzamos la moneda dos veces.

d. Sacar una bola de una caja que contiene tres bolas rojas, dos azules y una negra.

E = {bola roja, bola azul, bola negra}

Sería un experimento aleatorio simple, pues solo se realiza una extracción.

Para terminar, un vídeo de youtube de juanmemol, que resume todos estos conceptos y que te servirá para afianzarlos:

# 1.2. Sucesos

En un experimento aleatorio se llama **suceso** a aquello de lo que puede decirse que ha ocurrido o no. Por ejemplo en el lanzamiento de un dado podremos preguntarnos "¿Ha salido un número par?".

Los sucesos pueden determinarse a través de una propiedad que los caracterice o, en los espacios finitos, enumerando sus elementos. Así el suceso antes mencionado "salir número par" viene descrito mediante la propiedad "ser número par". Al lanzar un dado y observar el resultado nos preguntaremos: ¿El número obtenido es par? Si la respuesta es afirmativa el suceso habrá ocurrido y no habrá ocurrido en caso contrario. Si llamamos P al suceso "salir número par" este también podría ser descrito de forma conjuntista, enumerando sus elementos P={2,4,6}. Esta forma última de describir los sucesos es mucho más clara, pues para saber si un suceso ha ocurrido lo único que se necesita es observar si el resultado obtenido pertenece o no al conjunto.

## *Importante*

Los sucesos suelen denotarse con letras mayúsculas, dando prioridad a aquellas que estén relacionadas con la propia definición del suceso. Por ejemplo, si hablamos del suceso "Sacar un número par", podemos denotarlo por P.

Los sucesos los podemos representar utilizando diagramas de Venn:

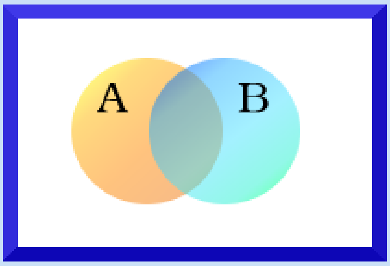



Imagen en Wikimedia Commons de Giro720 bajo Dominio Público

Donde A y B son dos sucesos, y el rectángulo representa el espacio muestral.

En el apartado anterior, hemos visto al "sustantivo" suceso acompañado de un "apellido", elemental, y es que podemos encontrarnos con distintos tipos de sucesos:

| TIPOS DE SUCESOS | DEFINICIÓN | EJEMPLO |
|---|---|---|
| **Suceso elemental** | Es cada uno de los elementos del espacio muestral. | Al tirar un dado sacar 3. |
| **Suceso compuesto** | Cualquier subconjunto del espacio muestral. | Al tirar un dado sacar un número impar. |
| **Suceso seguro** | Está formado por todos los posibles resultados. | Al tirar un dado sacar un número menor que 7. |
| **Suceso imposible** | Es aquel que nunca puede darse, es decir, que no tiene ningún elemento. | Al tirar un dado obtener un número mayor que 7. |

## *Ejercicio resuelto*

Consideramos el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado de seis caras, bien construido, con los números del 1 al 6 en sus caras y fijarnos en el valor que sale.

a) ¿Cuál sería el espacio muestral?

b) ¿Cuál sería el suceso "obtener número primo"?

c) ¿Y el suceso "obtener múltiplo de 3"?

d) Escribe el suceso "obtener un número de una cifra".

e) ¿Quién sería el suceso "obtener 10"?

**Mostrar retroalimentación**

a) El espacio muestral estaría formado por todos los resultados posibles, en nuestro caso, E={1, 2, 3, 4, 5, 6}.

b) A={obtener un número primo} = {2, 3, 5}

c) B={múltiplo de 3} = {3, 6}

d) C={número de una cifra} = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Este sería el suceso seguro, ya que vemos que coincide con el espacio muestral.

e) Este sería el suceso imposible, ya que no hay ningún resultado del espacio muestral que lo cumpla.

Observa el ejemplo anterior: en el espacio muestral teníamos más de un suceso ("obtener número primo", "múltiplo de 3"...). Esto implica que puedan existir relaciones entre los distintos sucesos.

| TIPO DE RELACIÓN | DEFINICIÓN | EJEMPLO |
|---|---|---|
| Sucesos incompatibles | Los sucesos A y B son incompatibles cuando si se da uno no puede darse el otro, es decir, cuando no tienen ningún elemento en común. | Los sucesos "Tirar un dado y sacar un número menor que tres" y "Tirar un dado y sacar un número mayor o igual que tres". |
| Sucesos independientes | Los sucesos A y B son independientes cuando lo que sucede en A no afecta a lo que sucede en B, y viceversa. | Los sucesos "tirar un dado y obtener par" y "sacar una carta de la baraja y obtener oros" |
| Sucesos dependientes | Dos sucesos son dependientes si no son independientes. | Extraer dos cartas de una baraja, sin reemplazamiento, son sucesos dependientes. |
| Suceso contrario | El suceso contrario de A es el suceso que se realiza cuando no se realiza A. | El suceso contrario de al tirar un dado y sacar número par sería tirar el dado y sacar un número impar. |

## Ejercicio resuelto

Indica qué tipo de relación existe entre los sucesos representados mediante los siguientes diagramas:

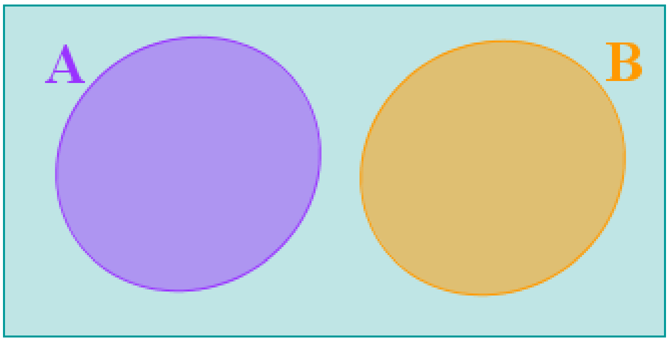



Diagrama 1

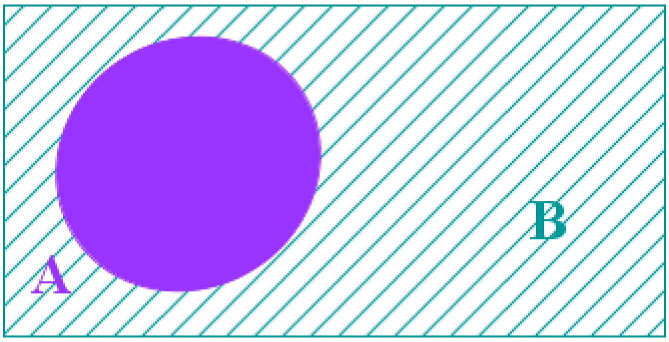



Diagrama 2

**Mostrar retroalimentación**

El diagrama 1, corresponde a sucesos incompatibles, pues si te fijas no tienen ningún elemento en común.

En el diagrama 2, B es el suceso contrario de A y viceversa ya que cuando no ocurre A, entonces ocurre B, y cuando no ocurre B ocurre A.

## Operaciones con sucesos

Cuando uno, en su tierna infancia, comienza a adentrarse en el apasionante mundo de las matemáticas, comienza con las cosas más simples: reconocer los números, contar, ordenar... y llega un momento en que se comienza a operar con esos números. A partir de ahí lo que hacemos es ampliar el número de operaciones que vamos conociendo y aplicando. Podemos pensar que solo podemos operar con números, pero vamos a ver en este apartado que también es posible operar con otros elementos, en nuestro caso con sucesos.

Ahora vamos a ver las dos operaciones fundamentales con sucesos y verás que quizás te recuerden cosas conocidas. ¿Recuerdas cuando calculábamos el m.c.d. y el m.c.m. de varios números?, en el primero escogíamos solo los factores comunes y en el segundo tomábamos los valores comunes y los no comunes, lógicamente sin repetir los comunes. Pues algo parecido veremos a continuación.

### Importante

La **unión de los sucesos A y B (AUB)** es el suceso que tiene lugar cuando ocurre A o B, es decir, es el suceso que contiene exactamente los elementos de A y los elementos de B.

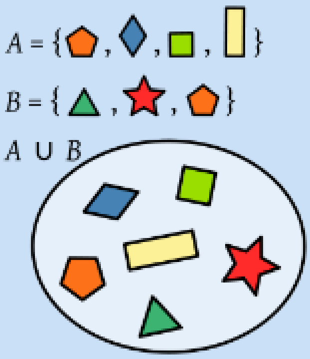



Imagen en Wikimedia Commons de kismalac bajo CC

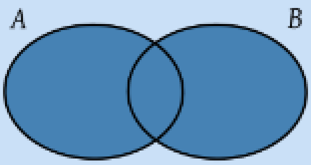



Imagen en Wikimedia Commons de kismalac bajo CC

**IMPORTANTE:** AUB se lee "A o B", es decir, cuando nos encontremos en una actividad o problema, siempre que nos pregunten por A o B, nos están preguntando por la unión de dos sucesos.

### Importante

La **intersección de sucesos A y B (A∩B)** es el suceso que tiene lugar cuando ocurren simultáneamente A y B, es decir, es el suceso que contiene exactamente los elementos que pertenecen a la vez a A y a B.

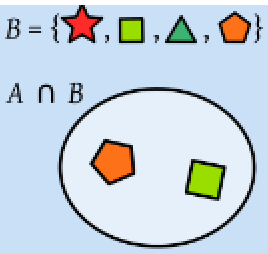




Imagen en Wikimedia Commons
de kismalac bajo CC

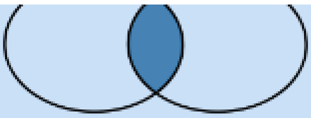


Imagen en Wikimedia Commons
de kismalac bajo CC

**IMPORTANTE:** A∩B se lee "A y B", es decir, cuando nos encontremos en un problema o actividad, siempre que nos pregunten por A y B, nos están preguntando por la intersección de los dos sucesos.

## Ejercicio resuelto

Si estamos ante el experimento aleatorio lanzar un dado, su espacio muestral asociado es E={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Si definimos A="obtener número par", es decir, A={2, 4, 6} y B="obtener múltiplo de 3", es decir, B={3, 6}.

Determina los sucesos AUB y A∩B.

**Mostrar retroalimentación**

AUB="obtener número par o múltiplo de 3"={2, 3, 4, 6}

A∩B="obtener número par y múltiplo de 3"={6}

## Importante

La **diferencia de sucesos (A − B o A\B)**, es el suceso que tiene lugar cuando ocurre A y no B, es decir, está formado por los elementos de A que no son de B.

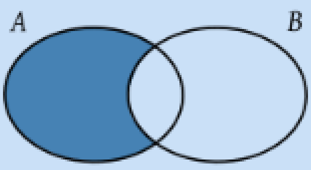



Imagen en Wikimedia Commons
de kismalac bajo CC

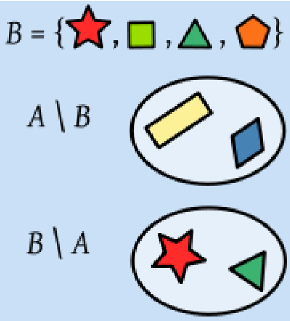




Imagen en Wikimedia Commons
de kismalac bajo CC

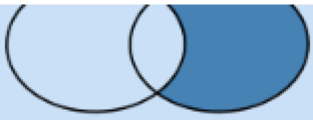


Imagen en Wikimedia Commons
de kismalac bajo CC

**IMPORTANTE:** Observa en las imágenes que no es igual A-B que B-A.

## Importante

El suceso complementario ( $\overline{A}$ o $A^c$ ) de A tiene lugar cuando no ocurre A, es decir, está formado por todos aquellos elementos del espacio muestral que no están en A.

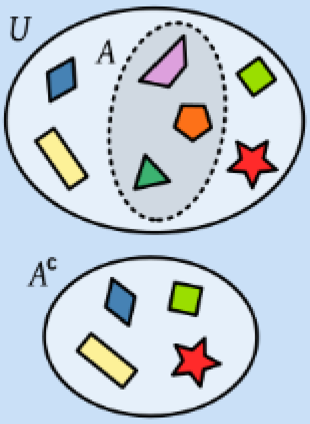



Imagen en Wikimedia Commons
de kismalac bajo CC

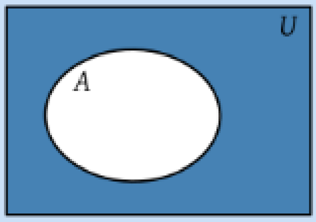



Imagen en Wikimedia Commons
de kismalac bajo CC

**IMPORTANTE:** $\overline{A}$ se lee no A, es decir, cuando en un problema o actividad nos pregunten por la no ocurrencia de A, nos están preguntando por su complementario.

Además si te fijas A y $\overline{A}$ guardan una relación de sucesos contrarios.

## Ejercicio resuelto

En el ejercicio resuelto anterior, determina los sucesos A-B, B-A, $\overline{A}$ y $\overline{B}$ .

**Mostrar retroalimentación**

A-B="obtener un número par y que no sea múltiplo de 3"= {2, 4}

B-A="obtener un múltiplo de 3 que no sea par"={3}

$\overline{A}$ ="no obtener un número par"={1, 3, 5}

$\overline{B}$ ="no obtener un múltiplo de 3"={1, 2, 4, 5}

## Ejercicio resuelto

Unos amigos se apuestan una cena, mediante una partida de dados. El experimento consistía en lanzar un dado y anotar el resultado, y los sucesos eran los siguientes:

A = "Salir un número impar" (ganaba Gonzalo)

B = "Salir un número primo" (ganaba Blanca)

C = "Salir un divisor de 6" (ganaba M.ª José)

D = "Salir un múltiplo de 4" (ganaba la amiga de M.ª José)

a) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde ganan Gonzalo o Blanca?

b) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde ganan M.ª José o su amiga?

c) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde ganan Gonzalo y Blanca?

d) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde ganan M.ª José y su amiga?

e) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde gana Gonzalo y no gana Blanca?

f) ¿Cuáles son los elementos del suceso donde gana Blanca y no gana M.ª José?

**Mostrar retroalimentación**

Tenemos los siguientes sucesos:

A={1, 3 , 5}, B={2, 3, 5}, C={1, 2, 3, 6} y D={4}

a) Para que gane Gonzalo o gane Blanca tiene que ocurrir el suceso A o el suceso B. Este nuevo suceso se llama **suceso unión** de A y B y se representa por AUB.

Este suceso unión está formado por los números impares junto con los números primos AUB={1, 2, 3, 5}.

b) El suceso donde ganan M.ª José o su amiga será CUD={1, 2, 3, 4, 6} .

c) Para que ganen Gonzalo y Blanca tienen que ocurrir a la vez los sucesos A y B. Este nuevo suceso se llama **suceso intersección** de A y B y se representa por A∩B.

Este suceso intersección está formado por los números impares que a la vez son primos A∩B={3, 5}.

d) En este caso nunca podrán ganar a la vez M.ª José y su amiga ya que C y D son sucesos incompatibles y, por lo tanto, C∩D=Ø.

e) Para que gane Gonzalo y no gane Blanca, tiene que ocurrir el suceso A y no ocurrir el suceso B. Este nuevo suceso se llama **suceso diferencia** de A y B y se representa por A-B.

Este suceso diferencia está formado por los números impares que no son primos A-B={1} .

f) Para que gane Blanca y no gane M.ª José, tiene que ocurrir el suceso B y no ocurrir el suceso C: B-C={5}.

**Propiedades de las operaciones con sucesos**

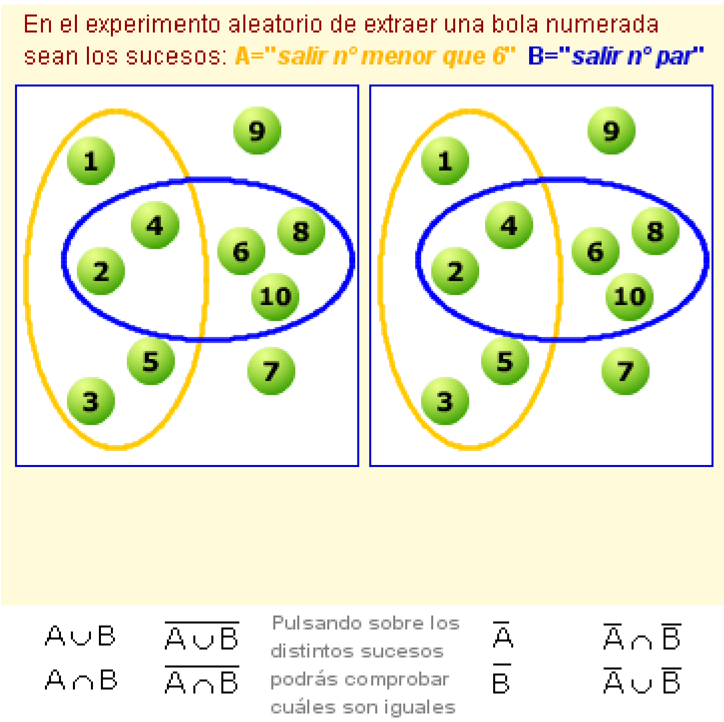
En la actividad resuelta anterior, A-B también podíamos expresarlo como $A\cap\overline{B}$, pues nos preguntaban por los elementos de A y los elementos que no estaban en B.

Esto nos indica que podemos encontrarnos con propiedades de las operaciones con sucesos (al igual que pasaba con los números) que nos ayuden a expresar lo mismo de una forma a priori más sencilla.

Como son muchas propiedades (asociativa de la unión y la intersección, conmutativa, distributiva...), te recomendamos el siguiente enlace donde todas vienen explicadas con mucho detalle. Sin embargo, debes prestar especial atención a las siguientes, las conocidas como **"leyes de Morgan"**:

| | |
|---|---|
| $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ | Lo que no está en A o en B, dicho de otra forma lo que no está en A y no está en B |
| $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ | Lo que no está en A y en B, dicho de otra forma lo que no está en A o no está en B |

Si haces clic en la siguiente imagen descubrirás un applet del proyecto EDAD que seguro que te ayuda a entender algo mejor estas propiedades manipulando los sucesos A y B:




Captura de pantalla del Proyecto EDAD

Por último, juanmemol en un vídeo de youtube nos resume estos dos últimos apartados, es decir, nos hablará de sucesos y de operaciones con sucesos:

# 2. Probabilidad

Hemos visto que en los experimentos aleatorios, antes de realizarlos, no podemos saber a ciencia cierta qué resultado va a obtenerse. Pero si sabemos que esos resultados tienen una serie de resultados que son posibles, por ejemplo, en Granada capital, no sabemos qué sorpresas pueden darnos los elementos, si nevará, hará un calor tórrido, habrá un terremoto, incluso puede haber alguna inundación parcial, pero está claro que no puede haber un maremoto.

En este apartado vamos a medir las posibilidades de que ocurran los distintos resultados de un experimento aleatorio, veremos que la intensidad varía según el suceso. Por ejemplo, es muy probable que en Écija haga mucho calor en verano, eso no quita que algún día pueda descargar una tormenta de verano, es decir, no es un suceso seguro. De la misma forma es muy poco probable que en tu calle haya un Club de Esgrima, pero no es imposible.

Imagen en Flickr de Dimi15 bajo CC

**Definición clásica de probabilidad. Regla de Laplace**

Imagina por un momento que sueles entrenar un equipo de fútbol juvenil. En el partido de este sábado acaban de pitar un penalti a favor de tu equipo y tienes que decidir quién lo tira y quieres elegir al que tenga más posibilidades de marcarlo. Tienes dos jugadores especialistas en lanzamientos de pena máxima, uno ha lanzado este año 12 penaltis y ha marcado 8, el otro ha lanzado 8 y ha conseguido 6 goles. ¿A quién elegirías?

En este apartado vamos a ver como asignarle a un suceso aleatorio una cantidad que mida lo probable o improbable de que ocurra ese suceso.

Imagen en Flickr de mtraker bajo CC

## Importante

Podemos definir la **probabilidad** de un suceso de una forma intuitiva (puedes ver una definición más formal en los apéndices), como un número comprendido entre 0 y 1 que mide la mayor o menor posibilidad de que ocurra dicho suceso. Cuanto más cerca de 1 es más probable que ocurra, cuanto más cerca de 0 más difícil.

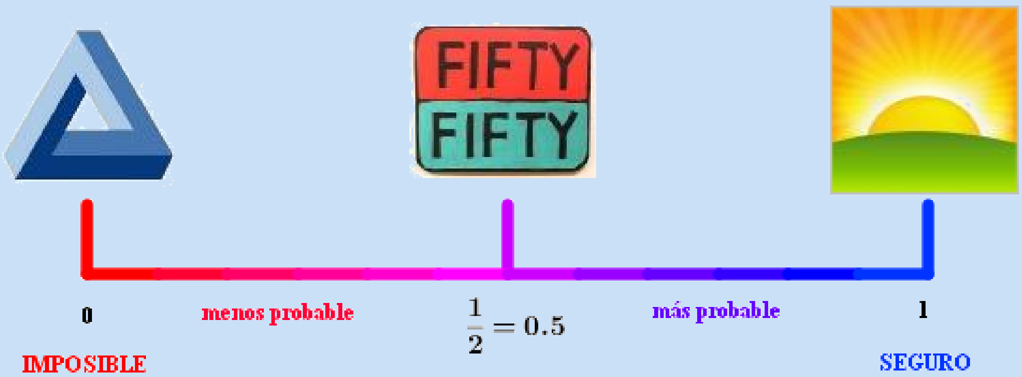



Imagen de elaboración propia

Si estamos pensando en cuál de los dos jugadores elegir, quizás sea buena idea tener en cuenta la proporción de aciertos al lanzar el penalti. En el primer jugador sería $\frac{8}{12} = 0{,}67$ y en el segundo sería $\frac{6}{8} = 0{,}75$, es decir, elegiríamos al segundo.

Pero, ¿qué ocurriría si el segundo jugador está saliendo de una lesión? Quizás, ahora esa proporción no sea del todo fiable a la hora de decantarme por uno o por otro.

Pongamos otro ejemplo.

Siempre que se oyen cuentos sobre gente que hace trampas en el juego, se habla de cartas marcadas, monedas o dados trucados, ruletas manipuladas y siempre en la línea de conseguir que los resultados que se esperan que tengan determinada probabilidad, se vean alterados.

Sin embargo, en este apartado no vamos a estudiar esos experimentos, sino que vamos a estudiar aquellos en los que todos los resultados tienen la misma oportunidad de suceder.

### Importante

Se llaman **sucesos equiprobables** aquellos que tienen la misma probabilidad de suceder.

Por ejemplo, en una moneda no trucada, los sucesos "salir cara" y "salir cruz" tienen las mismas posibilidades de ocurrir. De la misma manera, en una baraja normal de cartas, si extraemos una al azar, cualquiera de las cartas tiene la misma posibilidad de salir.

Si estamos ante este caso, podemos recurrir a la definición clásica de probabilidad:

### Importante

En un experimento con resultados equiprobables, la probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de resultados favorables al suceso partido por el número de resultados posibles del experimento, es decir, el número de sucesos elementales. Este resultado se conoce como **Regla de Laplace**.

$$P(\text{de un suceso } A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Esta definición teórica de probabilidad es útil en los experimentos aleatorios de tipo finito, cuando es posible obtener el número de casos favorables y el número de casos posibles y estos son igualmente probables.

Por ejemplo, vamos a trabajar el siguiente experimento: se lanza un dado dos veces y se suman los resultados. Vamos a calcular la probabilidad de que la suma sea 3, 12 y 7 puntos. El espacio muestral de este experimento serían todos los posibles resultados de sumar las puntuaciones de dos dados, es decir:

E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Pero, claro, no es igual de probable obtener de suma 12, cosa que solo puedo conseguir si me salen dos seis, que conseguir sumar 4.

Por lo tanto, para aplicar la regla de Laplace tengo que escribir TODOS los sucesos posibles, uno a uno, y todas las posibilidades que pueden suceder.

Lo organizamos en esta tabla:

| Suceso | Casos favorables | Número de formas diferentes de conseguir el suceso | Probabilidad |
|---|---|---|---|
| {2} | (1,1) | 1 | 1/36 |
| {3} | (1,2), (2,1) | 2 | 2/36 |
| {4} | (1,3), (3,1), (2,2) | 3 | 3/36 |
| {5} | (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) | 4 | 4/36 |
| {6} | (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), | 5 | 5/36 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (3,3) | | |
| {7} | (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3) | 6 | 6/36 |
| {8} | (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4) | 5 | 5/36 |
| {9} | (3,6), (6,3), (4,5), (5,4) | 4 | 4/36 |
| {10} | (4,6), (6,4), (5,5) | 3 | 3/36 |
| {11} | (5,6), (6,5) | 2 | 2/36 |
| {12} | (6,6) | 1 | 1/36 |

De forma que la probabilidad de obtener de suma 3 sería $P(3)=\frac{2}{36}=0{,}05$

La probabilidad de que la suma de los dados sea 12 sería $P(12)=\frac{1}{36}=0{,}03$

La probabilidad de que la suma de los dados sea 7 sería $P(7)=\frac{6}{36}=0{,}16$

## Ejercicio resuelto

**Curso 2009/2010**

Se lanzan simultáneamente dos dados cuyas caras están numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las dos caras sea 12?

Universidades Públicas de Andalucía

**Mostrar retroalimentación**

El espacio muestral asociado al experimento tirar dos dados es:

E={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Es decir, tenemos 36 casos posibles equiprobables.

Pero, ¿en cuántos de ellos la suma de los dados es 12? Solamente en el caso (6,6).

Por lo que, si llamamos A al suceso "obtener 12 en la suma de las caras de dos dados", y aplicando la regla de Laplace obtenemos:

$$P(A)=\frac{1}{36}$$

## Ejercicio resuelto

Tenemos un dado con 20 caras numeradas del 1 al 20 (cuya figura geométrica es el polígono regular llamado icosaedro), lo lanzamos y nos fijamos en qué número obtenemos. Queremos saber que probabilidad hay de obtener un número que sea:

1. Múltiplo de 5.
2. Mayor que 12.
3. Mayor que 4 y menor que 12.

**Mostrar retroalimentación**

1. Hay cuatro posibilidades de obtener un múltiplo de 5 que son: 5, 10, 15 y 20; luego la probabilidad de este suceso es

$$P(obtener\ múltiplo\ de\ 5)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}=0{,}20$$

2. El suceso pedido es B={obtener número mayor que 12}={13,14,15,16,17,18,19,20} por ello su probabilidad es

$$P(obtener\ mayor\ que\ 12)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}=0{,}40$$

3. El suceso C={mayor que 4 y menor que 12}={5,6,7,8,9,10,11} luego $P(C)=\frac{7}{20}=0{,}35$

Fíjate que la probabilidad se da siempre como una fracción simplificada o como un decimal con dos cifras (recuerda siempre redondear correctamente). Además ten en cuenta que la probabilidad siempre es un número comprendido entre 0 y 1 por lo que su valor siempre será *0,algo*.

## Importante

Existen otras definiciones de probabilidad, más generales:

- En una de ellas se toma como medida de la probabilidad de un suceso la **frecuencia relativa** con la que este aparece, ya que cuando va aumentando el número de veces que realizamos un experimento, la frecuencia relativa de cada resultado se va situando cada vez más alrededor de un determinado número que se mantiene constante cuando el número de lanzamientos es muy grande. Esa cantidad a la que tiende la frecuencia relativa coincide con la probabilidad del suceso.
- En otra se define la probabilidad como una función que cumple unos axiomas.

Ambas definiciones puedes encontrarlas con más detalle en el apéndice, incluso trabajaremos con la primera en el tema siguiente.

### Probabilidad de operaciones con sucesos

Después del apartado anterior, ya somos capaces de calcular probabilidades de sucesos fáciles, pero ya viste en el apartado 1.3 que los sucesos se podían operar y es verdad que a veces lo que queremos que suceda es una operación entre dos o más sucesos.

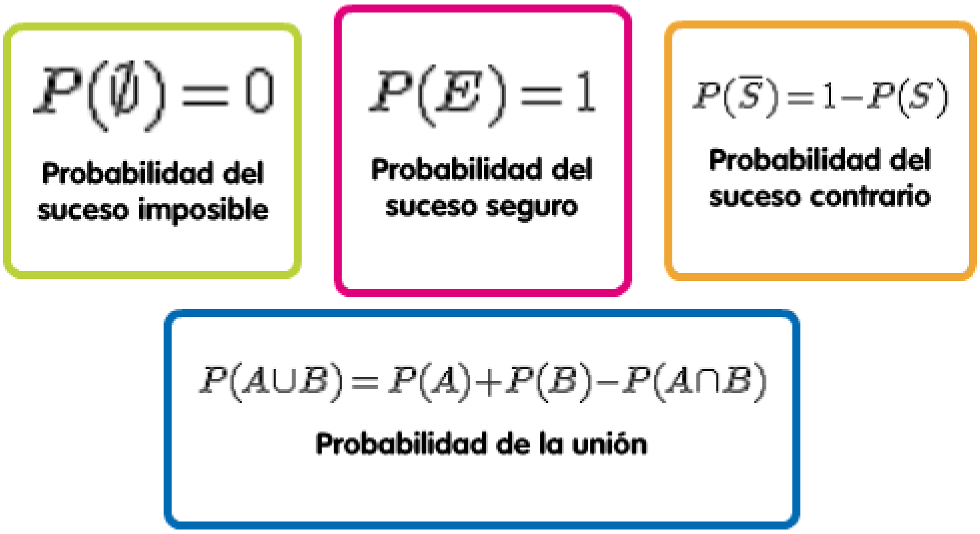



Imagen de elaboración propia

Recordar estas fórmulas es relativamente sencillo, sobre todo si las racionalizamos:

**¿Por qué P(Ø)=0?**

Ya vimos que por definición cuando la probabilidad estaba más cercana a 0, más improbable era que ocurriera. Por lo tanto, si es exactamente 0, no cabe duda que es un suceso que nunca llegará a ocurrir.

**¿Por qué P(E)=1?**

Es el mismo razonamiento que el suceso imposible. Si estamos ante algo seguro, tenemos la certeza de que ocurrirá por lo tanto, la probabilidad es 1.

**¿Por qué P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B)?**

Está claro que entre A y B forman la unión, pero si te fijas al tomar esa unión hay una parte que las estamos contando dos veces que es la parte que tienen en común A y B, es decir, su intersección.

**¿Por qué** $P(\overline{S})=1-P(S)$ **?**

Porque entre S y su complementario forman el suceso seguro, y ambos son incompatibles por lo que si aplicamos la fórmula de la unión, obtenemos que $P(\overline{S})=1-P(S)$ .

En el siguiente vídeo, podemos ver ejemplos y algo de teoría relacionada con la probabilidad de la unión de dos sucesos:

## Ejercicio resuelto

En una ciudad las personas que leen el periódico El País representan el 25% de la población, los que leen El Mundo son el 17% y hay un 68% de la población que no lee ninguno de los dos periódicos.

¿Qué porcentaje lee ambos periódicos?

Ten presente que si un suceso tiene un porcentaje del 25% equivale a decir que su probabilidad es 0,25.

**Mostrar retroalimentación**

Si tenemos los sucesos A={lee El País} y B={lee El Mundo}, conocemos las siguientes probabilidades:

$$P(A)=0{,}25 \ ; \ P(B)=0{,}17 \ \text{y} \ P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=0{,}68$$

Por la probabilidad de los sucesos contrarios $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-0{,}68=0{,}32$

Y basta despejar en la fórmula de la probabilidad de la unión para obtener lo que buscamos:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}25+0{,}17-0{,}32=0{,}10$$

Es decir, hay un 10 % de lapoblación de esa ciudad que lee los dos periódicos.

## Ejercicio resuelto

**Curso 2011/2012**

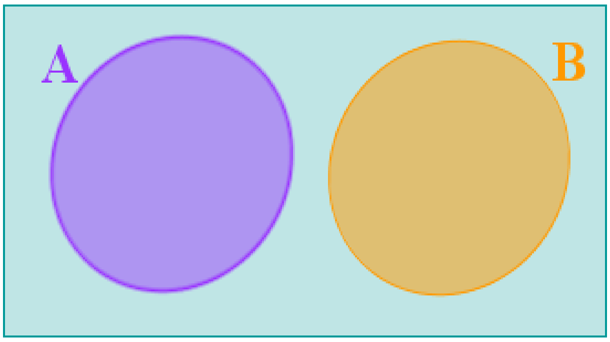
Universidades Públicas de Andalucía

Sean A y B dos sucesos incompatibles de un espacio muestral cuyas probabilidades son $P(A)=0,25$ y $P(B)=0,35$. Calcule $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ y $P(A^{c}\cap B)$.

**Mostrar retroalimentación**

**$P(A\cap B)$**

Dos sucesos son incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común, es decir, $A\cap B=\emptyset$. Por lo tanto, $P(A\cap B)=0$.




**$P(A\cup B)$**

Utilizando la fórmula de la unión de dos sucesos $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ obtenemos que $P(A\cup B)=0,25+0,35-0=0,6$.

**$P(A^{c}\cap B)$**

Si nos fijamos detenidamente en la imagen, la preguntaría sería ¿qué parte que no está en A coincide con la de B? En este caso coincidiría con el propio B, pues A y B no tienen ningún elemento en común, por lo tanto $P(A^{c}\cap B)=P(B)=0,35$.

**Probabilidad de experimentos compuestos**

Ya hemos calculado probabilidades de sucesos más complejos como el de la unión, pero, ¿qué ocurre cuando es el experimento más complejo?

Te recordamos que un experimento compuesto es aquel en el que cada prueba equivale a la realización conjunta de varias pruebas simples, ya sea simultánea o sucesivamente. La probabilidad de un suceso de un experimento compuesto se calcula a partir de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

Para calcular la probabilidad de un suceso de un experimento compuesto se pueden usar varios métodos. Una de estos métodos consiste en usar los diagramas en árbol. En el diagrama, en cada paso, vamos escribiendo las probabilidades de los experimentos simples que componen nuestro experimento compuesto.

Se observa el camino de las ramas que nos conducen a la solución. El producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino será la probabilidad del suceso solución.

A continuación un vídeo de cómo enfrentarnos a este tipo de problemas, pero recuerda lo que vimos en el apartado 1, podemos trabajar con reemplazamiento o sin reemplazamiento:

## Ejercicio resuelto

**Curso 2010/2011**

De una caja que contiene 2 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra, se extraen al azar dos bolas, sucesivamente y sin reemplazamiento, y se observan sus colores en el orden en el que se extraen.

a) Describa el espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) Halle la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

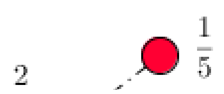
c) Halle la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

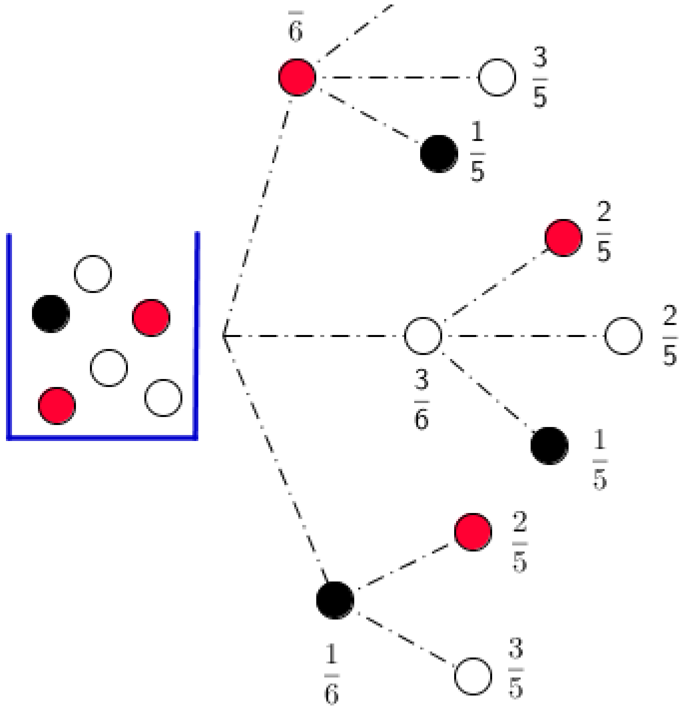
**Mostrar retroalimentación**

Llamemos R al suceso "extraer una bola roja", B "extraer una bola blanca" y N "extraer una bola negra".

a) Como tenemos que extraer dos bolas estamos hablando de un experimento compuesto, cuyo espacio muestral (todos los casos posibles) es:

E={(R,R) (R,B) (R,N), (B,R), (B,B), (B,N), (N,R), (N,B)}.






b) En la primera extracción tenemos 6 bolas en total, y 2 de las cuales son rojas. Por lo tanto,

$$P(R)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

c) Nos preguntan por la probabilidad de que sea (R,R) o (B,B) (las dos bolas negras no puedan ser pues solo tenemos 1 en la caja).

$P(\ (R,R)\cup(B,B)\ )=P(\ (R,R)\ )+P(\ (B,B)\ )$ (ya que ambos sucesos son incompatibles)

$P(\ (R,R)\ )=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$ y $P(\ (B,B)\ )=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

Observa como en la primera extracción tenemos todas las bolas (6) y en la segunda extracción al ser sin reemplazamiento tenemos una bola menos (5).

Por tanto $P(\text{las dos bolas del mismo color})=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}=\frac{4}{15}$

**Probabilidad condicionada**

Imagen en Flickr por dsevilla bajo CC

El efecto mariposa es un concepto que hace referencia a como unas condiciones iniciales diferentes, pueden variar un resultado. Ya a lo largo del tema hemos visto ejemplos de situaciones en que un resultado influye en los resultados siguientes (hacíamos varias extracciones de una urna sin reemplazamiento). Esto nos indica que hay veces que tenemos una información añadida que condicionará el resto del experimento.

Por ejemplo, si tenemos una urna con 2 bolas blancas y 3 bolas negras, podemos preguntarnos cuál es la probabilidad de extraer una bola negra, sabiendo que la primera fue blanca, es decir, tendremos que recorrer el árbol partiendo de una de las extracciones.

Esta información adicional, provoca que tengamos un nuevo espacio muestral de partida, que serían los casos en los que se cumple esa condición, es decir, tenemos nuestro efecto mariposa particular.

### Importante

En un experimento aleatorio dados dos sucesos A y B, se define el suceso "**A condicionado a B**" (**A|B**) como el suceso que ocurre cuando ocurre A, suponiendo que haya ocurrido B.

Se llama **probabilidad condicionada** del suceso A respecto del B y se denota P(A|B) al siguiente cociente:

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{si} \quad P(B)\neq 0}$$

### Ejercicio resuelto

En un experimento se sabe que P(A)=0,4, P(B)=0,8 y P(A∪B)=0,85. Calcula las siguientes probabilidades:

a) P(A∩B)

b) P(A|B)

c) P(B|A)

**Mostrar retroalimentación**

a) P(A∩B)

Sabemos que P(A∪B)= P(A) + P(B) − P(A∩B).

Despejamos: P(A∩B)= P(A) + P(B) − P(A∪B)=0,4 + 0,8 − 0,85= 0,35

b) P(A|B) Aplicamos la fórmula:

b) P(A|B) Aplicamos la fórmula:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,35}{0,8}=0,4375$$

c) P(B|A) Volvemos a aplicar la fórmula:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0,35}{0,4}=0,875$$

Volvamos al caso de las urnas, y veamos el siguiente ejemplo:

**Probabilidad y tablas de contingencia**

Llevamos casi todo el tema organizando nuestra información en diagramas de árbol, pero también podemos recogerla mediante tablas de contingencia.

Por ejemplo, si vamos a hacer un análisis sobre los alumnos de un Instituto, en función del sexo y del nivel de estudios, los datos podemos ordenarlos:

| | Hombres | Mujeres | Totales |
|---|---|---|---|
| Secundaria | 180 | 260 | 440 |
| Bachillerato | 190 | 220 | 410 |
| Totales | 370 | 480 | 850 |

¿Cómo calculamos probabilidades cuando nos organizamos de esta forma? Es muy sencillo como verás en la siguiente actividad, pero lo que debes tener presente es que necesitas saber los totales, es decir, los casos posibles.

## Ejercicio resuelto

Si elegimos una persona al azar, de los matriculados en esta enseñanza, ¿cuál es la probabilidad de ser?

a) Alumna de secundaria.

b) Alumno de bachillerato.

c) Si la persona que hemos elegido es de bachillerato, ¿cuál es ahora la probabilidad de que sea un alumno?

d) Si hemos elegido una persona al azar y sabemos que es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculada en secundaria?

**Mostrar retroalimentación**

a) Si consideramos el suceso M={ser mujer} y S={matriculado en secundaria}, en este caso nos están pidiendo P(M∩S).

$$P(M\cap S)=\frac{260}{850}=0{,}31$$

b) En este caso, si consideramos como H={ser hormbre} y B={matriculado en bachillerato}, nos están pidiendo P(H∩B):

$$P(H\cap B)=\frac{190}{850}=0{,}22$$

c) Si hemos elegido una persona matriculada en bachillerato, ya nuestro espacio muestral y casos posibles se restringen a los alumnos de bachillerato (410), de los que 190 son hombres, por lo que la probabilidad pedida sería, P(H|B)

$$P(H|B)=\frac{190}{410}=0{,}46$$

d) De la misma forma, en este apartado trabajamos solo con las 480 mujeres que hay matriculadas como casos posibles, y entonces tendremos:

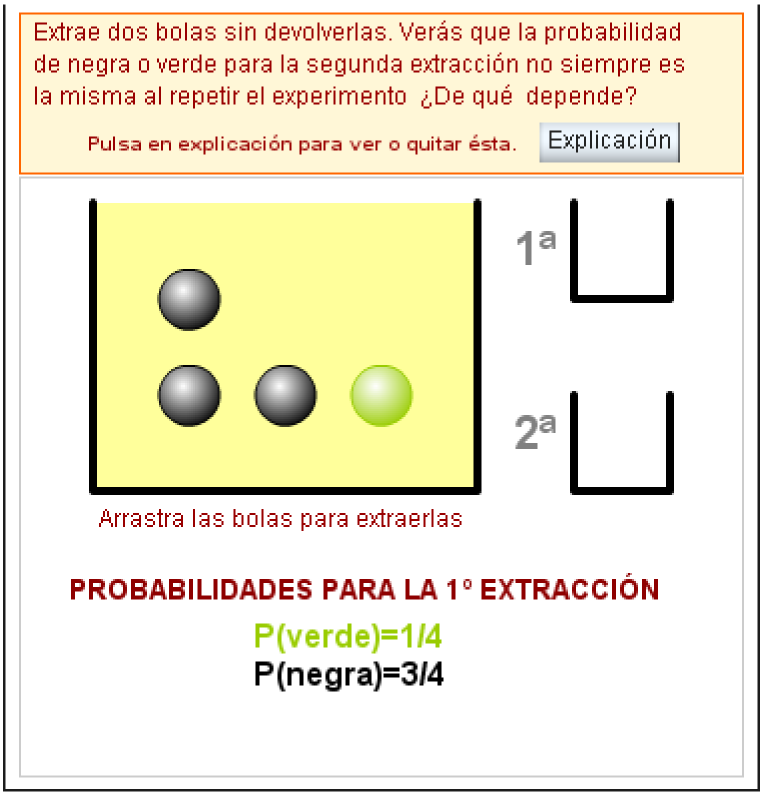
$$P(M|S)=\frac{260}{480}=0{,}54$$

**Dependencia e independencia de sucesos**

Si recuerdas en el apartado 1, estudiábamos alguna de las relaciones existentes entre dos sucesos, entre las que se encontraban la dependencia y la independencia. Pero aunque a priori, parezca sencillo determinar si dos sucesos son o no dependientes, en ocasiones no podemos deducirlo de la propia definición de estos sucesos.

En las extracciones con reemplazamiento cada extracción es independiente de las demás. Lo mismo ocurre en los lanzamientos de dados, monedas...

En las extracciones sin reemplazamiento el resultado obtenido en cada extracción condiciona las siguientes, de forma que cada experimento aleatorio simple es dependiente de los anteriores, como podrás comprobar pinchando en la siguiente imagen:




## Importante

Dos sucesos A y B son **dependientes** si la realización de A condiciona la probabilidad de B.

Si dos sucesos son dependientes: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

Dos sucesos A y B son **independientes** si la realización de A no condiciona la probabilidad de B.

Si dos sucesos A y B son independientes $P(A) = P(A|B)$, es decir, la realización del suceso B no influye en la probabilidad de A, y la fórmula anterior queda como $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

## Comprueba lo aprendido

Marca la respuesta correcta aplicando lo que has aprendido sobre sucesos dependientes e independientes.

1. En un experimento se sabe que $P(A)=0{,}4$; $P(B)=0{,}8$ y $P(A \cup B)=0{,}85$. ¿Son A y B independientes?

○ Verdadero ○ Falso

**Falso**

Sabemos que $P(A \cup B)= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Despejamos: $P(A \cap B)= P(A) + P(B) - P(A \cup B)= 0{,}4 + 0{,}8 - 0{,}85= 0{,}35$

Por otro lado $P(A) \cdot P(B)= 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$.

Como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, A y B son dependientes

Como P(A ∩ B) ≠ P(A) · P(B), A y B son dependientes.

2. En un experimento se sabe que P(A)=0,5; P(B)=0,7 y P(A∪B)=0,85. ¿Son A y B independientes?

Verdadero Falso

**Verdadero**

Sabemos que P(A∪B)= P(A) + P(B) − P(A∩B).

Despejamos: P(A∩B)= P(A) + P(B) − P(A∪B)= 0,5 + 0,7 − 0,85= 0,35.

Por otro lado P(A) · P(B)= 0,5 · 0,7 = 0,35.

Como P(A ∩ B) = P(A) · P(B), A y B son independientes.

Quizás hayas reparado que en muchos de los ejemplos utilizados en este apartado, hemos trabajado con experimentos compuestos, los que ya abordamos en el apartado anterior. Pero si te paras a pensar, no llegamos a formalizar la idea mediante una fórmula.

Pues bien, ¡ya estamos en disposición de hacerlo! Si queremos hallar la probabilidad de que ocurran varios sucesos dependientes a la vez, hay que calcular la probabilidad del primer suceso, multiplicarlos por la probabilidad de que ocurra el segundo suceso, supuesto que ha ocurrido el primero, por la probabilidad de que ocurra el tercer suceso suponiendo que han ocurrido los dos primeros, y así sucesivamente. Para tres sucesos correspondería con la expresión:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B\,|A)\cdot P(C\,|A\cap B)$$

## Importante

El resultado anterior se conoce como **Teorema de la probabilidad compuesta** y puede generalizarse a cualquier número de sucesos.

Si te fijas si aplicamos este razonamiento a dos sucesos, obtenemos de nuevo la fórmula de la intersección para dos sucesos dependientes.

# 3. Apéndice

En este tema, hemos abordado el concepto de probabilidad, que aunque a priori todos lo tengamos en mente (gracias en gran medida a la meteorología), el objetivo era formalizarlo y descubrir cómo asignarlo a distintos tipos de sucesos y experimentos.

Dentro de los contenidos de la preparación, este tema ocupa un lugar relevante debido a la frecuencia con la que aparece en la prueba.

## Importante

Para que todo lo anterior sea posible, es necesario que recuerdes las siguientes ideas:

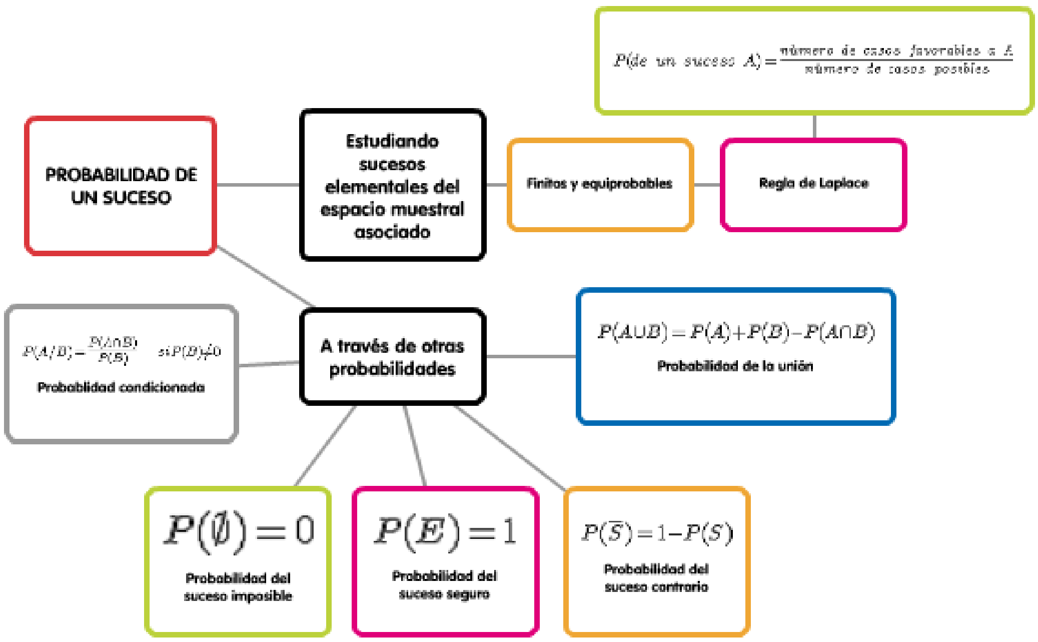



Imagen de elaboración propia

Haz clic en la imagen para ampliar

# 3.1. Recursos

Actualmente no disponemos de un recurso que, definido un suceso, nos dé su probabilidad, pero si tenemos multitud de escenas y programas que nos ayudan a simular experimentos, y en función de los resultados obtenidos calcular las probabilidades:

**Simulador de tiradas de dos dados por jefedo61**


**Simulador de las tiradas de una moneda**

Pensado para descubrir cómo la frecuencia relativa de cada suceso se aproxima al valor de la probabilidad.

GeoGeb

Curiosidad

## Algo más de historia

Cierto día del año 1654, el matemático francés Blaise Pascal (1623-1662) viajaba en compañía de un jugador conocido como El Caballero de Meré, hombre noble e ilustrado. El caballero planteó a Pascal 3 problemas o cuestiones relacionadas con los juegos de azar, que desde entonces son conocidos como "los problemas del Caballero de Meré". En torno a estos y otros problemas surgió una asidua correspondencia entre el propio Pascal y algunos de sus amigos matemáticos, en especial Pierre de Fermat (1601-1665) abogado de profesión. Dicha correspondencia constituye el origen de la moderna teoría de la probabilidad. Ni Pascal ni Fermat publicarían ningún libro exponiendo sus resultados pero inspirarían al físico-matemático holandés Christian Huygens (1629-1695) que en 1657 publicó un breve tratado de título "Sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados".

Posteriormente Laplace (1749-1827) formularía la definición clásica de probabilidad: "Probabilidad de un suceso es la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, siempre que nada obligue a creer que alguno de estos casos debe ocurrir con preferencia a los demás, lo que hace que todos sean, para nosotros, igualmente posibles." Esta definición es aplicable a experimentos aleatorios que pueden descomponerse en sucesos elementales igualmente probables, lo que ocurre con frecuencia en sencillos problemas relacionados con los juegos de azar (cartas, dados, urnas etc…), pero no es muy útil en problemas más complicados.

Para solucionar estos últimos Jakob Bernouilli (1654-1705) definiría la probabilidad a posteriori "mediante la observación múltiple de los resultados de pruebas similares…" Introdujo el concepto de probabilidad 'estadística' definiendo la probabilidad de un suceso como el resultado que se obtendría si el proceso se repitiera en condiciones similares un número grande de veces.

En el siglo XX Kolmogorov (1903-1987) formuló la definición axiomática de probabilidad, que dio origen a la construcción de modelos teóricos, a partir de los cuales pudiera interactuarse con los fenómenos aleatorios.

Curiosidad

## Probablidad y televisión

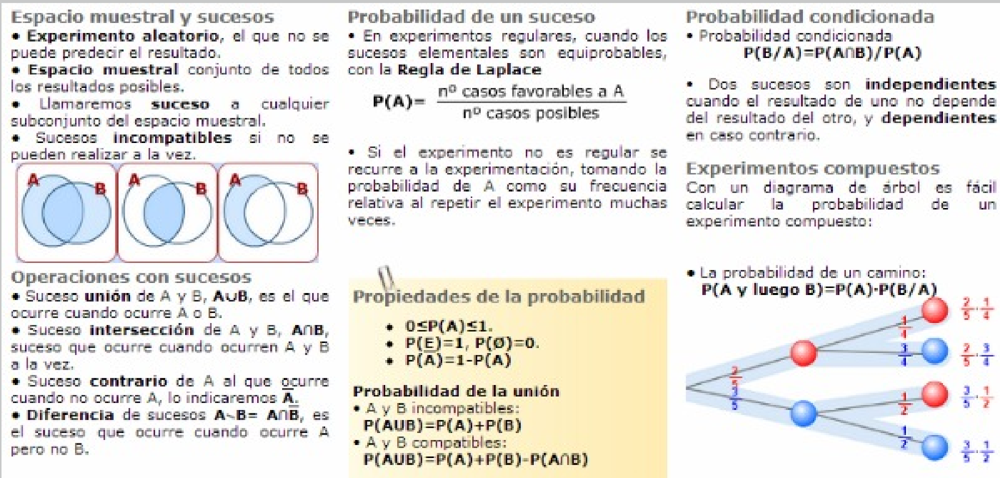
El problema de Monty Hall está inspirado en el concurso televisivo estadounidense Let's Make a Deal ("hagamos un trato"). El problema se conoce con el nombre del presentador de aquel concurso: Monty Hall.

En el siguiente vídeo de un capítulo de la serie de televisión Numb3rs, puedes ver de qué trata este problema.

Ahora nuestra pregunta es: ¿es mejor cambiar de tarjeta o seguir con la que había elegido inicialmente?, ¿dónde tengo más probabilidad de quedarme con el coche?

## Para saber más

Como referencia te recomendamos que visites la página del Proyecto Edad del Ministerio de Educación sobre probabilidad, entre otras cosas encontrarás un resumen muy interesante:




Haz clic en la imagen para ampliar

## Para saber más

### Operaciones con sucesos

En esta página puedes practicar con las operaciones con sucesos a través de la simulación del lanzamiento de un dado.

## Para saber más

### Definición probabilidad

Históricamente se han usado distintas formas de asignar la probabilidad:

1. **Probabilidad clásica o de Laplace**: La probabilidad de un suceso consistiría en dividir el número de casos favorables entre el número de casos posibles. Esta definición teórica de probabilidad es útil en los experimentos aleatorios de tipo finito, cuando es posible obtener el número de casos favorables y el número de casos

cuando es posible obtener el número de casos favorables y el número de casos posibles y estos son igualmente probables.

2. **Probabilidad frecuentística o empírica**: Consiste en tomar como medida de la probabilidad de un suceso la frecuencia relativa con la que este aparece. Hay personas que en los juegos de azar llevan una estadística de los resultados que se van obteniendo y toman las frecuencias relativas como sinónimo de probabilidad. Ley de los Grandes Números.

3. **Probabilidad subjetiva**: Algunas personas asignan probabilidades de forma subjetiva, por ideas preconcebidas y carentes de toda lógica. Así se dice que si el año pasado el premio de la lotería navideña acabó en 5 este año es mejor coger números que no acaben en 5.

Todas estas asignaciones de probabilidad tienen algo en común: la probabilidad de un suceso es un número, una medida de la frecuencia con la que consideramos que tal suceso ocurrirá. A partir de Kolmogorov la probabilidad se convirtió en una teoría axiomática, donde la lógica desempeña un papel fundamental: